Feuille d'exercices 5

Exercice 1

Soient k un corps et
$$A = k[X,Y,Z,T]/(XY - ZT).$$
On note x, y, z, t les images de X, Y, Z, T dans A.

1. Montrez que le sous-anneau $R = k[z,t] \subset A$ est isomorphe à l'anneau de polynômes $k[Z,T]$.
2. Montrez que tout élément de A possède une écriture unique $a = a_0 + xa_1(x) + ya_2(y)$ où $a_0 \in R$, $a_1 \in R[x]$ et $a_2 \in R[y]$.
3. Montrez que A est intègre en construisant une injection de A dans $B = k(X)[Z,T]$.
4. Montrez que z et t sont des irréductibles de A. Indiquez pourquoi x et y le sont aussi.
5. Justifiez qu'aucun de ces quatre irréductibles n'est multiple d'un autre ; en particulier, ils sont non associés deux à deux.
6. Montrez que A n'est pas factoriel.

Exercice 2

On considère les anneaux factoriels $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$. Soit $M = \mathbb{Z}[X]/(X^2 + X)$.

1. Écrivez l'élément $3X^3 + 3X$ comme un produit d'irréductibles dans $\mathbb{Z}[X]$.
2. Même question pour $3X^3 + 3X$ comme élément de $\mathbb{Q}[X]$ ou $\mathbb{C}[X]$.
3. L'anneau quotient $\mathbb{Z}[X]/(3X^3 + 3X)$, est-il réduit ? intègre ?
4. Le $\mathbb{Z}$-module M est-il de type fini ? libre ? de torsion ? Calculez $Ann_{\mathbb{Z}}(M)$.
5. Même question pour M comme $\mathbb{Z}[X]$-module.
6. Trouvez la decomposition en composantes primaires du $\mathbb{Q}[X]$-module $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + X)$.

Exercice 3

Trouver une matrice diagonale de Smith D qui soit S-équivalente à la matrice de $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 69 & -153 \\ 12 & -27 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Donner une base de $\mathbb{Z}^2$ adaptée au sous-module engendré par les vecteurs $(3, -6)$ et $(4, 2)$.

Exercice 5

Soit A un anneau principal.

1. Soit $M = A/(d_1) \times \cdots \times A/(d_n)$ où $d_i \in A$, $d_i \neq 0$, $d_i \notin A^\times$, et $d_1 \mid \cdots \mid d_n$. Montrez qu'il existe un ensemble fini Σ d'irréductibles de A tel que $d_i \sim \prod_{p \in \Sigma} p^{\alpha_p(i)}$ avec :

   i) α_p croissante, pour tout $p \in \Sigma$;

   ii) $\alpha_p(1) \neq 0$ pour au moins un p ;

   iii) $\alpha_p(n) \neq 0$ pour tout p.

2. Donnez une expression pour la composante p-primaire $M(p^\infty)$. Indiquez la suite de ses facteurs invariants et leur nombre $\nu(p)$. Montrez que $\nu(p)$ est maximal si et seulement si $p \mid d_1$.

3. Écrivez la décomposition en composantes primaires $M = \oplus_{p \in \Sigma} M(p^\infty)$, et expliquez comment on retrouve d_1 à partir de cette somme directe.

4. Utilisez ce qui précède pour calculer les facteurs invariants du groupe abélien

$$M = \mathbb{Z}/490\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/28\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/147\mathbb{Z}.$$

$M \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$\cong \overset{2,7}{\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}} \times \overset{2,7,7}{\mathbb{Z}/98\mathbb{Z}} \times \overset{2,7,7,3,5}{\mathbb{Z}/1470\mathbb{Z}}$

$\cong \overset{7}{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}} \times \overset{7}{\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}} \times \overset{2,7}{\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}} \times \overset{2,7}{\mathbb{Z}/14\mathbb{Z}} \times \overset{2,7,3,5}{\mathbb{Z}/210\mathbb{Z}}$