4. Équations $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ et $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$

1. Quelques solutions de ces deux équations.

Soit t un nombre entier quelconque ; le quadruplet (x, y ,z, t) = (t, 0, 0, t) est solution de l'équation $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$; soit M une matrice produit dans un ordre quelconque des matrices R_1, R_2, R_3 , alors les produits $M\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ nous donnent deux autres solutions de cette équation et le produit $M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$ nous donne une solution de l'équation $x^2 + y^2 + t^2 = z^2$.

EXEMPLE : $M = R_1 R_2^2 R_3 = \begin{pmatrix} -89 & 92 & 128 \\ -188 & 191 & 268 \\ -208 & 212 & 297 \end{pmatrix}$;

$x = -89$, $y = -188$, $z = -208$, $t = 1$ et $x = 92$, $y = 191$, $z = 212$, $t = 1$ vérifient $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$;

$x = 128$, $y = 268$, $z = 297$, $t = 1$ vérifie $x^2 + y^2 + t^2 = z^2$.

2. Ensemble des solutions de $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$

Soit t ∈ É* fixé .

Posons $S(t) = \{(a;b;c) \in$ É$^3 \mid a^2 + b^2 = c^2 + t^2\}$. Il est aisé de montrer que si $X \in S(t)$ alors $R_iX \in S(t)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Inversement, à quelle condition $R_i^{-1}X$ appartient-il à S(t) ?

Avec les notations du § 0, posons $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\gamma = -2a - 2b + 3c$.

$(\gamma - c)(c+a+b) = 2(c-(a+b))(c + (a + b)) = -2(2ab + a^2 + b^2 - c^2) = -2(2ab + t^2) < 0$

Comme $a + b + c > 0$, on a nécessairement $\gamma < c$.

Si $\gamma \geq 0$ alors, de la même manière qu'au § 0, l'un des trois vecteurs $R_i^{-1}X$ appartient à S(t) et on recommence la même procédure. Posons à présent :

$E(t) = \{X \in S(t) \mid \gamma < 0\}$; nous pouvons énoncer le

Théorème 3

Quel que soit $X \in S(t)$, X est de la forme MU où $U \in E(t)$ et M est produit dans un ordre quelconque des matrices R_i.

Le problème qui se pose alors est de trouver l'ensemble E(t) c'est-à-dire l'ensemble des solutions du système $\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + t^2 & (1) \\ 3c < 2a + 2b & (2) \end{cases}$

En élevant l'inéquation (2) au carré et en multipliant (1) par 9, on obtient tout calcul fait : $5a^2 + 5b^2 - 8ab < 9t^2$; a et b jouent des rôles symétriques. Il suffit donc de chercher les solutions vérifiant $a \le b$.

Enfin pour b fixé, l'étude de la fonction définie pour $a \in [b, +\infty[$:

$a \longmapsto \Psi_b(a) = 5a^2 - 8ab + 5b^2 - 9t^2$, montre que l'on peut se limiter au cas où $0 \le b \le \frac{\sqrt{3}}{2} t$, $0 \le a \le \frac{\sqrt{3}}{2} t$.

EXEMPLES

$\boxed{t = 1}$, $E(1) = \{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$

$\boxed{t = 7}$ $\frac{3}{\sqrt{2}} t \approx 14{,}8$: il suffit de chercher a, b, c vérifiant $c^2 = a^2 + b^2 - 7^2$,

$0 \le a \le 14$, $0 \le b \le 14$. Un tableur nous rendra quelques services (première ligne : a ; première colonne : b ; puis dans chaque case le nombre $a^2 + b^2 - 7^2$)

b\a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	-49	-48	-45	-40	-33	-24	-13	**0**	15	32	51	72	95	120	147
1		-47	-44	-39	-32	-23	-12	**1**	**16**	33	52	73	96	**121**	148
2			-41	-36	-29	-20	-9	**4**	19	**36**	55	76	99	124	151
3				-31	-24	-15	-4	**9**	24	41	60	**81**	104	129	156
4					-17	-8	3	**16**	31	48	67	88	111	136	163
5						1	12	**25**	40	57	76	97	120	145	172
6							23	**36**	51	68	87	108	131	156	183
7								**49**	**64**	**81**	**100**	**121**	**144**	**169**	**196**
8									79	96	115	136	159	184	211
9										113	132	153	176	201	228
10											151	172	195	220	247
11												193	216	241	268
12													239	264	291
13														289	316
14															343

Le triplet a =13, b =1, c =11 ne convient pas car $3c \ge 2a + 2b$

$E(7) = \{(5,5,1)(8,1,4)(1,8,4)(9,2,6)(2,9,6)(11,3,9)(3,11,9)(13,13,17)(7,b,b)(b,7,b) \mid 0 \le b \le 14\}$

Le théorème 3 peut être généralisé à $\hat{I}^3$ de la manière suivante :

Théorème 4

Quel que soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \hat{I}^3$ tel que $a^2 + b^2 = c^2 + t^2$, X est de la forme MU ou JMU où $U \in E(t)$, $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et M est produit dans un ordre quelconque des matrices R_i ou $(R_i)^{-1}$.

En effet, le produit de X par l'une des trois matrices $I_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ou J nous ramène aux hypothèses du théorème 3.

Or $I_1 = R_2^{-1}R_3 = R_3^{-1}R_2$ et $I_2 = R_1^{-1}R_2 = R_2^{-1}R_1$. D'où le résultat.

EXEMPLE : $X = \begin{pmatrix} -17 \\ -6 \\ 18 \end{pmatrix}$, $X = I_1\, I_2 \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = I_1\, I_2 R_3{}^2 R_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = R_3{}^{-1} R_1 R_3{}^2 R_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.