THE COLLATZ CONJECTURE AND THE R.CRANDAL CONJECTURE

Par Aeberhard Eric (09.01.2015) http://www.yatus.net/syracuse.pdf

Abstract

I propose in this paper to solve the Collatz conjecture reslting from the resolution of the extended R.Crandal conjecture also known as conjecture $qx\pm1$. With the Graph theory and the Schnirelmann density, we prove that every tree is a rooted tree whose nodes are subsets.

Résumé

Dans cet article, je propose de résoudre la conjecture de Collatz au travers de la résolution de la conjecture étendue de R.Crandal aussi appelé conjecture $qx\pm1$. Avec la théorie des graphes et la densité de Schnirelmann, on démontre que chaque arbre est une arborescence dont les noeuds sont des sous-ensembles.

Table des matières

1. Introduction

La conjecture de Syracuse ou aussi connue comme conjecture de Collatz ou conjecture $3x + 1$ est un sous-problème de la fonction générale $S(x)$ décrites ci-dessous.

$$(1) \qquad S(x) = \begin{cases} g(x) = \frac{x}{2} & si\ x\ est\ pair \\ f(x) = qx \pm 1 & si\ x\ est\ impair \end{cases}$$

La fonction $S(x)$ décrit une suite mathématique pour tout nombre entier $x \in \mathbb{N}^*$ sur lequel on applique par récurrence selon une procédure arithmétique assez simple, une fonction mathématique différente en fonction que le nombre entier soit pair ou impair.

- Si le nombre est pair "divisez le par 2"

- Si le nombre est impair "multipliez le par q et additionnez/soustrayez 1"

La conjecture de Syracuse affirme que quand $f(x) = 3x + 1$, toutes suites de nombre construites selon les deux opérations de la fonction $S(x)$ ci-dessus finissent obligatoirement avec un cycle $4 \to 2 \to 1$ et quel que soit le point de départ. Le problème posé est donc de savoir pour quelle paramètre q de $f(x)$ le domaine de définition suivant est vrai:

$$(2) \qquad S \quad : \quad \mathbb{N}^* \quad \to \quad 2^n$$

Et dans quelle mesure les arborescences expliquées ci-dessous (2.1) des fonctions $f(x)$ sont bien fondées.

2. Généralisation de l'arborescence

2.1 La fonction réciproque $S^{-1}(x)$

Le graphe ou arbre de Collatz *(Figure 1)* ([JC.L]) est connu comme un arbre mathématique infini qui se construit à partir de la fonction $S(x)$ quand $f(x) = 3x+1$ depuis la racine en partant de 1 et en remontant inversément au problème de Syracuse de proche en proche. Avec l'arbre de Collatz, chaque entier est un noeud et a un antécédant ou deux mais jamais plus.

En théorie des graphes, une arborescence est un arbre qui comporte un sommet distingué appelé racine de l'arbre. Dans le problème de Syracuse, il est important de ne pas voir cet arbre comme un unique arbre mathématique mais comme une arborescence constituée par un assemblage d'ensemble dénommé sous-ensemble de Syracuse et correspondant au noeud de l'arbre.

La forme de cette arborescence varie en fonction de la variable q de la fonction $f(x) = qx \pm 1$ (avec q un nombre impair)

Quand $q = 1$ *(Figure 3)*
Quand $q = 3$ *(Figure 4)*
Quand $q = 5$ *(Figure 5)*
...

La construction de cette arborescence se fait en parcourant le chemin inverse au problème avec la fonction réciproque des deux opérations ou fonction décrites par la fonction principale $S(x)$ soit :

(3) $$S^{-1}(x) = \begin{cases} g^{-1}(x) : \mathbb{I}_d \to \mathbb{H}_d,\ x \to 2^n x \\ f^{-1}(x) : \mathbb{H}_{d-1} \cup \mathbb{N}^* \to \mathbb{I}_d,\ x \to \frac{x \pm 1}{q} \end{cases}$$

Avec $\mathbb{H}_d$ l'ensemble des éléments de chaque degré. La fonction $g^{-1}(x)$ construit chaque degré de l'arborescence par le produit de 2^n avec l'ensemble $\mathbb{I}_d$ ([J-L.k]). Avec: $h^{-1}(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$, la fonction général $h_d^{-1}(x)$ ci-dessous définit chaque degré de l'arborescence:

(4) $$h_d^{-1}\colon\ \mathbb{H}_{d-1} \to \mathbb{H}_d, \quad \text{x} \to 2^n \tfrac{x \pm 1}{q}$$

Avec comme ensemble de départ:

(5) $$\mathbb{I}_0 = \{1\}$$

L'arborescence peut-être exprimés par la composition de fonction ci-dessous et avec $x \in \mathbb{H}_0$

(6) $$h^{-d}(x) = h_d^{-1} \circ h_{d-1}^{-1} \circ ... \circ h_3^{-1} \circ h_2^{-1} \circ h^{-1}(x)$$

2.2 Densité général de Schnirelmann

Une arborescence se compose d'un sommet dénommé racine de l'arborescence, soit $\mathbb{H}_0$ dans nos exemples de digraphes *(Figure 3, 4, 5)* et l'ensemble des éléments de l'arborescence $\mathbb{G}$ est la somme de chaque rang ou profondeur des sommets et dénommés degré de l'arborescence.

