C_n est un cycle à n arêtes

P_n est un chemin à n arêtes

Méthode de construction des graphes G :

$G_0 = (\{1\},\{\})$

G_{k+1} est un graphe planaire, connexe et uniquement composé de triangle

$n \in \mathbb{N} \quad n > 0$

$V(G_{k+1}) = V(G_k \cup C_{2n})$

$V(G_k \cap C_{2n}) = \{\}$

$e \in E(H)$

$e = \{u, v\}$

$e \notin E(G_{k+1} \setminus (G_k \cup C_{2n})) \Leftrightarrow u \in V(G_k)$ et $v \in V(C_{2n})$

Tout les sous graphes constructible par cette méthode sont 4-colorable

Soit H, un graphe quelconque, connexe, planaire et composé uniquement de triangle. Coupons le graphe H en deux graphes H_1 et H_2 tel que :

$\exists n \in \mathbb{N} \quad P_n = H_1 \cap H_2$

La propriété suivante est vérifié par un graphe G, il ne peux y pas avoir d'arête entre deux points du même cycle:

Supposons que la propriété ne sois pas respecté

$\forall k \in \mathbb{N}$

$P_k \subset P_{k+1}$

$P_i \subset P_n \subset H$

$deg_{P_i}(u) = deg_{P_i}(v) = deg_{P_{i-1}}(w) = 1$

$\{u, v\} \in H \Rightarrow \{u, w\} \in H$

(Car le graphe H est composé de triangle)

Or cela implique la chose suivante:

$\exists u \in V(H_1 \cap H_2)$

$\forall v, w \in V(H_1 \cap H_2)$

$\{v, u\} \in E(H)$ et $\{u, w\} \in E(H) \Leftrightarrow \{v, w\} \in E(H)$

Donc si

$\forall u \in V(H_1 \cap H_2)$

$\exists v, w \in V(H_1 \cap H_2)$

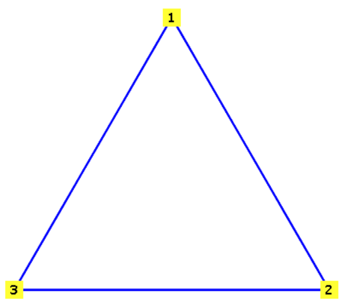
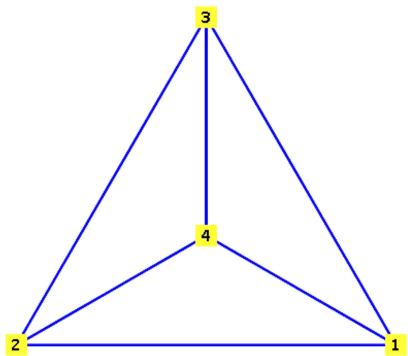
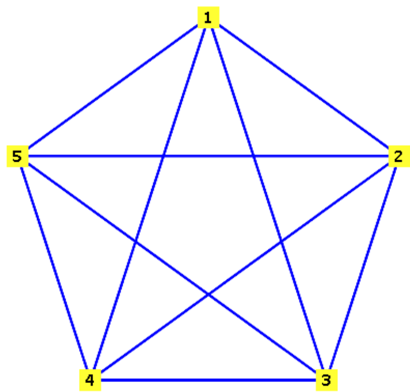
$\{v, u\} \in E(H)$ et $\{u, w\} \in E(H) \Leftrightarrow \{v, w\} \notin E(H)$

alors il n'existe pas d'arête liant deux points du chemin

Soit H, un graphe quelconque, connexe, planaire et composé uniquement de triangle. Coupons le graphe H en deux graphes H_1 et H_2 tel que :

$$\exists n \in \mathbb{N} \;\; P_n = H_1 \cap H_2$$
$$\exists u \in V(H_1 \cap H_2)$$
$$\forall\, v, w \in V(H_1 \cap H_2)$$
$$\{v, u\} \in E(H) \text{ et } \{u, w\} \in E(H) \Leftrightarrow \{v, w\} \in E(H)$$

Ce qui donne :

$deg_H(u)=2$	$deg_H(u)=3$	$deg_H(u)=4$
		

Or pour $deg_H(u) \geq 4$, le graphe n'est pas planaire et pour $deg_H(u)=2$, le graphe n'a pas d'importance.
Donc si le graphe H ne possède pas de sous graphe comme le deuxième cas ci dessus alors on peux tracer plusieurs ligne parallèle équivalente aux arcs de cercles des graphes G, ces lignes passent par tout les points de H. Deux lignes sont parallèle si elle n'ont aucuns points en commun. On obtient à la fin un graphe étant le sous graphe d'un graphe G (car contenant des arc de cercle parallèle équivalant à ceux d'un sous graphe de G). Le graphe G est 4-colorable et rajouter des points tel que des sous graphes comme le deuxième cas ci dessus apparaisse ne modifie en rien la propriété de 4-coloration.

Donc tout les graphes planaire et composé uniquement de triangle sont 4 colorable.
Vu que tout les graphes planaires sont des sous graphes de graphes planaire uniquement composé de triangle alors ils sont eux aussi 4 colorable.