Première partie .

Introduction au domaine de recherche

Résumé

Le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer est considéré par beaucoup de mathématiciens comme un résultat majeur de la seconde moitié du vingtième siècle. Il établit un lien profond entre une quantité analytique (l'indice d'un opérateur elliptique sur une variété compacte) et une autre purement géométrique. Cette relation implique d'autres résultats déjà connus, comme le théorème de Gauss-Bonnet ou celui de Hirzebruch sur la signature d'une variété.

Les constructions impliquées dans la formulation du théorème de l'indice se généralisent naturellement dans le cadre de la géométrie non commutative : lancé par Connes dans les années 90, ce champ des mathématiques vise à étendre les outils classiques de la géométrie à une classe d'espaces plus large, dits « non commutatifs » (nous préciserons ce que cela signifie plus loin).

Ces généralisations ont mené à la formulation de la conjecture de Baum-Connes, qui est aujourd'hui l'un des thèmes de réflexion majeurs du domaine. Dans le texte qui suit, nous allons essayer de situer la conjecture dans son contexte tout en expliquant quelles sont les directions de recherche étudiées aujourd'hui.

1. Le théorème de l'indice d'Atiyah et Singer

1.1. Motivations

Tout commence avec une équation différentielle linéaire sur une variété compacte M :

$$Du = f. \tag{1}$$

Ici, D est un *opérateur différentiel*, ce qui signifie qu'il s'écrit localement sous la forme :

$$D = \sum_{|\alpha| \leq m} g_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$$

avec α des n-uplets d'entiers et g_α des fonctions lisses définies sur un ouvert de M. La fonction f est donnée, et u est notre inconnue. Pour plus de simplicité, imaginons que u et f vivent dans $C^\infty(M)$; on pourrait tout aussi bien se placer dans des espaces plus compliqués : sections d'un fibré, espaces de Sobolev...

L'équation (1) est très difficile à résoudre en général. On peut donc se restreindre à une certaine classe d'opérateurs, dits *elliptiques*. Sans rentrer dans les détails, un opérateur elliptique D possède des propriétés de régularité très intéressantes : il s'agit notamment d'un *opérateur de Fredholm*, c'est-à-dire que

$$\ker D \quad \text{et} \quad \operatorname{coker} D = C^\infty(M)/\operatorname{im}(D)$$

sont de dimensions finies. Le noyau et le conoyau de D sont des espaces compliqués à déterminer en général, mais de manière surprenante la quantité

$$\operatorname{Index} D = \dim \ker D - \dim \operatorname{coker} D$$

est beaucoup plus souple : c'est *l'indice* de l'opérateur D. Celui-ci ne dépend que de la classe d'homotopie de D, ce qui motive la question suivante attribuée à Gel'fand en 1960 :

Peut-on déterminer l'indice de D uniquement à partir d'invariants topologiques ?

1.2. K-théorie

La réponse, annoncée par Atiyah et Singer en 1963 [2] est :

« Oui. »

Leur construction utilise des notions de *K-théorie* : il s'agit d'une théorie cohomologique introduite peu avant par Atiyah et Hirzebruch, à partir d'idées antérieures de Grothendieck. Le principe consiste à étudier la topologie d'une variété (compacte) M à travers les fibrés vectoriels qu'elle peut supporter. Par exemple, tous les fibrés vectoriels sur un espace contractile sont isomorphes à un fibré trivial : la présence de fibrés non triviaux signifie donc que M n'est pas contractile.

Soyons plus précis. Si E est un fibré vectoriel sur M, on note $[E]$ sa classe d'isomorphisme. Deux fibrés vectoriels E et F peuvent être sommés ; dans ce cas $[E \oplus F]$ ne dépend que de $[E]$ et $[F]$. Autrement dit, l'ensemble S des classes d'isomorphismes de fibrés sur M forme un semi-groupe abélien.