(7) $$\mathbb{G} = \sum_{d=0}^{\infty} \mathbb{H}_d = \mathbb{H}_0 + \mathbb{H}_1 + \mathbb{H}_2 + ... + \mathbb{H}_d$$

L'ensemble $\mathbb{H}_0$, racine de l'arborescence a pour densité asymptotique :

(8) $$\overline{d}(\mathbb{H}_0) = \underline{d}(\mathbb{H}_0) = d(\mathbb{H}_0) = \tfrac{1}{a}$$

Chaque degré de l'arborescence représenté par les ensembles $\mathbb{H}_d$ ont pour densité asymptotique :

(9) $$\overline{d}(\mathbb{H}_d) = \underline{d}(\mathbb{H}_d) = d(\mathbb{H}_d) = \tfrac{1}{q}$$

$\forall d \quad \overline{d}(\mathbb{H}_d) = \underline{d}(\mathbb{H}_d)$, la densité de Schnirelmann pour chaque degré de l'arborescence est définie comme :

(10) $$\sigma(\mathbb{H}_d) = \lim_{x \in \mathbb{H}_d \to \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}$$

La somme des densités de Schnirelmann de chaque degré de l'arborescence se définit comme :

(11) $$\sum_{d=0}^{\infty} \sigma(\mathbb{H}_d) = \lim_{x \in \mathbb{H}_0 \to \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} + \lim_{x \in \mathbb{H}_1 \to \infty} \frac{\mathbb{H}_1(x)}{x} + ... + \lim_{x \in \mathbb{H}_d \to \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}$$

Sachant que $d(\mathbb{H}_0) \neq d(\mathbb{H}_d)$ alors :

(12) $$\sum_{d=0}^{\infty} \sigma(\mathbb{H}_d) = \lim_{x \in \mathbb{H}_0 \to \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} + \sum_{d=1}^{\infty} \lim_{x \in \mathbb{H}_d \to \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}$$

La densité de Schnirelmann de l'ensemble $\mathbb{G}$ correspond à :

(13) $$\sigma(\mathbb{G}) = \lim_{x \in \mathbb{G} \to \infty} \frac{\mathbb{G}(x)}{x}$$

(14) $$\sigma(\mathbb{G}) = \lim_{x \in \mathbb{G} \to \infty} \frac{\sum_{d=0}^{\infty} \sigma(\mathbb{H}_d)}{x}$$

(15) $$\sigma(\mathbb{G}) = \lim_{x \in \mathbb{G} \to \infty} \frac{\lim_{x \in \mathbb{H}_0 \to \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} + \sum_{d=1}^{\infty} \lim_{x \in \mathbb{H}_d \to \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}}{x}$$

Selon (6) alors:

(16) $$\sigma(\mathbb{G}) = \sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \sum_{d=1}^{\infty} \mathbb{H}_d)$$

2.3 Une arborescence bien fondée

On dit que $(\mathbb{G}, \Re)$ est une arborescence ([ETG]) bien fondée si la relation $\Re$ induite par $S^{-1}(x)$ n'admet aucune chaîne décroissante infinie et qu'il n'existe pas de suite infinie.

Les arborescences ou digraphes structurés(*1) $\overrightarrow{\Gamma} = (\mathbb{G}; \overrightarrow{E})$ se distinguent ici par les deux fonctions de $S^{-1}(x)$ c-à-d par les noeuds de l'arborescence et les degrés de l'arborescence.

(*1) Par arborescences structurés nous indiquons ici que le rapport entre chaque forme de sous-ensemble de Syracuse est constant (voir *(Figure 3,4,5)*)

2.3.1 Les noeuds de l'arborescence

Soit (k_d) un élément $\in \mathbb{I}_d$ qui par définition est un nombre impair. Avec (4) tous les éléments de $\mathbb{H}_d$ appartiennent à des suites de forme :

(17) $$(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = k_d 2^n$$

On remarque que ce sont toutes des suites géométrique strictement décroissante et donc bien fondée car pour chaque suite $\in \mathbb{H}_d$:

(18) $$u_{n+1} > u_n$$

2.3.2 Les relations entre degrés de l'arborescence

Avec k_d un élément $\in \mathbb{I}_d$ et k_{d+1} un élément $\in \mathbb{I}_{d+1}$ alors les relations de deux éléments impairs entre deux degrés $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ sont de forme :

(19) $$\frac{(k_d 2^n \pm 1)}{q} = k_{d+1}$$

3. Etude de l'arborescence quand $q = 1$

3.1. Une densité de Schnirelmann de $\mathbb{N}^*$

Quand $q = 1$, tous les éléments de l'ensemble racine ainsi que tous les éléments de chaque degré sont solution de la fonction réciproque $f(x) = x \pm 1$

Avec (8)

$$\lim_{x \in \mathbb{H}_0 \to \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} = \frac{1}{a} = \frac{1}{1} = 1 \tag{20}$$

Avec (9)

$$\lim_{x \in \mathbb{H}_d \to \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x} = \frac{1}{q} = \frac{1}{1} = 1 \tag{21}$$

Soit avec (16) et (6)

$$\sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1) = 1 \tag{22}$$

$$\sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2) = 1 \tag{23}$$

$$\sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2 \oplus \mathbb{H}_3 \oplus ...) = 1 \tag{24}$$

$$\sigma(\mathbb{G}) = \sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \sum_{d=1}^{\infty} \mathbb{H}_d) = 1 \tag{25}$$

Selon le théorème de Schnirelmann alors :

$$\text{Si } \sigma(\mathbb{G}) = 1 \text{ alors } (\mathbb{H}_0 \oplus \textstyle\sum_{d=1}^{\infty} \mathbb{H}_d) = \mathbb{N}^* \tag{26}$$

3.2 Une arborescence bien fondée

3.2.1 Les noeuds de l'arborescence

Selon (18) tous les noeuds sont bien fondés.

