e3a

CONCOURS ENSAM - ESTP - ARCHIMEDE

Épreuve de Mathématiques B PC

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à $2n$; il est muni du produit scalaire défini par:

$$\forall (P,Q) \in E^2, \qquad \langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$$

(on ne demande pas de vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire).

Soit $\Delta : E \to E$ défini par:

$$\forall P \in E, \quad \Delta(P) = (X^2-1)P'' + 2XP'$$

où l'on note respectivement P' ou $P'(X)$, ainsi que P'' ou $P''(X)$ les dérivées premières et deuxièmes de $P = P(X)$.

$\boxed{1°)}$ **a)** Soit $F = \{P \in E / P(X) = P(-X)\}$ et $G = \{P \in E / P(X) = -P(-X)\}$.

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires et orthogonaux. Préciser la dimension de F et de G.

b) Vérifier que Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel E.

c) En considérant la matrice de Δ relativement à la base canonique $(1, X, \ldots, X^{2n})$, déterminer les valeurs propres de Δ. Préciser si Δ est diagonalisable, et la dimension des sous-espaces propres.

d) Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$, et on pose $\lambda_k = k(k+1)$.

Justifier l'existence d'un unique vecteur propre P_k de Δ associé à λ_k, tel que P_k soit de degré k et admette 1 comme coefficient de X^k.

e) Montrer que pour tous P et Q dans E, on a: $\quad \langle \Delta(P), Q\rangle = \langle P, \Delta(Q)\rangle$.

En déduire que pour tout $(k,h) \in [\![0,2n]\!]^2$ tel que $k \neq h$, on a: $\langle P_k, P_h\rangle = 0$.

Que peut-on en déduire pour $\mathcal{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_{2n})$?

f) Montrer que $(P_0, P_2, \ldots, P_{2n})$ est une base de F et $(P_1, P_3, \ldots, P_{2n-1})$ est une base de G.

$\boxed{2°)}$ On prend ici $n = 1$, et l'espace euclidien $E = \mathbb{R}_2[X]$, toujours muni du produit scalaire défini par:

$$\forall P, Q \in E, \qquad \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$

a) Expliciter P_0, P_1, P_2 définis en 1°), et en déduire une base orthonormale de E formée de vecteurs propres pour Δ.

b) Soit $G = \{P \in E / P(X) = -P(-X)\}$. Calculer la distance euclidienne de $A = X + 1$ au sous-espace vectoriel G de E.

c) Montrer que $C = \{h \in \mathcal{L}(E) / h \circ \Delta = \Delta \circ h\}$ est un espace vectoriel réel de dimension 3. On pourra utiliser la matrice de Δ et de $h \in C$ dans la base (P_0, P_1, P_2).

d) Déterminer tous les endomorphismes g de E tels que $g \circ g = \Delta$. On les donnera par leur matrice dans la base (P_0, P_1, P_2).

EXERCICE 2

On rappelle les deux formules usuelles de trigonométrie, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t) \quad ; \quad \sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t).$$

$\boxed{1°)}$ On considère l'espace vectoriel réel usuel $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique $\mathcal{B}$ soit orthonormale.

a) Soit $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par: $f_1(t) = (\cos^2(t), \cos(t)\sin(t))$.

(i) Représenter la courbe C_1 d'équation dans $\mathcal{B}$:

$$(2x - 1)^2 + (2y)^2 = 1,$$

et préciser la nature de cette courbe.

(ii) Comparer C_1 avec la courbe paramétrée par f_1, c'est-à-dire:

$$\{(\cos^2(t), \cos(t)\sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

b) Soit $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ avec $f_2(t) = (\cos^2(t), \sin(t))$.

Etudier et représenter la courbe C_2 paramétrée par f_2, c'est-à-dire:

$$C_2 = \{(\cos^2(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Pour cela, on commencera par comparer C_2 avec la courbe d'équation dans $\mathcal{B}$:

$$x + y^2 = 1, \text{ avec } -1 \leq y \leq 1,$$

et préciser la nature de cette courbe.

c) Soit $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ avec $f_3(t) = (\cos(t)\sin(t), \sin(t))$.