Définition. On note $K(M)$ le *groupe de K-théorie* de M : c'est le groupe abélien « engendré » par $(S, \oplus)$. [1]

En d'autres termes, $K(M)$ est un groupe abélien constitué de différences formelles :

$$K(M) = \{[E] - [F], E, F \text{ fibrés vectoriels sur } M\}.$$

Le groupe $K(M)$ ainsi formé est un invariant d'homotopie. Il existe un théorème d'excision, une suite exacte longue… qui rendent les calculs plus aisés. Lorsque M n'est plus compacte, la définition usuelle doit être remplacée par une K-théorie *à support compacts* :

$$K_c(M) = \{[E] - [F], E \text{ et } F \text{ isomorphes en dehors d'un compact de } M\}.$$

Quel rapport avec l'indice ? Il se trouve que n'importe quel opérateur elliptique D sur M définit naturellement une classe de K-théorie dans $K_c(T^*M)$. Atiyah et Singer utilisent cette classe pour construire un indice « topologique » pour D, et montrent que cet indice est le même que son indice de Fredholm. [2]

1.3. Théorème de l'indice

Cette construction permet à Atiyah et Singer [2] de répondre de manière positive à la question de Gel'fand (ce qui vaudra au premier une médaille Fields en 1966 et aux deux le prix Abel en 2004) :

Théorème (Atiyah-Singer, 1963)**.** *Tout opérateur elliptique D sur une variété compacte M possède un indice « topologique »* $\mathrm{Index}_{\mathrm{top}}(D)$ *construit uniquement à partir d'invariants géométriques, tel que*

$$\mathrm{Index}(D) = \mathrm{Index}_{\mathrm{top}}(D).$$

Ce théorème est d'une grande profondeur, car il fait le lien entre un objet de nature analytique (l'indice de Fredholm de D) et un objet essentiellement topologique. Appliqué au bon opérateur, il implique le théorème suivant :

Théorème (Gauss-Bonnet, 1888)**.** *Soient M une surface riemannienne compacte, $\chi(M)$ sa caractéristique d'Euler et $K : M \to \mathbb{R}$ sa courbure sectionnelle. Alors :*

$$\chi(M) = \frac{1}{2\pi} \int_M K.$$

1. Cette construction est formalisée par la notion de *groupe de Grothendieck* engendré par un semi-groupe (voir [17, §3.1.1])

2. La construction précise nécessite d'introduire la notion de *classes caractéristiques*. Grossièrement parlant, il s'agit d'un moyen de distinguer deux fibrés vectoriels en associant à chacun une classe de cohomologie de De Rham. Si les deux classes sont distinctes, alors les fibrés ne sont pas isomorphes. Pour construire l'indice topologique, on envoie la classe de $K_c(T^*M)$ que définit D dans la cohomologie de de Rham de M *via* des classes caractéristiques bien choisies, et on intègre cette classe de cohomologie pour obtenir un entier.

Le théorème de l'indice a pour conséquence un autre théorème important, énoncé comme suit. Si M est une variété compacte orienté de dimension $4k$ pour $k > 0$, on peut introduire une forme bilinéaire symétrique sur ses groupes de cohomologie de De Rham :

$$q : H^{2k}(M) \times H^{2k}(M) \to \mathbb{R}$$
$$[\alpha], [\beta] \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$$

Définition. La *signature* de M, notée $\mathrm{Sign}(M)$, est la signature de q.

Théorème (Hirzebruch, 1970)**.** *La signature de M est un invariant d'homotopie.*

Le théorème de Hirzebruch complet donne en fait une formule exacte pour calculer $\mathrm{Sign}(M)$. En 1970, Novikov [15] a extrapolé cette formule pour former des quantités appellées « signatures de rang supérieur », en posant la question naturelle :

Conjecture (Novikov, 1970)**.** *Toutes les signatures de rang supérieur sont des invariants d'homotopie.*

Il s'agit d'une question importante en topologie, qui n'a à ce jour pas encore été résolue. [3]

1.4. Extensions

La conjecture de Novikov donne une motivation pour développer des généralisations du théorème de l'indice. Deux directions ont été particulièrement étudiées :

1. Peut-on étendre le théorème au cas où M n'est plus une variété compacte ? Dans ce cas, les opérateurs elliptiques ne sont plus nécessairement des opérateurs de Fredholm, mais il est toujours possible de définir un « indice » pour D : cette question a été abordée extensivement par Roe [16].
2. Soit Γ un groupe discret agissant par difféomorphismes sur M. Lorsque D est un opérateur elliptique Γ-équivariant, Lusztig [14] construit un « indice généralisé » pour D. L'étude de cet indice est liée à la conjecture de Novikov. On verra dans quelques instants qu'elle a également mené à la formulation de la conjecture de Baum-Connes.

