Fonctions élémentaires

Nicolas Duboël

Chapter 1

La fonction exponentielle

Chapter 2

Les fonctions circulaires

2.1 Premières propriétés sur $\mathbb{C}$

Théorème (Théorème support de la trigonométrie - Hors Programme)

Les deux séries suivantes convergent normalement sur $\mathbb{C}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Démonstration

- On s'intéresse à la première série en appliquant le critère de d'Alembert :

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{z^{2n+2}}{(2n+2)!}}{(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}} \right| = \left| \frac{(2n)! \; z^{2n+2}}{(2n+2)! \; z^{2n}} \right| = \frac{z^2}{(n+1)(n+2)} \qquad \text{et} \qquad \forall z \in \mathbb{R}, \lim_{n \to +\infty} \frac{z^2}{(n+1)(n+2)} = 0$$

  Ainsi, cette série converge normalement sur $\mathbb{C}$ par le critère de D'Alembert ($\rho = +\infty$).

- On s'intéresse à la seconde série par la même méthode :

$$\left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{z^{2n+3}}{(2n+3)!}}{(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}} \right| = \left| \frac{(2n+1)! \; z^{2n+3}}{(2n+3)! \; z^{2n+1}} \right| = \frac{z^2}{(n+3)(n+2)} \qquad \text{et} \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \lim_{n \to +\infty} \frac{z^2}{(n+3)(n+2)} = 0$$

  Ainsi, cette série converge normalement sur $\mathbb{C}$ par le critère de D'Alembert ($\rho = +\infty$).

CQFD

Définition (Cosinus et Sinus - Hors Programme)

On définit sur $\mathbb{C}$ les fonctions sinus (notée sin) et cosinus (notée cos) par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \text{ et } \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Théorème (Exponentielle Complexe)

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$$

Démonstration

Par définition de l'exponentielle, nous avons

$$\begin{aligned}
e^{ix} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \\
e^{ix} &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ paire}}}^{+\infty} (-1)^{n/2} \frac{x^n}{n!} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ impaire}}}^{+\infty} i \times (-1)^{n/2} \frac{x^k}{k!} \\
e^{ix} &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
e^{ix} &= \cos(x) + i\sin(x)
\end{aligned}$$

CQFD

Théorème (Propriétés analytiques du cosinus et du sinus)

- Les fonctions cosinus et sinus sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$.
- La fonction cosinus est une fonction paire sur $\mathbb{C}$.
- La fonction sinus est une fonction impaire sur $\mathbb{C}$.

Démonstration

- On s'intéresse à la classe des fonctions cosinus et sinus. Comme l'exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$ alors, par définition de la dérivabilité sur $\mathbb{C}$, les fonctions cosinus et sinus sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$.

- La fonction cosinus est une fonction paire sur $\mathbb{C}$: soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos(-z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{((-z)^2)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(z^2)^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos(z)$$

- La fonction sinus est une fonction impaire sur $\mathbb{C}$: soit $z \in \mathbb{C}$,

$$\sin(-z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(-z) \times (-z)^{2n}}{(2n+1)!} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z \times z^{2n}}{(2n+1)!} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(z)$$

CQFD

Théorème (Formules d'addition et de soustraction)

Pour tout $a, b \in \mathbb{C}$,

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

Démonstration

- On traite les deux premières formules en même temps.

$$\begin{aligned}
& e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib} \\
\Leftrightarrow \quad & \cos(a+b) + i\sin(a+b) = \big(\cos(a) + i\sin(a)\big)\big(\cos(b) + i\sin(b)\big) \\
\Leftrightarrow \quad & \cos(a+b) + i\sin(a+b) = \big(\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\big) + i\big(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\big) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{cases}
\end{aligned}$$

- On traite les deux dernières formules en même temps.

$$\begin{aligned}
& e^{i(a-b)} = e^{ia} \times e^{-ib} \\
\Leftrightarrow \quad & \cos(a-b) + i\sin(a-b) = \big(\cos(a) + i\sin(a)\big)\big(\cos(-b) + i\sin(-b)\big) \\
\Leftrightarrow \quad & \cos(a-b) + i\sin(a-b) = \big(\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\big) + i\big(\sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)\big) \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b) \end{cases}
\end{aligned}$$

CQFD

Corollaire (Egalité de Pythagore)

$$\forall z \in \mathbb{C}, \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$$

Démonstration
Soit $z \in \mathbb{C}$.
Alors, d'après la formule de soustraction du cosinus, on a

$$1 = \cos(0) = \cos(z-z) = \cos^2(z) + \sin^2(z)$$

CQFD

2.2 Algorithmes et Valeurs des fonctions circulaires

2.2.1 Algorithme de détermination des sinus et cosinus

Méthode (Méthode de la majoration par le reste des séries alternées)

On souhaite exprimer la fonction sinus ou cosinus en une valeur $\alpha \in \mathbb{C}$ à une précision $p \in \mathbb{R}^+$ correspondant au module du nombre complexe calculée.