Etudier et représenter la courbe C_3 paramétrée par f_3, c'est-à-dire:

$$C_3 = \{(\cos(t)\sin(t), \sin(t)), t \in \mathbb{R}\}.$$

Montrer que C_3 est la courbe d'équation dans $\mathcal{B}$: $\quad (2x)^2 + (1 - 2y^2)^2 = 1.$

$\boxed{2°)}$ On considère l'espace vectoriel réel usuel $\mathbb{R}^3$ orienté, muni de son produit scalaire canonique tel que la base canonique $\mathcal{C}$ soit orthonormale directe.

a) Soit $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - x + y^2 = 0\}$ et $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.
Préciser la nature des deux surfaces S_1 et S_2.

b) Soit $\quad \Gamma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \quad \begin{cases} x = x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \right\}$.

Que représente Γ vis-à-vis de S_1 et S_2 ?

c) Déterminer l'équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent en tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_1. De même déterminer l'équation dans $\mathcal{C}$ du plan tangent en tout point régulier $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S_2.

En déduire la tangente en tout point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ régulier de Γ.

d) Déterminer un paramétrage de Γ, en utilisant les coordonnées cylindriques: c'est-à-dire que l'on exprimera pour $M = (x,y,z) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta), z)$ les conditions sur r, θ, z pour que M soit sur Γ.

En déduire une représentation paramétrique du cône de sommet $S = (\frac{1}{2}, 0, 0)$, engendré par les droites passant par S et un point variable sur Γ.

e) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose: $F(t) = (\cos^2(t), \cos(t)\sin(t), \sin(t))$. Soit $\gamma = \{F(t), t \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que $\gamma \subset \Gamma$. Y-a-t-il égalité $\gamma = \Gamma$?

f) Préciser comment on obtient les trois courbes planes qui sont les projections orthogonales de Γ sur les plans xOy, xOz et yOz, en faisant le lien avec les courbes étudiées dans la première question.

EXERCICE 3

$\boxed{1°)}$ **a)** Justifier l'existence des intégrales:

$$J = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx \quad ; \quad K = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$$

b) Justifier l'existence et calculer $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(x)\,dx$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et telle que $f(x) = |x|$ si $x \in [-\pi, \pi]$.
Calculer les coefficients de Fourier de f.

En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, en précisant le résultat du cours utilisé.

d) Soit $T = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Justifier que $\frac{3}{4}T = S$, et grâce à c) en déduire la valeur de T.

e) En utilisant la série de terme général u_n, justifier l'égalité: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, en précisant le résultat du cours utilisé. En déduire les valeurs des intégrales J et K de a).

f) Justifier l'existence des intégrales suivantes: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x}\,dx \quad ; \quad \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2}\,dx$

et les calculer grâce aux résultats précédents.

$\boxed{2°)}$ **a)** Calculer: $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$, et justifier l'existence de: $B = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 2^k}$.

b) Justifier l'égalité: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx = -(\ln(2))^2 - B$.

c) Calculer: $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t}\,dt$ en fonction de B, et en déduire la valeur de B.

$\boxed{3°)}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $a_n = h_n - \ln(n)$.

a) Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $g(x) = x + \ln(1-x)$ quand x tend vers 0. En déduire un équivalent simple de $a_{n+1} - a_n$ quand n tend vers $+\infty$.

b) Déterminer la nature de la série de terme général $a_{n+1} - a_n$, et en déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{R}$.

On pourra noter $L = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n$ que l'on ne cherchera pas à calculer.

c) Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{h_n}{n}$, ainsi que de terme général $(-1)^{n-1}\frac{h_n}{n}$.

$\boxed{4°)}$ **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $v_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1-x)\,dx$, et montrer que: $\quad v_n = -\dfrac{h_{n+1}}{n+1}$.

b) Montrer l' égalité des trois réels U, V et W, avec

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{h_n}{n}, \quad V = -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t}\,dt, \quad W = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}.$$