Ces deux approches s'expriment naturellement dans le cadre de la *géométrie non commutative*, dont nous allons donner une introduction.

2. Géométrie non commutative

2.1. Géométrie et commutativité, quel rapport ?

La géométrie d'un espace peut être approchée de plusieurs façons : on peut parler de topologie, théorie de la mesure, géométrie différentielle… Malheureusement dans certains

3. Pour un bon historique de la conjecture de Novikov, on pourra se référer à [8].

cas, aucune de ces notions ne suffit à retranscrire la richesse de l'espace en question : l'exemple le plus simple est celui du quotient d'un espace topologique par une relation d'équivalence qui ne se comporte pas gentiment : on aboutit bien souvent à un espace qui est loin d'être séparé.

Au début des années 1980, Alain Connes propose d'adopter une notion de géométrie plus générale. Tout part du constat suivant, que l'on rendra précis plus loin : *un espace compact est complètement décrit par l'algèbre de ses fonctions (continues à valeurs complexes).* Autrement dit, il y a une sorte de dualité :

$$\text{Espaces compacts} \longleftrightarrow \text{Algèbres (commutatives)}$$

Alain Connes propose donc naturellement de voir les algèbres non commutatives (ou en tout cas une partie d'entre elles) comme des algèbres de fonctions sur des « espaces non commutatifs » abstraits. On définit alors un nouveau type de géométrie, dite *non commutative.* Cette observation a donné naissance à un domaine particulièrement fertile des mathématiques, qui est toujours en développement actif. [4]

Ainsi, beaucoup d'espaces dégénérés du point de vue de la topologie peuvent être plus facilement abordés dans le contexte non commutatif. L'enjeu consiste alors à voir quelles sont les constructions classiques qui se généralisent (existe-t-il par exemple une théorie de cohomologie « non commutative » ?), et quels sont les phénomènes nouveaux qui apparaissent dans cette nouvelle géométrie.

2.2. C^*-algèbres et spectre

Essayons de donner un sens plus précis au paragraphe précédent. Soient X un espace topologique compact, et $C(X)$ l'algèbre des fonctions continues de X dans $\mathbb{C}$. Celle-ci est ce qu'on appelle une *C^*-algèbre* :

Définition. Une *C^*-algèbre* est une algèbre de Banach munie d'une involution $a \mapsto a^*$ (avec $(ab)^* = b^*a^*$) telle que pour tout $a \in A$ on ait :

$$\|a^*a\| = \|a\|^2. \tag{*}$$

L'identité (*) impose une grande rigidité : notamment, chaque C^*-algèbre admet une unique norme vérifiant (*).

Exemple. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert : l'algèbre des opérateurs continus $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est une C^*-algèbre.

L'exemple à toujours garder en tête est le suivant :

Exemple. Si X est un espace localement compact, alors l'ensemble $C_0(X)$ des fonctions continues sur X, tendant vers 0 à l'infini, est une C^*-algèbre. La norme est donnée par $\|f\| = \sup_X |f|$. On peut remarquer que $C_0(X)$ n'est unitaire que si X est compact (l'unité est alors donnée par la fonction constante égale à 1).

4. Pour avoir une idée du « paysage » étudié, l'ouvrage de référence est celui d'Alain Connes [6] (difficile d'approche). Pour débuter, on trouvera une bonne introduction dans [12].

L'idée fondamentale de la géométrie non commutative est que la connaissance de $C_0(X)$ suffit à « reconstruire » l'espace X. Pour ça, nous aurons besoin de la construction suivante :

Définition. Soit A une C^*-algèbre commutative. Le *spectre* de A, noté $\operatorname{Sp} A$, est l'ensemble des *caractères* de A, c'est-à-dire des morphismes non nuls $A \to \mathbb{C}$.