3.2.2 Les relations entre degrés de l'arborescence

Selon (19), la fonction $f(x) = x \pm 1$, a pour relation entre deux éléments k_d et k_{d+1}

$$\frac{(2^n k_d \pm 1)}{1} = k_{d+1} \tag{27}$$

Soit :

$$2^n k_d \pm 1 = k_{d+1} \tag{28}$$

3.3. $f(x) = x - 1$

Quand n $\to$ 1

$$2k_d + 1 = k_{d+1} \tag{29}$$

Il resulte $\forall$ n

$$k_{d+1} > k_d \tag{30}$$

1. Toutes les branches de l'arbre composée par les suites U_n qui composent les éléments de chaque degré $\mathbb{H}_d$ sont bien fondés (18)
2. L'arborescence crée par toutes les relations entre deux éléments k_d et k_{d+1}, c-à-d toutes les relations entre $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ reliant chaque degré sont bien fondées (30)
3. L'arborescence recouvre l'ensemble $\mathbb{N}^*$ (26)

> **Conclusion :** Ces trois points suffisent à conclure que la conjecture pour $f(x) = x - 1$ est vrai car le domaine de définition : $S^{-1} : 2^n \to \mathbb{N}^*$ est vrai

3.4. $f(x) = x + 1$

Quand n $\to$ 1

$$2k_d - 1 = k_{d+1} \tag{31}$$

Il resulte $\forall$ n

$$k_{d+1} \geq k_d \tag{32}$$

En effet, car quand $k_d = 1$ alors $k_{d+1} = 1$
Avec : $f(1) : \mathbb{H}_0 \to \mathbb{H}_0$. Il existe donc une boucle; toutefois l'ensemble de départ et d'arrivée de $f(1) = x + 1$ correspond au même ensemble $\mathbb{H}_0$ c-à-d la racine de l'arborescence.

1. Toutes les branches de l'arbre composée par les suites (u_n) qui composent les éléments de chaque degré $\mathbb{H}_d$ sont bien fondés (18)
2. L'arborescence créé par toute les relations entre deux éléments k_d et k_{d+1} ; c-à-d toutes les relations entre $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ reliant chaque degré sont bien fondé (32) car la seule boucle est incluse dans l'ensemble $\mathbb{H}_0$
3. L'arborescence recouvre l'ensemble $\mathbb{N}^*$ (26)

> **Conclusion :** Ces trois points suffisent à conclure que la conjecture pour $f(x) = x + 1$ est vrai car le domaine de définition : $S^{-1} : 2^n \to \mathbb{N}^*$ est vrai

4. Etude de l'arborescence quand $q = 3$

4.1. Une densité de Schnirelmann $\to \mathbb{N}^*$

Quand $q = 3$, l'ensemble racine $\mathbb{H}_0$ admet un élément sur deux comme solution de la fonction réciproque $f(x) = 3x \pm 1$ par contre pour les ensembles composés des éléments de chaque degré $\mathbb{H}_d$ n'admet qu'un élément sur trois.

Avec (8) la densité de Schnirelmann pour $\mathbb{H}_0$:

$$\sigma(\mathbb{H}_0) = \lim_{x\in\mathbb{H}_0\to\infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} = \frac{1}{2} \tag{33}$$

Avec (9) la densité de Schnirelmann pour chaque degré de l'arborescence $\mathbb{H}_d$:

$$\sigma(\mathbb{H}_d) = \lim_{x\in\mathbb{H}_d\to\infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x} = \frac{1}{3} \tag{34}$$

Soit avec (16) et (6)

$$\sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \tag{35}$$

$$\sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \tag{36}$$

$$\sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2 \oplus \mathbb{H}_3 \oplus ...) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... \tag{37}$$

$$\sigma(\mathbb{G}) = \sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \sum_{d=1}^{\infty} \mathbb{H}_d) \to 1 \tag{38}$$

Selon le théorème de Schnirelamnn :

$$\text{Si } \sigma(\mathbb{G}) \to 1 \text{ alors } (\mathbb{H}_0 \oplus \textstyle\sum_{d=1}^{\infty} \mathbb{H}_d) \to \mathbb{N}^* \tag{39}$$

4.2. Une arborescence bien fondée

4.2.1. Les noeuds de l'arborescence

Selon (18) tous les noeud sont bien fondé.

