Question 1

On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(\cos^2 x)}{x^2 e^{\sin x}}$ au voisinage de 0. Dans les développements limités (DL) qui suivent, $\varepsilon(x)$ représente une fonction qui a pour limite 0 en 0 et qui n'est pas nécessairement la même à chaque item.

(A) La fonction f est définie sur $]-\pi,\pi[$.

(B) La fonction f est périodique de période 2π.

(C) Un développement limité de $\cos^2 x$ à l'ordre 5 en 0 est $1 - x^2 + \dfrac{x^4}{12} + x^5\varepsilon(x)$.

(D) Pour avoir un DL de $\ln(\cos^2 x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 5, il suffit d'un DL de $\cos^2 x$ au voisinage de 0 à l'ordre 5 et un DL de $\ln(1+u)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2.

(E) Un DL de $\ln(\cos^2 x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 5 est $-x^2 - \dfrac{x^4}{6} + x^5\varepsilon(x)$.

Question 2

(A) Un DL de $e^{\sin x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 est $1 - x + \dfrac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$.

(B) Un DL de $\dfrac{1}{e^{\sin x}}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0 est $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^3 + x^3\varepsilon(x)$.

(C) Un DL de f à l'ordre 3 au voisinage de 0 est $-1 + x - \dfrac{2x^2}{3} + \dfrac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$.

(D) La fonction f est prolongeable par continuité en $x = 0$.

(E) Au voisinage de $x = 0$, la courbe représentative de f reste au-dessus de la parabole d'équation $y = -1 + x - \dfrac{2x^2}{3}$.

Question 3

On veut calculer l'intégrale $I_6 = \int_0^{\pi/2} \cos^6(x)dx$. On exprimera d'abord $\cos^2(x), \cos^3(x), \cos^6(x)$ en fonction des $\cos(nx)$ pour n=1 à 6, en utilisant les formules d'addition du cosinus.

(A) On a $\cos(2x) = 2\cos^2(x) + 1$.

(B) On a $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

(C) On a $\cos^3(x) = \dfrac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos(x))$.

(D) On a $\cos^6(x) = \dfrac{1}{32}\left(\cos(6x) + 6\cos(4x) + 12\cos(2x) + 10\right)$.

(E) On a $I_6 = \dfrac{5\pi}{32}$.

Question 4

Soient les intégrales $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$ et $J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{n-2}(x)\sin^2(x)dx$. Exprimer J_n en fonction de ,I_n et I_{n-2}, puis intégrer par parties J_n (on prendra $dv = \cos^{n-2}(x)\sin(x)dx$).
En déduire une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}. Calculer alors I_0 et I_{10}.

(A) $I_n = J_n + I_{n-2}$.

(B) On a $v = \frac{1}{n-1}\cos^{n-1} x$.

(C) En intégrant par parties J_n on trouve $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.

(D) $I_{2k} = \frac{\pi}{2}\frac{1.3.5...(2k-1)}{2.4.6...(2k)}$.

(E) On a $I_{10} = \frac{63\pi}{256}$.

Question 5

Pour un entier naturel non nul n, on considère le polynôme P_n défini par $\mathrm{P}_n(x) = (1+ix)^n - (1-ix)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. On résoudra dans $\mathbb{C}$ l'équation $X^n = 1$ avec $X = \frac{1+ix}{1-ix}$, on en déduira les racines (réelles ou complexes) de P_n selon la parité de *n*.

(A) Le degré de P_n est toujours égal à *n*.

(B) L'équation $\mathrm{P}_n(x) = 0$ a les mêmes solutions que l'équation $\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)^n = 1$.

(C) Si *n* est pair, P_n admet *n-1* racines distinctes de la forme $x_k = \frac{1-e^{\frac{2\pi ik}{n}}}{i(1+e^{\frac{2\pi ik}{n}})}$ avec *k* entier et $k \in [\![0, n-1]\!]$ et $k \neq n/2$.

(D) Si *n* est impair, P_n admet *n* racines distinctes de la forme $x_k = i\frac{1+e^{\frac{2\pi ik}{n}}}{1-e^{\frac{2\pi ik}{n}}}$ avec *k* entier et $k \in [\![0, n-1]\!]$.

(E) Si *n* est impair, P_n admet *n* racines distinctes de la forme $x_k = \tan\frac{k\pi}{n}$ avec *k* entier et $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Question 6

0 est racine de P_n . Les racines non nulles sont celles de $Q_m(x)=\sum_{k=1}^{m} a_k x^{k-1}$, avec $m=\deg(P_n)$.