L'espace $\operatorname{Sp} A$ possède une topologie naturelle qui en fait un espace localement compact, et l'on a :

Proposition 2.1. *Soit X un espace topologique localement compact. Alors $\operatorname{Sp} C_0(X)$ est homéomorphe à X.*

Cette proposition justifie l'affirmation faite en introduction : *un espace compact est complètement décrit par l'algèbre de ses fonctions.*

2.3. Des espaces « non commutatifs »

Même s'il est très antérieur au travail de Connes, le théorème suivant peut-être considéré comme l'un des fondements de la géométrie non commutative. Il approfondit l'affirmation de la partie précédente en montrant l'équivalence : [5]

$$\{\text{Espaces localement compacts}\} \simeq \{C^*\text{-algèbres commutatives}\}. \tag{2}$$

Théorème (Gel'fand-Naimark, 1943)**.** *Si A est une C^*-algèbre commutative, alors la* transformée de Gel'fand

$$\begin{aligned} G : A &\to C_0(\operatorname{Sp} A) \\ a &\mapsto (\chi \mapsto \chi(a)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de C^*-algèbres.

L'équivalence (2) permet de voir les C^*-algèbres *non commutatives* comme des algèbres de fonctions sur des « espaces non commutatifs » abstraits. Ce point de vue permet de généraliser un grand nombre de concepts de la topologie à l'étude des C^*-algèbres quelconques. L'un des exemples les plus simples, que nous allons voir maintenant, est celui de la K-théorie.

2.4. K-théorie

Nous avons présenté la K-théorie classique en partie 1.2. Pour l'étendre dans notre nouvelle géométrie, il faut commencer par comprendre ce que serait un fibré vectoriel « non commutatif ». La réponse à cette question est apportée par le théorème de Serre-Swan.

Définition. Soit A un anneau. Un A-module M est *projectif de type fini* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et un A-module N tels que $M \oplus N \simeq A^n$.

5. Il faut être un peu soigneux pour obtenir une vraie équivalence de catégories, voir [12].

Si X est un espace compact et E un fibré vectoriel sur X, on note $\Gamma(E)$ l'ensemble de ses sections continues.

Théorème (Serre-Swan, 1962)**.** *Le foncteur $E \mapsto \Gamma(E)$ induit une équivalence de catégories*

$$\{\textit{fibrés vectoriels sur } X\} \simeq \{C(X)\textit{-modules projectifs de type fini}\}.$$

Lorsqu'on remplace X par un espace non commutatif, l'algèbre $C(X)$ doit être remplacée par une C^*-algèbre A quelconque. Assez naturellement, on définit les « fibrés vectoriels » sur A comme étant simplement les A-modules projectifs de type fini.

En raisonnant par analogie avec le cas classique, on construit alors facilement le penchant non commutatif de la K-théorie. Comme en partie 1.2, on note $[M]$ la classe d'isomorphisme du A-module M.

Définition. Si A est une C^*-algèbre *unitaire*, on définit

$$K(A) = \{[M] - [N], M, N \text{ sont deux } A\text{-modules projectifs de type fini}\}.$$

Une C^*-algèbre unitaire est la généralisation d'un espace topologique compact. Lorsque A n'est pas unitaire, il faut donc définir sa K-théorie « à supports compacts ». Le groupe $K(A)$ obtenu est un invariant extrêmement utile pour la classification des C^*-algèbres, qui se comporte exactement comme son analogue classique (voir [17]). À noter que d'autres concepts usuels de la géométrie, comme par exemple la cohomologie de de Rham, se généralisent bien moins facilement. [6]

2.5. C^*-algèbre d'un groupe

Jusqu'ici, nous avons beaucoup parlé d'algèbre commutatives. On peut obtenir beaucoup d'exemples non commutatifs grâce à une construction classique, celle de la C^*-algèbre engendrée par un groupe. Dans toute cette section et par la suite, on dénotera par Γ un groupe discret.

Définition. *L'algèbre engendrée par* Γ, notée $\mathbb{C}\Gamma$, est l'ensemble des fonctions à support fini $f : \Gamma \to \mathbb{C}$, muni :

— de l'involution $f^*(\gamma) = \overline{f(\gamma^{-1})}$, et

— du produit de convolution $f * g(\gamma) = \sum_{\gamma_1\gamma_2=\gamma} f(\gamma_1)g(\gamma_2)$.

