Initiation à la théorie des distributions
Cours no. 2

$\boxed{\text{DEFINITION DES DISTRIBUTIONS}}$

Comme suggéré par la formulation faible de l'équation de transport, l'idée clef conduisant à la notion de distribution consiste à considérer, au lieu d'une fonction f continue sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^N$, la forme linéaire

$$C_c^\infty(\Omega) \ni \phi \mapsto \int_\Omega f(x)\phi(x)dx \in \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{C}$$

Dans ce contexte, les fonctions ϕ intervenant dans l'expression ci-dessus sont appelées "fonctions test"

Notations usuelles pour les dérivées partielles

•Pour tout multiindice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{N}^m$, on pose

$$|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_m \,, \quad \text{(longueur d'un multi-indice)}$$

•**Monôme** de degré $|\alpha|$: pour $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, on note

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}$$

•**Monôme différentiel** d'ordre $|\alpha|$: on note

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_m^{\alpha_m} \text{ ou } \partial_x^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_m}^{\alpha_m}$$

avec

$$\partial_j \text{ ou } \partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$$

Fonctions test

Soit Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$; la notation $K \subset\subset \Omega$ signifie que K est un compact de $\mathbf{R}^N$ et que $K \subset \Omega$. Pour tout $K \subset\subset \Omega$, notons

$$C_K^\infty(\Omega) := \{\phi \in C^\infty(\Omega) \text{ t.q. } \mathrm{supp}(\phi) \subset K\}$$

Famille de normes sur $C_K^\infty(\Omega)$: pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $\phi \in C_K^\infty(\Omega)$

$$\|\phi\|_{p,K} := \max_{|\alpha| \leq p} \max_{x \in K} |\partial^\alpha \phi(x)|$$

L'espace $C_c^\infty(\Omega)$ n'est pas un espace normé; mais on a évidemment

$$C_c^\infty(\Omega) = \bigcup_{K \subset\subset \Omega} C_K^\infty(\Omega)$$

avec la famille de normes $\| \cdot \|_{p,K}$ sur chaque espace $C_K^\infty(\Omega)$

Notion de distribution

Une distribution T sur Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$ est une forme linéaire sur $C_c^\infty(\Omega)$ dont la restriction à chacun des sous-espaces $C_K^\infty(\Omega)$ est continue pour l'une au moins des normes $\|\cdot\|_{p,K}$. Autrement dit

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{pour tout } K \subset\subset \Omega, \text{ il existe } p_K \in \mathbf{N} \text{ et } C_K > 0 \text{ t.q.} \\ \phi \in C_K^\infty(\Omega) \Rightarrow |\langle T, \phi\rangle| \leq C_K \|\phi\|_{p_K,K}\end{array}}$$

Lorsque p_K peut être choisi égal à p indépendant de K, on dit que T est une distribution d'ordre $\leq p$ dans Ω.

•Ordre de T= le plus petit entier $p \geq 0$ t.q. T soit d'ordre $\leq p$

Notation: $\mathcal{D}'(\Omega)$ est l'espace vectoriel des distributions sur Ω

Exemple 1: les fonctions localement intégrables
Une fonction mesurable f définie p.p. sur Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est localement intégrable sur Ω si

$$\int_K |f(x)|dx < \infty \quad \text{pour tout } K \subset\subset \Omega$$

L'ensemble des fonctions localement intégrables sur Ω est noté $L^1_{loc}(\Omega)$
Tout élément f de $L^1_{loc}(\Omega)$ définit une distribution **d'ordre 0** sur Ω en posant

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx$$

Exemple 2: masses de Dirac
Soit Ω ouvert non vide de $\mathbf{R}^N$; pour tout $x_0 \in \Omega$, on définit la masse de Dirac en x_0 par la formule

$$\langle \delta_{x_0}, \phi \rangle = \phi(x_0) \quad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Il est évident que δ_{x_0} est une distribution **d'ordre** 0 sur Ω.
Exemple 3: distributions de Dirac sur R
Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$; pour tout $x_0 \in I$ et tout $p \in \mathbf{N}$, on définit la distribution de Dirac d'ordre p en x_0 par la formule

$$\langle \delta_{x_0}^{(p)}, \phi \rangle = (-1)^p \phi^{(p)}(x_0) \quad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(I)$$

Il est évident que $\delta_{x_0}^{(p)}$ est une distribution **d'ordre** p sur I.

La notion de distribution ainsi construite généralise bien la notion de fonction (au moins de fonction localement intégrable).

Prop. 1 L'application linéaire $f \mapsto T_f$ de $L^1_{loc}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est injective et non surjective.
Le caractère **non surjectif** est évident: pour $\Omega = \mathbf{R}$ et $p \geq 1$

$$\text{ordre}(\delta_0^{(p)}) = p > 0 = \text{ordre}(T_f)$$
$$\Rightarrow \delta_0^{(p)} \neq T_f \text{ pour tout } f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$$

L'injectivité est obtenue en vérifiant que

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx = 0 \text{ pour tout } \phi \in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow f = 0 \text{ p.p. sur } \Omega$$

Dans toute la suite, on identifiera systématiquement toute fonction localement intégrable f à la distribution T_f qu'elle définit

Exemple 4: distributions positives

Def. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dite positive si l'on a

$$\boxed{\langle T, \phi \rangle \geq 0 \quad \text{pour tout } \phi \in C_c^\infty(\Omega) \text{ t.q. } \phi \geq 0 \text{ sur } \Omega}$$

Notation: $T \geq 0$ sur Ω

•La masse de Dirac δ_0 est une distribution positive sur $\mathbf{R}^N$.

•De même, pour tout $f \in L^1_{loc}(\Omega)$

$$T_f \geq 0 \text{ sur } \Omega \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \text{ p.p. en } x \in \Omega$$

Thm. 2: Soit Ω ouvert de $\mathbf{R}^N$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Alors

$$T \geq 0 \text{ sur } \Omega \quad \Rightarrow \quad \text{ordre}(T) = 0$$