Le théorème des 4 couleurs est équivalent à dire que tout graphe planaire est 4-colorable au niveau des sommets.

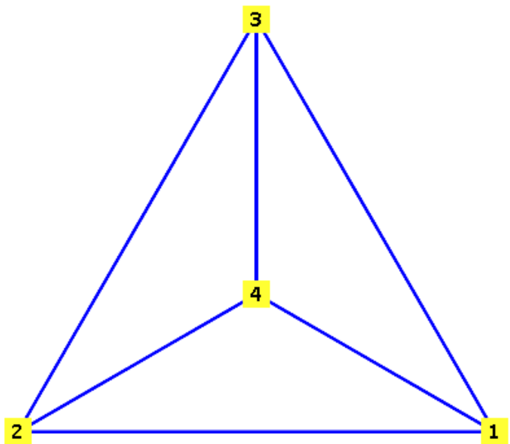
Démonstration :

Lemme :
Soit C_n un graphe cyclique à n point
$G_0=(\{1\},\{\})$
G_{k+1} est un graphe connexe, planaire et composé uniquement de triangle
C_{2n} et G_k disjoints et n un entier quelconque
$V(G_{k+1})=V(G_k \cup C_n)$
$G_k \cup C_n \subset G_{k+1}$
$e=\{u,v\}$
$e \notin G_k \cup C_n \Leftrightarrow u \in V(C_n)$ et $v \in V(G_k)$

$\forall k \in \mathbb{N} \quad k>2$
G_k 4-coloriable

Les graphes cycliques à un nombre pairs de points sont 2-colorable donc l'association de plusieurs graphes cycliques à un nombre pair de point avec le lemme est 4-colorable.

Avec cette construction, nous pouvons représenter tout les graphes planaire (comme sous graphe de la construction) sauf ceux ayant ce sous graphe :



Or les graphes planaire construit avec le lemme ne possède pas ce sous graphe mais nous pouvons lui en rajouter un en créant un point centrale donnant le sous graphe si dessus. Le graphe finale reste 4-colorable. Donc tout les graphes construit avec le lemme sont 4-colorable ainsi que tout les autres graphe planaire composé uniquement de triangle non constructible avec le lemme. Donc tout les graphes planaire uniquement construit avec des triangle sont 4-colorable et donc tout les graphes planaires le sont aussi (car tout les graphe planaire sont des sous graphes de graphe composé uniquement de triangle).