Pour obtenir une C^*-algèbre, il faut compléter $\mathbb{C}\Gamma$ par rapport à une certaine norme. Une façon de faire est de représenter $\mathbb{C}\Gamma$ en tant qu'opérateurs sur un espace de Hilbert :

Définition. La *représentation régulière* de Γ sur $l^2(\Gamma)$, notée λ_Γ, est donnée par

$$\lambda_\Gamma(f) \cdot \xi = f * \xi \qquad \text{pour tout } f \in \mathbb{C}\Gamma \text{ et } \xi \in l^2(\Gamma).$$

Définition (Algèbre réduite)**.** La *C^*-algèbre (réduite)* de Γ, notée $C^*_r(\Gamma)$, est la complétion de $\mathbb{C}\Gamma$ pour la norme $\|f\|_r = \|\lambda_\Gamma(f)\|$.

6. Pour plus de détails, lire l'ouvrage de Connes [6].

Il faut voir $C_r^*(\Gamma)$ comme une C^*-algèbre « engendrée » par Γ. Ainsi si Γ est commutatif, l'algèbre $C_r^*(\Gamma)$ l'est également. Dans ce cas, le théorème de Gel'fand-Naimark vu un peu plus tôt nous dit que

$$C_r^*(\Gamma) \simeq C_0(\hat{\Gamma}),$$

avec $\hat{\Gamma}$ le *dual* de Γ : il s'agit de l'ensemble des représentations irréductibles de Γ (qu'on appelle *caractères* dans le cas abélien).

Lorsque Γ n'est plus commutatif, l'espace $\hat{\Gamma}$ est assez compliqué à étudier du point de vue de la topologie. On préfère alors lui substituer $C_r^*(\Gamma)$, qui joue le rôle d'un « dual non commutatif ». L'étude de la C^*-algèbre d'un groupe est ainsi intimement liée à celle de ses représentations [7].

3. Conjecture de Baum-Connes

Lorsque Γ est un groupe discret quelconque, l'algèbre $C_r^*(\Gamma)$ peut s'avérer difficile à étudier. En 1994, Baum, Connes et Higson [3] ont proposé une manière géométrique de calculer le groupe de K-théorie $K(C_r^*(\Gamma))$.

3.1. Motivations

Supposons que Γ soit le groupe fondamental d'une variété M, avec D un opérateur elliptique sur M. Comme on l'a vu partie 1.1, ce dernier possède un indice dans $\mathbb{Z}$:

$$\mathrm{Index}(D) = \dim\ker(D) - \dim\operatorname{coker}(D).$$

Dans ses travaux sur la conjecture de Novikov, Lusztig [14] montre que D possède également un indice plus raffiné dans $K_c(\hat{\Gamma})$ (la construction est détaillée dans [3]). Mais lorsque Γ est abélien, l'algèbre $C_r^*(\Gamma)$ est isomorphe à $C_0(\hat{\Gamma})$ si bien que $K_c(\hat{\Gamma}) \simeq K(C_r^*(\Gamma))$. Autrement dit, D détermine en fait un indice

$$\mathrm{Index}_\Gamma(D) \in K(C_r^*(\Gamma)).$$

Grâce aux travaux d'Atiyah [1] puis de Kasparov [11], cette construction peut se généraliser grandement. On dit qu'un groupe discret Γ agit *proprement* sur un espace X si pour tous compacts K_1 et K_2 de X, l'ensemble des éléments $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$ est fini. Lorsque cette hypothèse est vérifiée, Kasparov définit une notion d'opérateur elliptique Γ-équivariant sur X. L'ensemble des opérateurs elliptiques, modulo homotopie, forme un groupe noté $K_\Gamma^{top}(X)$ et la construction de Lusztig se généralise en un morphisme d'indice :

$$\mathrm{Index}_\Gamma : K_\Gamma^{top}(X) \longrightarrow K(C_r^*(\Gamma)).$$

Chaque élément de $K_\Gamma^{top}(X)$ définit un « problème d'indice », et l'application Index_Γ associe à chacun de ces problèmes son indice analytique dans $K(C_r^*(\Gamma))$. L'idée de la conjecture de Baum Connes est de postuler que tous les éléments de $K(C_r^*(\Gamma))$ sont issus de ces problèmes d'indice.