4.2.2. Les relations entre degrés de l'arborescence

Pour la fonction $f(x) = 3x \pm 1$, la relation entre deux éléments (k_d) et k_{d+1} est :

$$\frac{2^n k_d \pm 1}{3} = k_{d+1} \tag{40}$$

$$2^n k_d \pm 1 = 3k_{d+1} \tag{41}$$

Quand n $\to$ 2 les suites incluses entre deux degrés $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ sont de forme:

$$4k_d \pm 1 = 3k_{d+1} \tag{42}$$

$$k_d < k_{d+1} \tag{43}$$

Toutefois quand $n = 1$ totes les suites incluses entre deux degrés $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ sont de forme:

(44) $$2k_d \pm 1 = 3k_{d+1}$$

(45) $$k_d \geq k_{d+1}$$

Il en resulte que toute les relations entre deux éléments k_d et k_{d+1} c-à-d entre $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ sont bien fondée tant que $n \geq 2$ car $k_d < k_{d+1}$. Il ne reste donc plus qu'a étudier les suites de relations entre deux éléments k_d et k_{d+1} quand $n = 1$

(46) $$k_{d+1} = \frac{2k_d \pm 1}{3}$$

(47) $$k_{d+2} = \frac{4k_d \pm 5}{9}$$

(48) $$k_{d+3} = \frac{8k_d \pm 19}{27}$$

(49) $$k_{d+4} = \frac{16k_d \pm 65}{81}$$

...

Soit$(b_n) = 3^n - 2^n$ ainsi que $f^{k_n} \circ f^k(x) = \frac{2^{n+1 \pm (b_{n+1})}}{3^{n+1}}$ Ainsi toutes les relations entre deux degrés $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ sachant que $k_d > k_{d+1}$ peuvent se représenter selon l'équations ci-dessous :

(50) $$k_d = \frac{3^n k_{d+n} \pm (b_n)}{2^n}$$

4.3. $f(x) = 3x - 1$

S'il existe un ou plusieurs cycles alors elle/s existe/nt à partir de la racine d'un ensemble sur un élément pair d'un élément de la même arborescence, soit :

(51) $$3k_d - 1 = 2^m k_{d+n}$$

Et avec (50)

(52) $$k_d = \frac{3^n k_{d+n} - 3^n + 2^n}{2^n}$$

En mettant en relation les deux équations précédentes (51) et (52), on obtient :

(53) $$3\frac{3^n k_{d+n} - 3^n + 2^n}{2^n} - 1 = 2^m k_{d+n}$$

(m) correspond au nombre de saut dans un ensemble et (n) correspond au nombre saut/degré d'un ensemble/arborescence à un autre :

(54) $$\frac{33^n k_{d+n} - 33^n + 32^n}{2^n} - \frac{2^n}{2^n} = 2^m k_{d+n}$$

...

(55) $$k_{d+n} = \frac{2^{n+1} - 3^{n+1}}{2^{n+m} - 3^{n+1}}$$

Sachant que $a^n - b^n$ est divisible par $(a-b)$ pour toutes les puissance n impaires et par $(a+b)$ pour les puissances n paires alors :

$$k_d = 1 \text{ et } k_d = 5 \tag{56}$$

Soit comme cycle quand $k_d = 1 : 1 \to 2$
et quand $k_d = 5 : 5 \to 14 \to 7 \to 20 \to 10$

Nous avons donc deux arborescences distinct car il existe deux cycles, la première avec comme ensemble de départ et d'arrivée l'ensemble $\mathbb{H}_0$ car $f(1) : \mathbb{H}_0 \to \mathbb{H}_0$ c-à-d la racine de l'arborescence et la deuxième avec $f(5) : \mathbb{H}_d \to \mathbb{H}_{d+1}$ comme ensemble de départ un sous-ensemble de Syracuse $\mathbb{H}_d : x \in \mathbb{H}_d | \exists n \in \mathbb{N}^*(x = 52^n)$ et comme ensemble d'arrivée $\mathbb{H}_{d+1} : x \in \mathbb{H}_d | \exists n \in \mathbb{N}^*(x = 72^n)$

1. Toutes les branches/noeuds de l'arborescence composée par les suites (u_n) qui composent les éléments de chaque degré $\mathbb{H}_d$ sont bien fondés (18)
2. L'arborescence créer par toute les relation entre deux éléments k_d et k_{d+1} ; c-à-d toutes les relations entre $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ reliant chaque degré ne sont pas bien fondé (56) car il existe plusieurs boucles.

> **Conclusion :** Le points n°2 suffit à conclure que la conjecture pour $f(x) = 3x - 1$ est fausse car il existe plusieurs cycles.

4.4. $f(x) = 3x + 1$ (Conjecture de Syracuse)

Remarque : S'il existe un ou plusieurs cycles alors elles existent à partir de la racine d'un ensemble sur un élément pair d'un élément de la même arborescence, soit:

$$3k_d + 1 = 2^m k_{d+n} \tag{57}$$

Et avec (50)

$$k_d = \frac{3^n k_{d+n} + 3^n - 2^n}{2^n} \tag{58}$$

En mettant en relation les deux équation précédente (57) et (58), on obtient :

$$3\frac{3^n k_{d+n} + 3^n - 2^n}{2^n} + 1 = 2^m k_{d+n} \tag{59}$$

(m) correspond au nombre de saut dans un ensemble et (n) correspond au nombre saut/degré d'un ensemble/arborescence à un autre :

$$\frac{33^n k_{d+n} + 33^n - 32^n}{2^n} + \frac{2^n}{2^n} = 2^m k_{d+n} \tag{60}$$

$$\dots$$

$$k_{d+n} = \frac{3^{n+1} + 2^{n+1}}{2^{n+m} - 3^{n+1}} \tag{61}$$

Sachant que $a^n + b^n$ est divisible seulement par $(a - b)$ pour toutes les puissances n impaires uniquement alors :

(62) $$k_d = 1$$

Quand $k_d = 1$ nous avons comme boucle/cycle : $4 \to 2 \to 1$
Il existe donc un seul cycle avec comme ensemble de départ et d'arrivée l'ensemble $\mathbb{H}_0$ car $f(1) : \mathbb{H}_o \to \mathbb{H}_o$ c-à-d la racine de l'arborescence.