On rappelle que la somme de ces racines est $S=-\frac{a_{m-1}}{a_m}$, leur produit est $P=(-1)^{m-1}\frac{a_1}{a_m}$. On se propose de calculer le produit des racines non nulles selon la parité de *n* (il faut déterminer *m*).

(A) On a $\forall k, a_k = C_n^k i^k (1-(-1)^k)$.

(B) On a toujours S=2*n*.

(C) On a toujours $a_1 = 2i$.

(D) Si *n* est pair avec *n=2p*, $m=n-1=2p-1$ et $P=(-1)^{p-1}n$.

(E) Si *n* est impair avec $n=2p+1$, $\prod_{k=1}^{n-1} \tan\frac{k\pi}{n} = (-1)^p n$.

Question 7

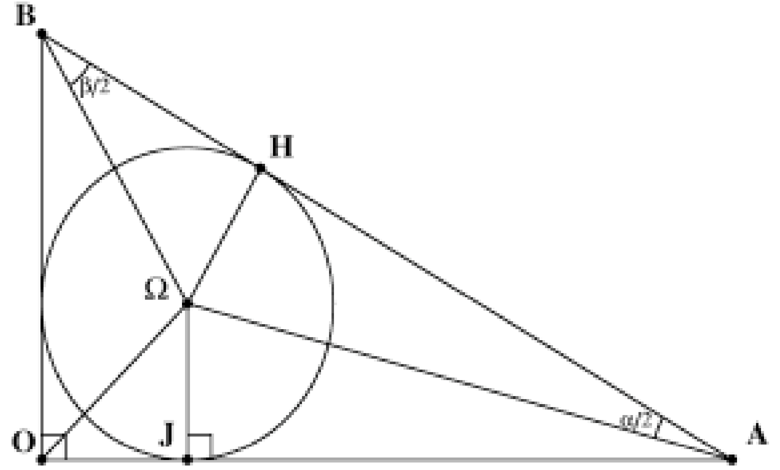

fig.1

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère le triangle (OAB), rectangle en O, d'angles α,β en A et B, avec $\overrightarrow{OA}=(\cos(\alpha),0)$ et $\overrightarrow{OB}=(0,\sin(\alpha))$. On note Ω le centre du cercle inscrit dans le triangle (OAB) , J et H les projections orthogonales de Ω sur (OA) et (AB). On a $\Omega J=\Omega H=r$ (rayon du cercle inscrit), les angles $(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{A\Omega})=\frac{\alpha}{2}$ et $(\overrightarrow{B\Omega},\overrightarrow{BH})=\frac{\beta}{2}$. (voir fig.1)

On calculera, en fonction de $u=\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, les longueurs $AB, d=AH, BH, v=\tan\left(\frac{\beta}{2}\right), r$.

On rappelle que $\cos(\alpha)=\frac{1-u^2}{1+u^2}, \sin(\alpha)=\frac{2u}{1+u^2}$.

(A) On a $d=AH=r.u$.

(B) On a $r=(1-d)v$.

(C) On a $v=\frac{1-u}{1+u}$.

(D) On a $d=\frac{1-u}{1+u^2}$.

(E) On a $r=\frac{u(1-u)}{1+u^2}$.

Question 8

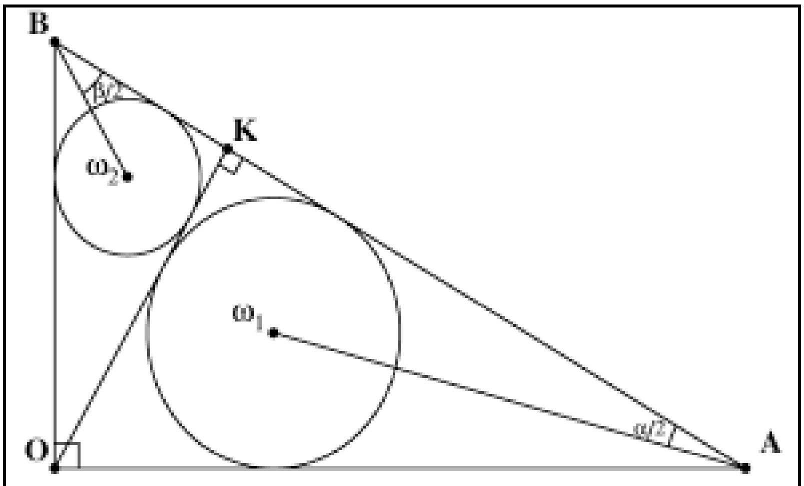

fig.2

On introduit le point K, projection orthogonale de O sur (AB). On note (ω_1, r_1) et (ω_2, r_2) les centres et rayons des cercles inscrits dans les triangles (OKA) et (OKB). On calculera, en fonction de $u = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, les quantités OK, r_1, r_2, et $S = r + r_1 + r_2$. (voir fig.2)

(A) Les triangles (AOB), (AKO), (BKO) sont semblables.
(B) Pour un triangle T semblable à (AOB), d'hypothénuse *h*, le rayon du cercle inscrit est $h.r$.
(C) On a $r_1 = r\sin(\alpha)$.
(D) On a $S = r.\frac{1+u}{1+u^2}$.
(E) On a $S = OK$.