3.2. Espace classifiant

Pour rendre cet énoncé plus précis, il faut introduire un « espace universel » qui va contenir tous les problèmes d'indice pour Γ :

Définition. On appelle *espace universel pour les actions propres* un espace topologique $\underline{E}\Gamma$ muni d'une action propre de Γ, qui vérifie la propriété universelle suivante : pour toute action propre de Γ sur un espace X, il existe une application continue Γ-équivariante $f : X \to \underline{E}\Gamma$, qui est unique à homotopie près.

Autrement dit, f fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, bend left] \arrow[d, bend right] & \underline{E}\Gamma \\ X \arrow[ur, "f"] & \end{tikzcd}$$

D'après sa définition, l'espace $\underline{E}\Gamma$ est unique à homotopie près. Il peut être réalisé concrètement dans de nombreux cas :

1. Si Γ est fini, toute action de Γ est propre : alors $\underline{E}\Gamma$ est réduit à un point.
2. Si Γ agit sur un arbre T tel que le stabilisateur de chaque sommet soit fini, alors $\underline{E}\Gamma = T$.
3. Dans le cas général, l'espace $\underline{E}\Gamma$ peut être réalisé comme un complexe simplicial dont les p-simplexes sont les ensembles de Γ à $p+1$ éléments.

L'espace universel « contient » tous les problèmes d'indice, au sens où si Γ agit proprement sur X et $f : X \to \underline{E}\Gamma$ est l'application associée, alors le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} K_\Gamma^{top}(X) \arrow[r, "\mathrm{Index}_\Gamma"] \arrow[d, "f"] & K(C_r^*(\Gamma)) \\ K_\Gamma^{top}(\underline{E}\Gamma) \arrow[ur, "\mathrm{Index}_\Gamma"'] & \end{tikzcd}$$

La conjecture de Baum-Connes, telle qu'elle est formulée dans [3], postule que toutes les classes de K-théorie de $C_r^*(\Gamma)$ sont issues de problèmes d'indice pour Γ :

Conjecture (Baum-Connes, 1994)**.** *L'application d'indice :*

$$\mathrm{Index}_\Gamma : K_\Gamma^{top}(\underline{E}\Gamma) \longrightarrow K(C_r^*(\Gamma))$$

est un isomorphisme.

Elle reste aujourd'hui un des grands problèmes non résolus de la géométrie non commutative, et constitue un thème de réflexion majeur.

4. Et maintenant ?

4.1. Conséquences de la conjecture

Toutes les constructions présentées se généralisent naturellement à des groupes qui ne sont plus discrets, mais seulement localement compacts. La conjecture s'exprime de la même manière :

Conjecture (Baum-Connes, 1994). *Soit G un groupe topologique localement compact. L'application d'indice :*

$$\mathrm{Index}_G : K_G^{top}(\underline{E}G) \longrightarrow K(C_r^*(G))$$

est un isomorphisme.

Il se trouve que $K_G^{top}(\underline{E}G)$ se décrit non seulement en termes analytiques comme « opérateurs elliptiques » sur $\underline{E}G$, mais aussi de façon bien plus géométrique (voir [4]). L'intérêt premier de la conjecture est donc d'établir un lien profond entre un objet géométrique ($K_G^{top}(\underline{E}G)$) et un autre beaucoup plus algébrique ($K(C_r^*(G))$).[7] Ainsi, la surjectivité de l'application Index_G a des conséquences dans la théorie des C^*-algèbres, en impliquant par exemple une conjecture antérieure :

Conjecture (Kadison-Kaplansky, 1949). *Si G est un groupe localement compact sans torsion, alors $C_r^*(G)$ ne contient pas d'idempotents autres que 0 et 1.*

Dans l'autre sens, l'injectivité de l'application de Baum-Connes a de profondes implications en topologie. L'une d'entre elles est la *conjecture de Novikov* que nous avons énoncée partie 1.3 :

