Le problème est le suivant : calculer la moyenne du nombre de numéros différents tirés lors de n choix successifs avec remise d'un numéro choisi parmi n.

Nous appelerons « tirage »le choix (ordonné) des n numéros.

Un tirage peut être représenté par une fonction $f : [\![1;n]\!] \mapsto [\![1;n]\!]$.

Définition 1 (Variable aléatoire) *On pose X_n la variable aléatoire égale au nombre de numéros différents dans un tirage, c'est à dire le cardinal $|f([\![1;n]\!])|$.*

Définition 2 (Espérance) *On pose aussi $E_n = E(X_n)$, l'espérance de la variable X_n.*

Lemme 1 (Espérance, premier calcul) $E_n = \dfrac{1}{n^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \cdot S(n,k)$ *où $S(n,k)$ est le nombre de Stirling de seconde espèce.*

Démonstration : $S(n,k)$ est le nombre de relations d'équivalence ayant k classes sur un ensemble de cardinal n, or à partir d'une relation d'équivalence à k classes, on peut construire A_n^k (le nombre d'arrangements) tirages en choississant (choix ordonné de k éléments parmi n) les images de ces k classes. Nous utilisons plutôt la notation : $A_n^k = \binom{n}{k} \cdot k!$

Définition 3 *On pose $Y(n,k)$ le nombre de fonctions de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$ telles que $k \in f([\![1;n]\!])$.*
On pose aussi $Y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y(n,k)$

Lemme 2 (Calcul de $Y(n,k)$) *Le nombre de fonctions de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$ telle que 1 soit dans l'image est égal au nombre total de fonctions de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1;n]\!]$ dont on soustrait les fonctions n'ayant pas 1 dans son image (c'est à dire dont l'image est incluse dans $[\![2;n]\!]$), autrement dit : $Y(n,1) = n^n - (n-1)^n$.*

De plus, trivialement, tous les éléments jouant le même rôle : $\forall k \in [\![1;n]\!](Y(n,k) = Y(n,1))$ et donc $Y_n = nY(n,1))$

Dans Y_n, chaque fonction telle que $|f([\![1;n]\!])| = k$ apparaît k fois (une fois pour chacune des fonctions ayant l'un des k éléments atteints dans son image).

Lemme 3 (Espérance, deuxième calcul) *Le résultat précédent montre directement que l'espérance de la variable X_n est* $E_n = \dfrac{Y_n}{n^n}$.

Théorème 1 *Le lemme 2 et le lemme 3 permettent de déduire directement :* $E_n = n\dfrac{n^n - (n-1)^n}{n^n}$

Corollaire 1 *Le théorème 1 a pour conséquence immédiate :* $E_n = n\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n\right)$*, et donc, pour n tendant vers l'infini* $E_n \underset{n\to\infty}{\sim} n\left(1 - \dfrac{1}{e}\right)$.

Par exemple pour $n = 10$, $E_n = 6,513215599...$ alors que le calcul avec l'équivalent donne $6,321205588...$

Corollaire 2 *Le lemme 1 et le théorème 1 permettent de déduire les deux relations suivantes mettant en jeu les nombres de Stirling de seconde espèce :*

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \cdot S(n,k) = n(n^n - (n-1)^n)$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot k! \cdot S(n,k) = 1 - \frac{1}{e}$