Un examen comporte 10 questions auxquelles il faut répondre par "vrai" ou "faux". Si la réponse à une question est juste, elle rapporte 1 point, et si elle ne l'est pas, elle fait perdre 1 point.
Les candidats répondent tous aux 10 questions. Pour la note (sur 10) on calcule $S = N_J - (10 - N_J) = 2N_J - 10$, où N_J est le nombre de réponses justes.
La note est fixée ainsi : $N = S$ si S≥0, $N = 0$ si $S < 0$.
L'ensemble des candidats se décompose en deux catégories, les candidats sérieux (événement S) et les non sérieux (événement $\overline{\mathrm{S}}$) . Si on tire "au hasard" un des candidats, on considère que $P(\mathrm{S}) = P(\overline{\mathrm{S}}) = \frac{1}{2}$. Si un candidat est sérieux, la probabilité qu'il donne une réponse juste à une question est $\frac{3}{4}$, s'il n'est pas sérieux, la probabilité qu'il donne une réponse juste à une question est $\frac{1}{2}$. Dans tous les cas, les réponses aux différentes questions sont indépendantes.
On rappelle que la probabilité conditionnelle de A sachant B peut s'écrire $\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A|B)$

Question 9

(A) Les notes possibles sont les entiers de 0 à 10.
(B) Si un candidat n'est pas sérieux, la probabilité qu'il donne 9 bonnes réponses et une fausse, et donc qu'il obtienne 8 sur 10 (soit 9-1) est $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{S}}}(N=8) = \mathrm{P}\left(\{N=8\}\middle|\overline{\mathrm{S}}\right) = \frac{10}{2^{10}}$.
(C) Si un candidat n'est pas sérieux, la probabilité qu'il donne 10 réponses justes et obtienne donc 10 sur 10 est $\mathrm{P}_{\overline{\mathrm{S}}}(N=10) = \mathrm{P}\left(\{N=10\}\middle|\overline{\mathrm{S}}\right) = \frac{1}{20}$.
(D) Si un candidat n'est pas sérieux, la probabilité qu'il obtienne 0 sur 10 est $P\left(\{N=0\}\middle|\overline{\mathrm{S}}\right) = \frac{1}{2}$.
(E) Si un candidat n'est pas sérieux, la probabilité qu'il obtienne 1 sur 10 est $P\left(\{N=1\}\middle|\overline{\mathrm{S}}\right) = 0$.

Question 10

(A) Il est impossible qu'un candidat sérieux ait 0.

(B) Si un candidat est sérieux, la probabilité qu'il obtienne 10 sur 10 est $\mathrm{P_S}(N=10)=\mathrm{P}(\{N=10\}|\mathrm{S})=\dfrac{3^{10}}{4^{10}}$.

(C) Pour un candidat dont on ne sait pas s'il est sérieux ou non, la probabilité d'avoir 10 sur 10 est $\mathrm{P}(N=10)=\dfrac{3^{10}+2^{10}}{2\times 4^{10}}$.

(D) Sachant qu'un candidat a eu 10 sur 10, la probabilité qu'il soit sérieux est $\mathrm{P}_{\{N=10\}}(S)=\mathrm{P}(S|\{N=10\})=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}}$.

(E) La probabilité qu'un élève obtienne la note 10 est $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{10}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$.

Les questions 11 et 12 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie électrique.

Les questions 13 et 14 ne doivent être traitées que par les candidats des options génie informatique et génie civil.

Les questions 15 et 16 ne doivent être traitées que par les candidats de l'option génie mécanique.

Les questions qui ne correspondent pas à la section du candidat ne seront pas corrigées.

Seulement pour les candidats de l'option génie électrique.

Soit $f(x)=|\sin x|$, une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Le but de cet exercice est d'exprimer f sous la forme d'une série de Fourier.

On note $sf(x)=a_0+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\cos(2kx)+b_k(f)\sin(2kx)\right)$ la série de Fourier de f.

Question 11

(Seulement pour les candidats de l'option génie électrique.)