Conjecture (Novikov, 1970). *Si M est une variété compacte, alors ses signatures de rang supérieur sont des invariants d'homotopie.*

4.2. État des lieux

On ne sait pas aujourd'hui si la conjecture est vraie en toute généralité, mais elle a été démontrée pour un grand nombre de groupe. Notamment :

— dans l'article de Baum, Connes et Higson de 1994, la conjecture était connue pour les groupes de Lie moyennables, ainsi que les groupes de Lie résolubles et simplement connexes ;

— en 1997, Kasparov et Higson [9] ont montré la conjecture pour les groupes agissant proprement continûment par isométries sur un espace de Hilbert : c'est la *propriété de Haagerup*, qui est concerne en particulier groupes moyennables et groupes libres ;

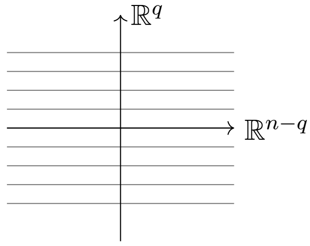
7. C'est en fait cette description géométrique qui était employée dans la première formulation de la conjecture de Baum-Connes, en 1982. Cependant la description analytique permise par les travaux de Kasparov était nécessaire pour interpréter correctement l'application $K_G^{top}(\underline{E}G) \to K(C_r^*(G))$, ce qui a mené à la formulation de la conjecture que nous avons exposée plus haut.

— jusqu'en 1998, le plus gros problème était posé par la propriété (T) : il s'agit d'une propriété de rigidité que possèdent certains groupes, et qui empêchait de démontrer la surjectivité de l'application de Baum-Connes avec les techniques antérieures. Vincent Lafforgue [13] a été le premier à franchir cet obstacle en démontrant la conjecture pour un certain nombre de groupes ayant la propriété (T).

Aucun progrès significatif n'a été fait depuis cette dernière percée, bien que l'injectivité de l'application de Baum-Connes soit connue pour un plus grand nombre de groupes. Un exemple typique de groupe dont on *ne sait pas* s'il vérifie la conjecture est $SL_3(\mathbb{Z})$, qui possède justement la propriété (T) : dans ce cas l'injectivité est connue, mais pas la surjectivité.

4.3. Extensions

La conjecture de Baum-Connes peut être assez naturellement étendue à d'autres contextes dans lequel la géométrie non commutative joue un rôle important. Prenons l'exemple des feuilletages : si M est une variété différentielle de dimension n, un *feuilletage* de M de codimension q n'est rien d'autre qu'une partition de M en sous-variétés, telle que l'image locale ressemble au feuilletage de $\mathbb{R}^n$ par $\mathbb{R}^{n-q}$:



Toute variété feuilletée $(M, \mathcal{F})$ se voit associer une C^*-algèbre $C^*(M, \mathcal{F})$ qui permet d'étudier « l'espace des feuilles ». Pour déterminer la K-théorie de $C^*(M, \mathcal{F})$, Connes [5] a construit des groupes géométriques $K^{top}(M, \mathcal{F})$, et formulé la conjecture : [8]

Conjecture (Baum-Connes pour feuilletages, 1982)**.** *L'application « d'indice »*

$$\mu : K^{top}(M, \mathcal{F}) \longrightarrow K(C^*(M, \mathcal{F}))$$

est un isomorphisme.

Il existe également une formulation de la conjecture de Baum-Connes dans le cadre de la géométrie « à grande échelle » [9], ou une conjecture avec coefficients... Toutes ces versions différentes peuvent être unifiées en introduisant le concept de *groupoïde* : un

8. En fait antérieure à la forme actuelle de la conjecture de Baum-Connes pour les groupes, qui ne sera énoncée qu'en 1994.

