L3SPI
4 Mai 2012
Durée 3 heures

Examen de Mathématiques : contrôle 2

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et <u>éteints</u>. Les documents sont interdits. Seule une feuille A5 manuscrite au choix de l'étudiant est autorisée. Barème indicatif : 6+4+5+5

Exercice 1 : Courbes et surfaces

Soient φ la fonction vectorielle définie par $\varphi(t) = (t^4 + t^2; t^2 - t; t^2 + t + 1)$, Ψ le champ scalaire défini par $\Psi(x, y, z) = (y+z)^2 - x + 1$, $\mathcal{C}$ la courbe définie par $\mathcal{C} = Im(\varphi) = \{\varphi(t) \in \mathbb{R}^3 / t \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{S} = \{M \in \mathbb{R}^3 / \Psi(M) = 0\}\}$ la surface d'équation $\Psi = 0$ et A le point $(20; 6; 3)$.

1. Montrer que A appartient à $\mathcal{C}$.
2. Montrer que $\mathcal{C}$ est inclus dans $\mathcal{S}$.
3. Déterminer la tangente T à $\mathcal{C}$ en A.
4. Déterminer le plan tangent Π à $\mathcal{S}$ en A.
5. Montrer que $T \subset \Pi$.
6. [*] On note h le champ scalaire défini par $h(x, y, z) = x - yz$. Déterminer le minimum de h sur $\mathcal{C}$.
7. [*] On admet que h possède des minima sur $\mathcal{S}$ et qu'en ces points les gradients de h et de Ψ sont colinéaires, déterminer ces points et discuter avec la question précédente.

Exercice 2 : calculs d'intégrales

Soient les trois points $A : (0; 0)$, $B : (1; 2)$, $C : (2; 0)$. On note Δ le triangle (ABC) et $\partial\Delta^+$, le bord de Δ parcouru dans le sens trigonométrique.

1. Calculer $I = \displaystyle\iint_\Delta xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.
2. Calculer $C = \displaystyle\oint_{\partial\Delta^+} xy \,\mathrm{d}x$, la circulation du champ de vecteurs $\Psi(x, y) = (xy, 0)$, le long de $\partial\Delta^+$.

Exercice 3 : Équations différentielles

Résoudre les trois équations différentielles suivantes :

(E$_1$) : $y'(x) + 3y(x) + x = 0$

(E$_2$) : $y''(x) + 2y'(x) + 5y(x) = e^{2x}$

(E$_3$) : $y''''(x) - 3y''(x) + 2y(x) = x^2$

Exercice 4 : Équations aux dérivées partielles

1. Résoudre l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + 2\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$.
2. Résoudre l'équation aux dérivées partielles $2x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y)$.
   On pourra poser $X = xy^2$, $Y = y$ et $F(X, Y) = f(x, y)$.
3. Parmi les solutions précédentes déterminer celle pour laquelle, $f(x, x) = x^5 e^{x^3}$.