C_n est un cycle à n arêtes

P_n est un chemin à n arêtes

Méthode de construction des G-graphes:

$G_0=(\{1\},\{\})$

G_{k+1} est un graphe planaire, connexe et uniquement composé de triangle

$n\in\mathbb{N} \quad n>0$

$V(G_{k+1})=V(G_k\cup C_{2n})$

$V(G_k\cap C_{2n})=\{\}$

$e\in E(G_{k+1})$

$e=\{u,v\}$

$e\notin E(G_{k+1}\setminus(G_k\cup C_{2n}))\Leftrightarrow u\in V(G_k)$ et $v\in V(C_{2n})$

Tout les graphes constructible par cette méthode sont 4-colorable

Soit H, un graphe quelconque, connexe, planaire et composé uniquement de triangle. Coupons le graphe H en deux graphes H_1 et H_2 tel que :

$\exists n\in\mathbb{N} \quad P_n=H_1\cap H_2$

La propriété suivante est vérifié par un graphe G : il ne peux pas avoir d'arêtes entre deux points du même cycle

Supposons que la propriété ne sois pas respecté pour l'arc de cercle P_n

$\forall k\in\mathbb{N}$

$P_k\subset P_{k+1}$

$i\in\{4, \ \dots \ ,n-1\}$

$P_i\subset P_n\subset H$

$deg_{P_i}(u)=deg_{P_i}(v)=deg_{P_{i-1}}(w)=1$

$\{u,v\}\in H\Rightarrow\{u,w\}\in H$

(Car le graphe H est composé de triangle)

Or cela implique la chose suivante:

$\exists u\in V(H_1\cap H_2)$

$\forall v,w\in V(H_1\cap H_2)$

$\{v,u\}\in E(P_n)$ et $\{u,w\}\in E(P_n)\Leftrightarrow\{v,w\}\in E(H)$

Donc si

$\forall u\in V(H_1\cap H_2)$

$\exists v,w\in V(H_1\cap H_2)$

$\{v,u\}\in E(H)$ et $\{u,w\}\in E(H)\Leftrightarrow\{v,w\}\notin E(H)$

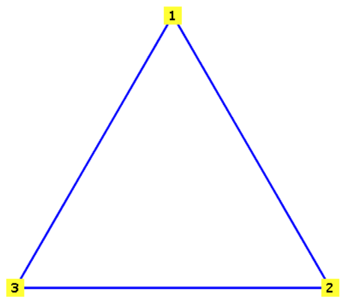
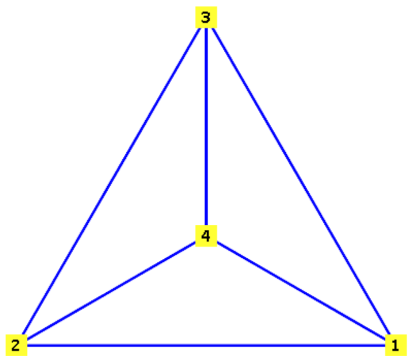
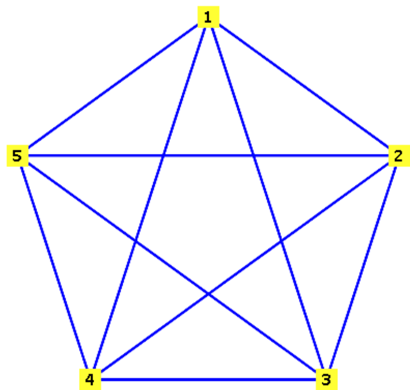
alors il n'existe pas d'arête liant deux points du chemin

Soit H, un graphe quelconque, connexe, planaire et composé uniquement de triangle. Coupons le graphe H en deux graphes H_1 et H_2 tel que :

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad P_n = H_1 \cap H_2$$
$$\exists u \in V(H_1 \cap H_2)$$
$$\forall\, v, w \in V(H_1 \cap H_2)$$
$$\{v,u\} \in E(P_n) \text{ et } \{u,w\} \in E(P_n) \Leftrightarrow \{v,w\} \in E(H)$$

(Ci dessus la propriété non vérifié par les graphes G mais par les graphes non G)

Ce qui donne :

$A_2 \;\; deg_H(u)=2 \;\; u=1$	$A_3 \;\; deg_H(u)=3 \;\; u=4$	$A_4 \;\; deg_H(u)=4 \;\; u=4$
		

Or pour $deg_H(u) \geq 4$, le graphe n'est pas planaire et pour $deg_H(u)=2$, le graphe n'a pas d'importance car il concerne le bord.

Soit H, un graphe quelconque, connexe, planaire, composé uniquement de triangle et sans sous graphe A_3 . Coupons le graphe H en m graphes $H_i \;\; i \in \{1, \ldots, m\}$ tel que :

$$\forall\, i, j \in \{1, \ldots, m\} \quad i \neq j$$
$$i \pm 1 \neq j \Leftrightarrow H_i \cap H_j = \{\}$$

sinon

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad P_n = H_i \cap H_j$$
$$\forall u \in V(H_i \cap H_j)$$
$$\exists v, w \in V(H_i \cap H_j)$$
$$\{v,u\} \in E(P_n) \text{ et } \{u,w\} \in E(P_n) \Leftrightarrow \{v,w\} \notin E(H)$$

Car le graphe ne contient pas de sous graphe A_3 .

Donc le graphe H est un sous graphe d'un G-graphe et est donc 4-colorable. Si l'on ajoute des points tel que l'on crée des sous graphes A_3 , le graphe reste 4-colorable et tout les graphes connexe, planaire et composé uniquement de triangle sont inclue dans un graphe, union d'un G-graphe et de graphes A_3 tel que A₃ ne soit pas disjoint au G-graphe. Donc tout les graphe planaire composé uniquement de triangle sont inclus dans un graphe 4-colorable. Et vu que tout les graphes planaire sont inclus dans un graphe composé uniquement de triangle alors tout les graphes planaire sont 4-colorable