1. Toutes les branches/noeuds de l'arborescence composée par les suites (u_n) qui composent les éléments de chaque degré $\mathbb{H}_d$ sont bien fondés (18)
2. L'arborescence crée par toutes les relations entre deux éléments k_d et k_{d+1} ; c-à-d toutes les relations entre $\mathbb{H}_d$ et $\mathbb{H}_{d+1}$ reliant chaque degré sont pas bien fondé (62) car il n'existe qu'une seule boucle qui est incluse dans l'ensemble $\mathbb{H}_0$
3. L'arborescence recouvre l'ensemble $\mathbb{N}^*$ (40)

> **Conclusion :**Ces trois point suffisent à conclure que la conjecture pour $f(x) = 3x + 1$ est vrai car le domaine de définition : $S^{-1} : 2^n \to \mathbb{N}^*$ est vérifié

5. Etude de l'arborescence quand $q = 5$

5.1. Une densité de Schnirelmann $\rightarrow \frac{1}{2}$

Quand $q = 5$, l'ensemble racine admet un élément sur quatre comme solutions de la fonction réciproque $f(x) = 5x \pm 1$ par contre pour l'ensemble des éléments de chaque degré n'admet qu'un élément sur cinq.

Avec (8) la densité de Schnirelmann pour $\mathbb{H}_0$

$$\sigma(\mathbb{H}_0) = \lim_{x \in \mathbb{H}_0 \to \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} = \frac{1}{4} \tag{63}$$

Avec (9) la densité de Schnirelmann pour chaque degré de l'arborescence $\mathbb{H}_d$

$$\sigma(\mathbb{H}_d) = \lim_{x \in \mathbb{H}_d \to \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x} = \frac{1}{5} \tag{64}$$

Soit avec (16) et (6)

$$\sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \tag{65}$$

$$\sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} \tag{66}$$

$$\sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_2 \oplus \mathbb{H}_3 \oplus ...) = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{125} + ... \tag{67}$$

$$\sigma(\mathbb{G}) = \sigma(\mathbb{H}_0 \oplus \sum_{d=1}^{\infty} \mathbb{H}_d) \rightarrow \frac{1}{2} \tag{68}$$

Selon le théorème de Schnirelmann alors :

$$Si\ \sigma(\mathbb{G}) \rightarrow \frac{1}{2}\ alors\ (\mathbb{H}_0 \oplus \sum_{d=1}^{\infty} \mathbb{H}_d) \neq \mathbb{N}^* \tag{69}$$

> **Conclusion :** L'arborescence ne recouvre pas l'ensemble $\mathbb{N}^*$, il existe donc d'autres suites/cycle qui ne termine pas en 1 et il n'y a donc pas de sens à étudier le bien fondé de l'arborescence.

3.1.2 Conjecture de R.Crandal $(q \to \infty)$

La conjecture de R.Crandal revient à vérifier l'évolution de la densité $\sigma(\mathbb{G})$ de chaque arborescence quand $(q \to \infty)$.

Quand $q = 1$

L'ensemble $\mathbb{H}_0$ a pour densité asymptotique :

(70)
$$\overline{d}(\mathbb{H}_0) = \underline{d}(\mathbb{H}_0) = \frac{1}{a} = 1$$

Les ensembles $\mathbb{H}_d$ ont pour densité asymptotique :

(71)
$$\overline{d}(\mathbb{H}_d) = \underline{d}(\mathbb{H}_d) = \frac{1}{q} = 1$$

Nous avons donc :

(72)
$$\lim_{x \in \mathbb{H}_0 \to \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} = \lim_{x \in \mathbb{H}_d \to \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}$$

Avec (7) et sachant que quand $x \in \mathbb{H}_d \to \infty$ alors $x \in \mathbb{G} \to \infty$

(73)
$$\sigma(\mathbb{G}) = \lim_{x \in \mathbb{G} \to \infty} \frac{\sum_{d=0}^{\infty} \lim_{x \in \mathbb{H}_d \to \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}}{x} = 1$$

Quand $q > 1$

L'ensemble $\mathbb{H}_0$ a pour densité asymptotique :

(74)
$$\overline{d}(\mathbb{H}_0) = \underline{d}(\mathbb{H}_0) = \frac{1}{a}$$

Les ensembles $\mathbb{H}_d$ ont pour densité asymptotique :

(75)
$$\overline{d}(\mathbb{H}_d) = \underline{d}(\mathbb{H}_d) = \frac{1}{q}$$

Nous avons donc :

(76)
$$\lim_{x \in \mathbb{H}_0 \to \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} \neq \lim_{x \in \mathbb{H}_d \to \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}$$