9. Dans ce contexte, on ne se préoccupe que des propriétés asymptotiques des espaces topologiques étudiés. Ce cadre a été largement étudié par Roe [16], et permet d'ailleurs de formuler une version du théorème de l'indice d'Atiyah-Singer pour les variétés non compactes.

groupoïde $\mathcal{G}$ est un objet qui partage beaucoup de propriétés avec les groupes, tout en étant un peu plus flexible. Comme dans le cas des groupes, on peut construire une C^*-algèbre $C^*_r(\mathcal{G})$ « engendrée » par le groupoïde. En ajoutant certaines hypothèses, on obtient la forme la plus générale de la conjecture de Baum-Connes :

Conjecture (Baum-Connes pour groupoïdes, 1999)**.** *Si $\mathcal{G}$ est un groupoïde suffisamment régulier, alors l'application « d'indice »*

$$\mu : K^{top}(\mathcal{G}) \longrightarrow K(C^*_r(\mathcal{G}))$$

est un isomorphisme.

Malheureusement, Higson, Lafforgue et Skandalis [10] ont montré que toutes ces généralisations sont fausses en général. Les contre-exemples exhibés sont néanmoins relativement singuliers, et on peut espérer que ces conjectures restent vraies pour une classe suffisament large de groupoïdes. La conjecture de Baum-Connes sur les groupes, elle, reste toujours ouverte.

Références

[1] M. F. Atiyah. « Global theory of elliptic operators ». In : *Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics (Tokyo, 1969)*. Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1970, p. 21–30.

[2] M. F. Atiyah et I. M. Singer. « The index of elliptic operators on compact manifolds ». In : *Bull. Amer. Math. Soc.* 69 (1963), p. 422–433.

[3] Paul Baum, Alain Connes et Nigel Higson. « Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras ». In : *C^*-algebras : 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993)*. T. 167. Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 240–291.

[4] Paul Baum et Ronald G. Douglas. « K homology and index theory ». In : *Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980)*. T. 38. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982, p. 117–173.

[5] Alain Connes. « A survey of foliations and operator algebras ». In : *Operator Algebras and Applications*. T. 38. Proceedings of the Symposium on Pure Mathematics. American Mathematical Society, 1982, p. 521–628. URL : www.alainconnes.org/docs/foliationsfine.ps.

[6] Alain Connes. *Noncommutative geometry*. Academic Press, 1994. URL : http://www.alainconnes.org/docs/book94bigpdf.pdf.

[7] Jacques Dixmier. *Les C^*-algèbres et leurs représentations*. T. 39. Cahiers Scientifiques. Gauthier-Villars & Cie, 1964.

[8] Steven C. Ferry, Andrew Ranicki et Jonathan Rosenberg. « A history and survey of the Novikov conjecture ». In : *Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 1 (Oberwolfach, 1993)*. T. 226. London Math. Soc. Lecture Note Ser. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, p. 7–66. URL : www.maths.ed.ac.uk/~aar/papers/history.pdf.

[9] Nigel Higson et Gennadi Kasparov. « Operator K-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space ». In : *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* 3 (1997), p. 131–142.

[10] Nigel Higson, Vincent Lafforgue et Georges Skandalis. « Counterexamples to the Baum-Connes conjecture ». In : *Geometric and Functional Analysis* 12 (2002), p. 330–354.

[11] G. G. Kasparov. « Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture ». In : *Invent. Math.* 91.1 (1988), p. 147–201.

[12] Masoud Khalkhali. *Basic noncommutative geometry.* Series of Lectures in Mathematics. European Mathematical Society, 2009.

[13] Vincent Lafforgue. « Une démonstration de la conjecture de Baum-Connes pour les groupes réductifs sur un corps p-adique et pour certains groupes discrets possédant la propriété (T) ». In : *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 327.5 (1998), p. 439–444.

[14] Gheorghe Lusztig. « Novikov's higher signature and families of elliptic operators ». In : *J. Differential Geometry* 7 (1972), p. 229–256.

[15] S. P. Novikov. « Algebraic construction and properties of Hermitian analogs of K-theory over rings with involution from the viewpoint of Hamiltonian formalism. Applications to differential topology and the theory of characteristic classes. I. II ». In : *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 34 (1970).

[16] John Roe. *Index Theory, Coarse Geometry and topology of manifolds.* T. 90. Regional conference series in mathematices. Conference Board of the mathematical science, 1996.

[17] Mikael Rørdam, Flemming Larsen et Niels Laustsen. *An Introduction to K-theory for C^*-algebras.* T. 49. London Mathematical Society Students Texts. Cambridge University Press, 2000.