(A) La fonction f est π-périodique et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(B) La série de Fourier de f converge vers f sur $\mathbb{R}$.

(C) La fonction f est impaire.

(D) Les coefficients b_k sont tous nuls.

(E) $\forall k\in\mathbb{N}$, $a_k=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos(kx)\,dx$.

Question 12

(Seulement pour les candidats de l'option génie électrique .)

(A) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $2\sin x \cos(2kx) = \sin\left[(2k+1)x\right] + \sin\left[(2k-1)x\right]$.

(B) $a_0 = \dfrac{4}{\pi}$.

(C) $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_k = \dfrac{4}{\pi(4k^2-1)}$.

(D) $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$.

(E) $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}$.

Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil

Question 13

(Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil)

Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On se propose de réduire cette matrice, puis d'utiliser cette réduction pour étudier une suite récurrente.

(A) Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est $P_{\mathbf{A}}(x) = -x^3 + x^2 + x + 1$.

(B) $\mathbf{A}$ admet une valeur propre entière et deux valeurs propres complexes conjuguées.

(C) $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

(D) $\mathbf{A}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

(E) On peut diagonaliser $\mathbf{A}$ avec une matrice de passage $\mathbf{P}$ de la forme $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & c & d \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans lequel *a, b, c,* et *d* sont des nombres complexes.

Question 14

(Seulement pour les candidats des options génie informatique et génie civil)

On considère la suite définie par récurrence par : $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = u_{n+2} - u_{n+1} + u_n$. En notant $U_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, on remarquera que cela peut s'écrire $U_{n+1} = \mathbf{A}U_n$ avec la matrice $\mathbf{A}$ de la question 13.

(A) On a $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ matrice de l'identité).

(B) On a $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^{-1}$.

(C) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \mathbf{A}^n U_0$.

(D) $u_{1000} = 0$.

(E) $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.

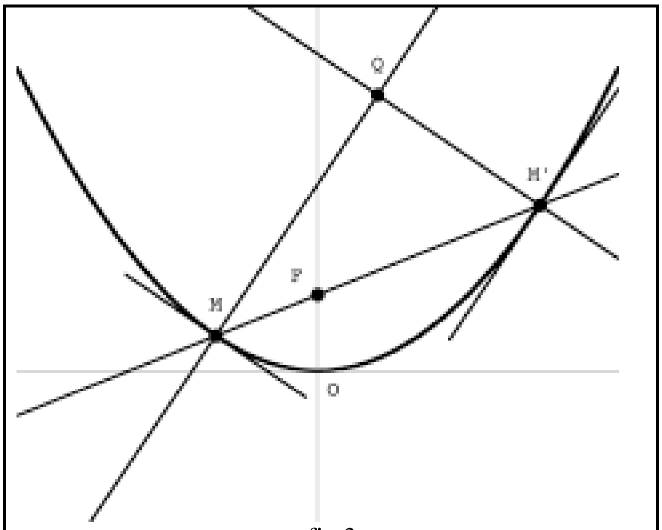

fig.3

Dans un plan munit d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère la parabole P d'équation $Y = X^2$, de foyer F de coordonnées $\left(0,\frac{1}{4}\right)$. On note D_t la droite de pente t passant par F. Cette droite coupe P en deux points $\mathrm{M}(x,y)$ et $\mathrm{M}'(x',y')$. On note (N) (resp. (N')) la normale à P passant par M (resp. M'). Soit $Q\left(x_Q,y_Q\right)$ l'intersection entre (N) et (N') (voir fig.3) .Le but de l'exercice est de trouver l''ensemble des points Q quand t varie dans $\mathbb{R}$.

Question 15

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.)

(A) L'équation de D_t est : $Y + \frac{1}{4} = tX$.

(B) x et x' vérifient l'équation $X^2 - tX - \frac{1}{4} = 0$.

(C) $\vec{T}$ de composantes $(1,2x)$ est un vecteur directeur de la tangente à P en M.

(D) $\vec{n}$ de composantes $(1,-2x)$ est un vecteur directeur de (N).

(E) L'équation de (N) est $X + 2xY = 2x^3 + x$.

Question 16

(Seulement pour les candidats de l'option génie mécanique.)

(A) On a $y_Q = \left((x+x')^2 + xx'\right) + \frac{1}{2}$.

(B) On a $x_Q = -2xx'(x+x')$.

(C) x et x' vérifient les relations $x + x' = t$ et $xx' = \frac{1}{4}$.

(D) $y_Q = 4x_Q^2 + \frac{3}{4}$.

(E) L'ensemble des points Q quand t varie dans $\mathbb{R}$ est une hyperbole.