Avec (7) et sachant que quand $x \in \mathbb{H}_d \to \infty$ alors $x \in \mathbb{G} \to \infty$

(77)
$$\sigma(\mathbb{G}) = \lim_{x \in \mathbb{G} \to \infty} \frac{lim_{x \in \mathbb{H}_0 \to \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x} + \sum_{d=1}^{\infty} \lim_{x \in \mathbb{H}_d \to \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}}{x}$$

(78)
$$\sigma(\mathbb{G}) = \lim_{x \in \mathbb{G} \to \infty} \frac{lim_{x \in \mathbb{H}_0 \to \infty} \frac{\mathbb{H}_0(x)}{x}}{x} + \lim_{x \in \mathbb{G} \to \infty} \frac{\sum_{d=1}^{\infty} \lim_{x \in \mathbb{H}_d \to \infty} \frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}}{x}$$

Soit :

$$\lim_{x\in\mathbb{G}\to\infty}\frac{\lim_{x\in\mathbb{H}_0\to\infty}\frac{\mathbb{H}_0(x)}{x}}{x}=\frac{1}{a} \tag{79}$$

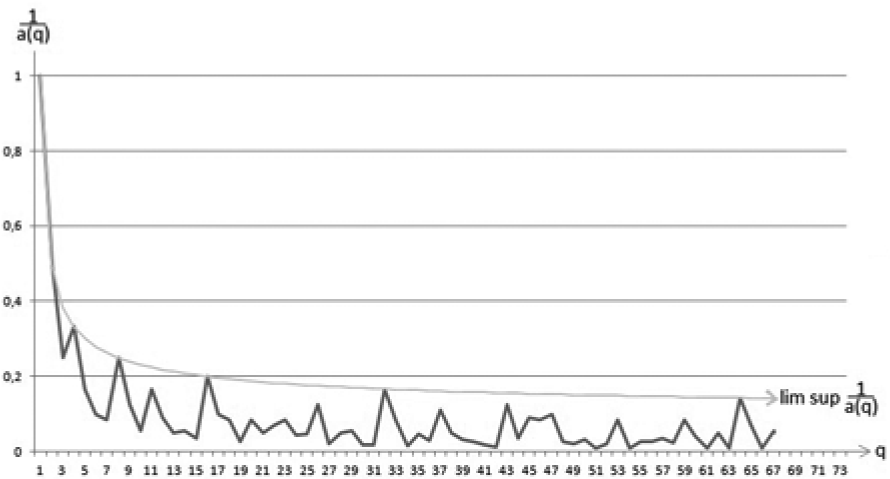
et

$$\lim_{x\in\mathbb{G}\to\infty}\frac{\sum_{d=1}^{\infty}\lim_{x\in\mathbb{H}_d\to\infty}\frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}}{x}=\sum_{d=1}^{\infty}\left(\lim_{x\in\mathbb{H}_d\to\infty}\frac{\mathbb{H}_d(x)}{x}\right)^d=\sum_{d=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^d \tag{80}$$

Au final avec (79) et (80):

$$\sigma(\mathbb{G})=\frac{1}{a}+\sum_{d=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^d \tag{81}$$

Ci-dessous le graphe de $a(q)$ (Figure 2) ([OEIS]) tel que $2n+1$ divise 2^m-1



La densité de chaque arborescence c-à-d $\sigma(\mathbb{G})\to 0$ car quand $q\to 0$ nous savons que $q-1\geq a(q)\geq\frac{\log(2)}{\log(q+1)}$ ([MS])

$$\lim_{q\to\infty}\left(\frac{1}{a}\right)\cong\limsup_{q\to\infty}\left(\frac{1}{a(q)}\right)=\lim_{q\to\infty}\frac{\log(2)}{\log(q+1)}\to 0 \tag{82}$$

Et

$$\lim_{q\to\infty}\left(\sum_{d=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^d\right)\to 0 \tag{83}$$

Donc :

$$\lim_{q\to\infty}\left[\frac{1}{a}+\sum_{d=1}^{\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^d\right]\to 0 \tag{84}$$

Sachant alors que quand $q > 3$:

(85)
$$\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$$

Et que :

(86)
$$\sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^{d} < \frac{1}{2}$$

Au final $\forall$ q quand $q > 3$:

(87)
$$\sigma(\mathbb{G}) = \frac{1}{a} + \sum_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^{d} < 1$$

> **Conclusion :** La conjecture de R.Crandal est donc vérifiée car aucune arborescence ne recouvre $\mathbb{N}^*$ quand $q > 3$

REFERENCE

[$JC.L$] Jeffrey C. Lagarias. The Ultimate Challenge: The 3x+1 Problem. (2010) 31-33
[$J - L.k$] Jean-Louis Krivine. théorie des ensembles. (2007)
[ETG] Alain Bretto, Alain Faisant, François Hennecart. Elément de théorie des graphes. (2012)
[$OEIS$] oeis.org/A002326 [MS] Marcus de Sautoy. Le mystère des nombres. (2010) 175-179

Figure 1: L'arbre de Collatz [The 3x+1 Problem] ([$JC.L$])