On pose U_N la suite des sommes partielles du cosinus (respectivement du sinus) en la valeur $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$U_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} \qquad \left(\text{resp. } U_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

- On obtient une estimation de $\cos(\alpha)$ à une précision p dès que

$$\left| \frac{\alpha^{2N+2}}{(2N+2)!} \right| \leq p$$

- On obtient une estimation de $\sin(\alpha)$ à une précision p dès que

$$\left| \frac{\alpha^{2N+3}}{(2N+3)!} \right| \leq p$$

Démonstration
Dans les deux cas, on pose R_N le reste associée à U_N, c'est-à-dire que $R_N + U_N = f(\alpha)$ où f est le cosinus ou le sinus . Ainsi,

$$R_N = f(\alpha) - U_N \Rightarrow |R_N| = |f(\alpha) - U_N|$$

On peut alors utiliser une des propriétés des séries alternées pour majorer le reste. Cela donne

- pour le cosinus

$$|R_N| = |\cos\alpha - U_N| \leq |u_{N+1}| = \left| \frac{\alpha^{2N+2}}{(2N+2)!} \right|$$

- pour le sinus

$$|R_N| = |\sin\alpha - U_N| \leq |u_{N+1}| = \left| \frac{\alpha^{2N+3}}{(2N+3)!} \right|$$

Ainsi, si p majore $|u_{N+1}|$, alors p majore $|f(\alpha) - U_N|$. Nous avons donc trouvé une estimation de $f(\alpha)$ à une précision p.

CQFD

Implémentation de l'algorithme en python :

```
def determination_cos_sin(nombre,p):
    alpha = complex(nombre)
    alpha_2 = - alpha**2
    cos = 1
    suite_cos = 1
    sin = alpha
    suite_sin = alpha
    N = 0
    mod = abs(alpha)
    estimateur_cos = mod**2 / 2
    estimateur_sin =  mod**3 / 6
    while estimateur_cos > p or estimateur_sin >p :
        suite_cos *= alpha_2 / ((2*N+1)*(2*N+2))
        suite_sin *= alpha_2 / ((2*N+2)*(2*N+3))
        cos += suite_cos
        sin += suite_sin
        estimateur_cos *= mod**2 / ((2*N+1)*(2*N+2))
        estimateur_sin *= mod**2 / ((2*N+2)*(2*N+3))
        N += 1

    return (cos,sin)
```

2.2.2 Définition de π

Propriété (Annulation du cosinus)

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \cos(x_0) = 0$$

Démonstration
On souhaite utiliser le théorème de Bolzano étant donné la continuité de la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$. Ainsi, il faut montrer qu'il existe un $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(x_1) < 0$ car $\cos(0) = 1$. On va donc utiliser l'algorithme d'approximation du cosinus pour trouver un nombre qui satisfait la condition.

```
>>> from script import determination_cos_sin as dcs
>>> dcs(2,0.001)
(-0.4161552028218696, 0.9092961359628027)
```

Nous avons donc montré que $\cos(2) < 0$.
D'après le théorème de Bolzano,

$$\exists x_0 \in \mathbb{R} \text{ tel que } \cos(x_0) = 0$$

CQFD

Définition (Nombre π)

On définit le réel π comme étant le nombre qui satisfait

$$\pi = 2 \times \underset{t \in \mathbb{R}^+}{\operatorname{argmin}} \left\{ \cos(t) = 0 \right\}$$

2.3 Quelques valeurs utiles

Propriété (Valeurs utiles de cosinus et sinus)

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Démonstration

- Par définition de π, nous avons
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
- Par l'égalité de Pythagore, on conclut facilement que
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$$
Or, la fonction cosinus est la fonction dérivée du sinus, et par définition de π, comme le cosinus est continu sur $\mathbb{R}$, alors cosinus est positif sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et le sinus est croissant sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Finalement,
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
- Concernant les valeurs en π,
$$\cos(\pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$
$$\sin(\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
- Concernant les valeurs en $\frac{\pi}{4}$,
$$\left\{\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 1 &= \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 0 &= \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ 1 &= \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 \\ 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \pm\frac{\sqrt{(2)}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \pm\frac{\sqrt{(2)}}{2} \end{aligned}\right.$$
Or, d'après la définition de π et de la continuité du cosinus, on sait que cos est positif sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, ainsi
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
De plus, comme précédemment, le cosinus est la fonction dérivée du sinus, ainsi sa positivité sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ entraîne la croissance du sinus sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc
$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Démonstration
On s'intéresse à l'expression de $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$:

$$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$$

Ainsi,

$$\{$$

CQFD

Chapter 3

Les fonctions trigonométriques réciproques

Chapter 4

La fonction logarithme népérien

Chapter 5

Les fonctions hyperboliques

Chapter 6

Les fonctions hyperboliques réciproques