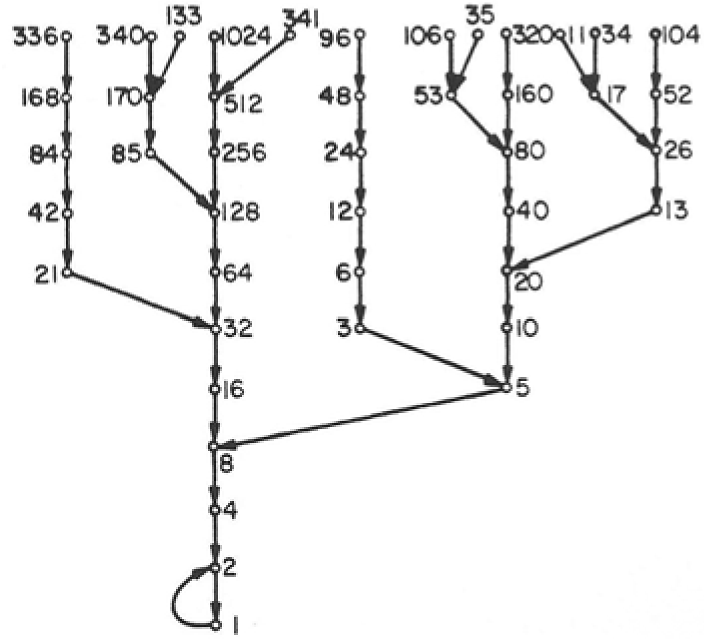


Figure 2: Multiplicative order of 2 mod 2n+1 ([OEIS])

n	q	a(q)	n	q	a(q)	n	q	a(q)	n	q	a(q)	n	q	a(q)
0	1	1	15	31	5	30	61	60	45	91	12	60	121	110
1	3	2	16	33	10	31	63	6	46	93	10	61	123	20
2	5	4	17	35	12	32	65	12	47	95	36	62	125	100
3	7	3	18	37	36	33	67	66	48	97	48	63	127	7
4	9	6	19	39	12	34	69	22	49	99	30	64	129	14
5	11	10	20	41	20	35	71	35	50	101	100	65	131	130
6	13	12	21	43	14	36	73	9	51	103	51	66	133	18
7	15	4	22	45	12	37	75	20	52	105	12	67	135	36
8	17	8	23	47	23	38	77	30	53	107	106	68	137	68
9	19	18	24	49	21	39	79	39	54	109	36	69	139	138
10	21	6	25	51	8	40	81	54	55	111	36	70	141	46
11	23	11	26	53	52	41	83	82	56	113	28	71	143	60
12	25	20	27	55	20	42	85	8	57	115	44	72	145	28
13	27	18	28	57	18	43	87	28	58	117	12	73	147	42
14	29	28	29	59	58	44	89	11	59	119	24	74	149	148

Figure 3: L'arborescence quand $q = 1$ et $f(x) = x - 1$

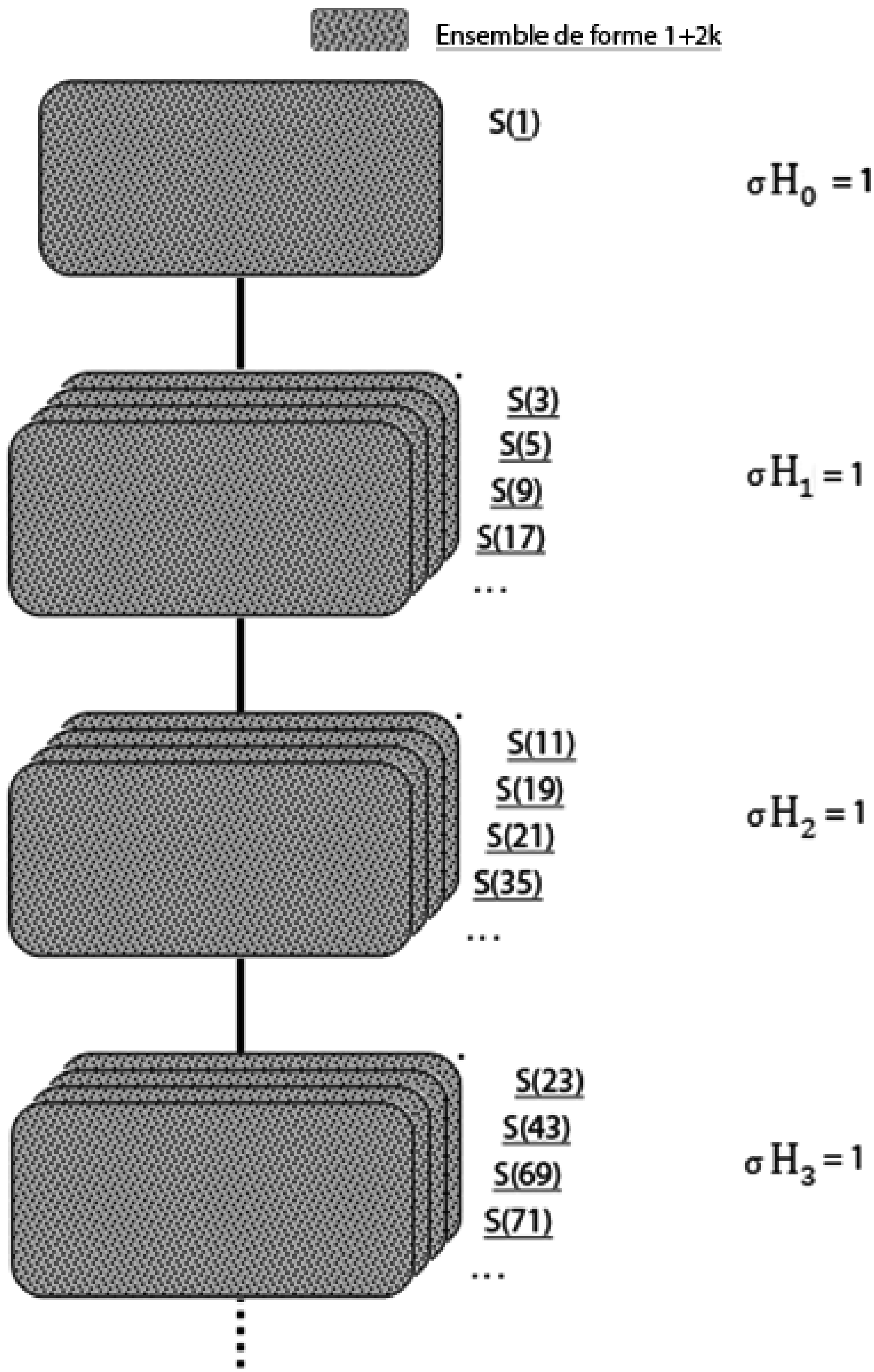


Figure 4: L'arborescence quand $q = 3$ et $f(x) = 3x + 1$

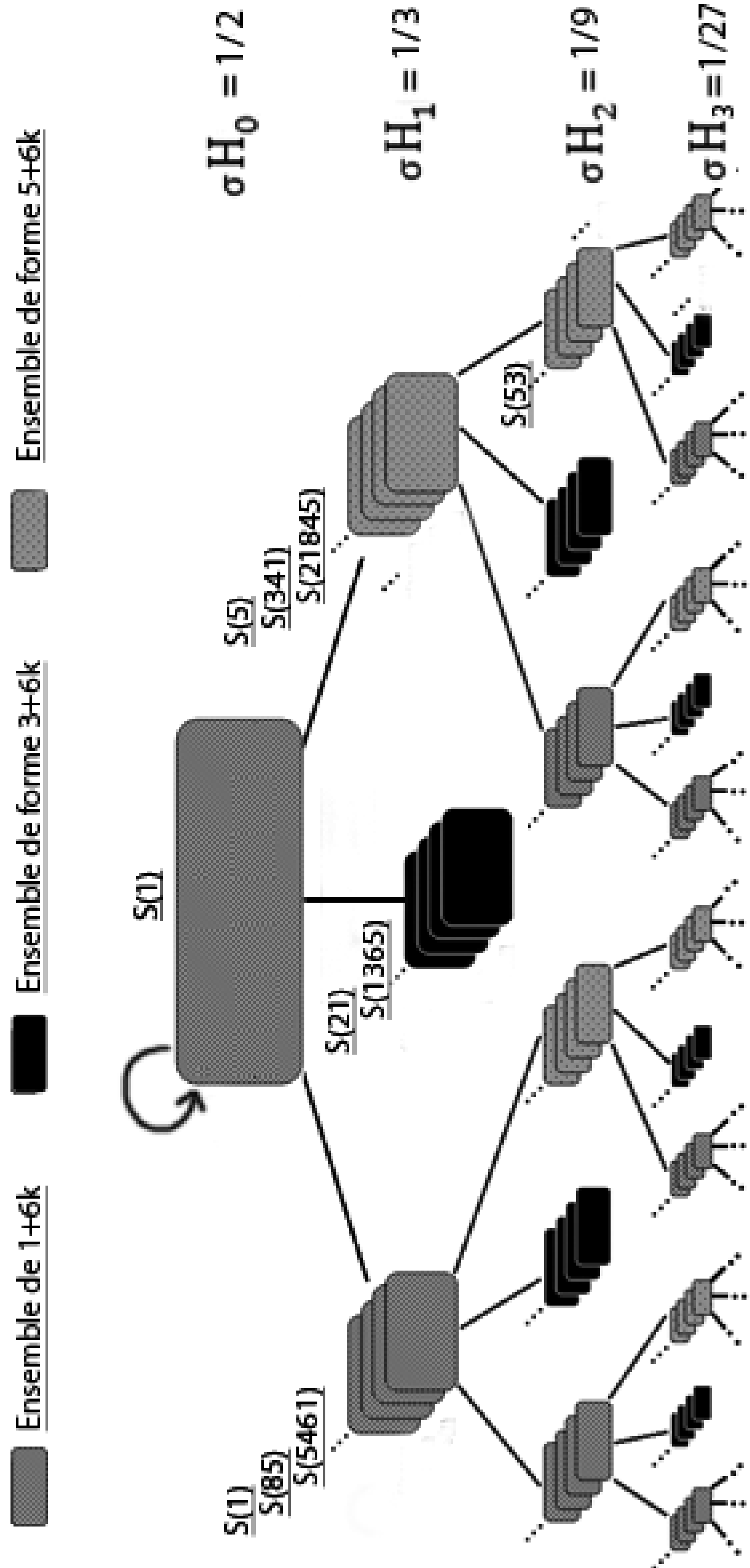


Figure 5: L'arborescence quand $q = 5$ et $f(x) = 5x + 1$