.1 Entiers de Cayley $\widehat{\mathbb{O}}$

.1.1 Introduction

De la même façon que les Entiers de Gauss permettent de définir une notion d'entiers dans $\mathbb{C}$, que les Quaternions de Hurwitz permettent la même chose pour les quaternions, il est naturel de penser à une construction semblable pour les octonions, et plus généralement pour toutes les algèbres.

La question a émergée au XIX$^{\text{ième}}$ siècle, mais est encore étudiée aujourd'hui, dans son histoire, on rencontre, entre autres :

1. John Thomas Graves, un mathématicien irlandais (1806 - 1870).
2. Arthur Cayley, un mathématicien britannique (1821 - 1895).
3. Christian Felix Klein, un mathématicien allemand (1849 - 1925).
4. Leonard Eugene Dickson, est un mathématicien américain (1874 - 1954).
5. Harold Scott MacDonald Coxeter, un mathématicien britannique (1907 - 2003).
6. John Horton Conway, un mathématicien anglais (1937 -).
7. Johannes Kirmse, un mathématicien allemand.

.1.2 Définition

Soit $(\mathbb{K}, +, \times, \cdot)$ une algèbre unitaire de dimension n sur un corps de caractéristique 0 [1], munie d'une involution (qui sera notée $^{-}$).

Il existe de nombreuses définitions (et un vocabulaire tout aussi varié), nous avons pris le parti de choisir la définition de L. E. Dickson

On appelle « Ensembles des entiers de $\mathbb{K}$ » ou « Arithmétique de $\mathbb{K}$ » un sous-ensemble $\mathfrak{A} \subset \mathbb{K}$ avec les propriétés suivantes :

① $\mathfrak{A}$ est clos par addition, soustraction et multiplication.

② $\forall x \in \mathfrak{A}((x + \overline{x} \in \mathbb{Z}) \wedge (x \cdot \overline{x} \in \mathbb{Z}))$ [2]

③ Si $< e_k >_{k<n}$ est la base canonique de $\mathbb{K}$, $\bigwedge\limits_{k<n} (e_k \in \mathfrak{A})$

④ $\mathfrak{A}$ est maximal pour les propriétés ci-dessus.

Il est immédiat que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}$, et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors $\mathfrak{A} = \mathbb{Z}[i]$, les Entiers de Gauss, la propriété ② permet d'établir trivialement ces deux résultats.

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, il y a deux candidats qui sautent aux yeux : Les Quaternions de Lipschitz $\mathbb{H}(\mathbb{Z})$ et les Quaternions de Hurwitz $\widetilde{\mathbb{H}}(\mathbb{Z})$, c'est la condition ④ ci-dessus qui permet d'élire les Quaternions de Hurwitz comme l'arithmétique de $\mathbb{H}$.

.1.3 Mode de construction

Nous noterons un octonions sous la forme $x = \sum\limits_{n=0}^{7} x_n e_n$ (rappelons que $e_0 = 1$).

Le premier candidat est l'ensemble des « **Nombres de Graves** » c'est à dire $\mathbb{O}(\mathbb{Z})$, l'équivalent des Quaternions de Lipschitz : les Octonions à coefficients entiers, on démontre facilement que les Nombres de Graves vérifient les conditions ①, ② et ③.

Dans le cas des Octonions, il est immédiat que

- $x + \overline{x} = 2x_0$
- $x \cdot \overline{x} = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2$

1. Pratiquement, nous ne parlerons que de $\mathbb{R}$-Algèbres
2. On a bien $\mathbb{Z} \subset \mathbb{K}$, puisque le corp de base de $\mathbb{K}$ est de caractéristique 0.

On en déduit immédiatement que $2x_0 \in \mathbb{Z}$, par stabilité de la multiplication, on en déduit que $\bigwedge_{n=0}^{7} (2x_n \in \mathbb{Z})$.
Mais cette condition est trop faible (par exemple $\frac{1}{2}$ ne peut pas être dans l'arithmétique puisque $x \cdot \overline{x} = \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$), la condition $x \cdot \overline{x} \in \mathbb{Z}$ se traduit facilement en : seules 0, 4 ou 8 des coordonnées peuvent être des facteurs impairs de $\frac{1}{2}$; là encore la condition est trop lâche, puisque cet ensemble n'est pas stable par addition, par exemple, la somme suivante ne vérifie pas la condition :

$$\frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) + \frac{1}{2}(e_1 + e_2 + e_3 + e_5) = (e_1 + e_2 + e_3) + \frac{1}{2}(e_4 + e_5)$$

Un deuxième candidat est l'ensemble des ≪ **Nombres de Klein** ≫ c'est à dire les nombres de Graves auxquels on ajoute les nombres dont toutes les coordonnées sont des facteurs impairs de $\frac{1}{2}$, on démontre facilement que les Nombres de Klein vérifient les conditions ①, ② et ③, mais pas la condition ④.

Un troisième candidat que l'on pourrait appeler les ≪ **Nombres de Kirmse** ≫ mais que Conway a baptisé les ∞-entiers pour des raisons de notations que nous n'avons pas conservées, car trop éloignées de celles utilisées dans ce document, est constitué des Nombres de Klein enrichi des nombres dont les coordonnées multiples impairs de $\frac{1}{2}$ correspondent à des familles générant une sous-algèbre isomorphe aux quaternions $\mathbb{H}$, c'est à dire :

$$\begin{array}{llll} (1, & i, & j, & k) \\ (1, & i, & e_4, & e_5) \\ (1, & i, & e_6, & e_7) \\ (1, & j, & e_4, & e_6) \\ (1, & j, & e_5, & e_7) \\ (1, & k, & e_4, & e_7) \\ (1, & k, & e_5, & e_6) \end{array} \text{ ou leur complémentaire } \begin{array}{llll} (e_4, & e_5, & e_6, & e_7) \\ (j, & k, & e_6, & e_7) \\ (j, & k, & e_4, & e_5) \\ (i, & k, & e_5, & e_7) \\ (i, & k, & e_4, & e_6) \\ (i, & j, & e_5, & e_6) \\ (i, & j, & e_4, & e_7) \end{array}$$

Les nombres de Kirmse possèdent une propriété nécessaire : 2 éléments quelconques on toujours 0, 2, 4 ou 8 coordonnées multiples impairs de $\frac{1}{2}$ en commun, redonnant à chaque fois un nombre de Kirmse quand on les somme, par exemple :
Un élément de type $(1, i, e_4, e_5)$ plus un élément de type (i, j, e_5, e_6) donne un élément de type $(1, j, e_4, e_6)$ qui est aussi un nombre de Kirmse.

Malheureusement pour Kirmse, cet ensemble n'est pas clos par multiplication , comme le montre le produit suivant qui n'est pas un nombre de Kirmse :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(1+i+j+k)\tfrac{1}{2}(1+i+e_4+e_5) &= \tfrac{1}{4}(1+i+e_4+e_5+i-1+e_5-e_4+ \\ &\quad j-k+e_6+e_7+k+j+e_7-e_6) \\ &= \tfrac{1}{2}(i+j+e_5+e_7) \end{aligned}$$

Johannes Kirmse est désormais surtout connu pour avoir publié (en 1925) que ces nombres étaient clos par multiplication, ce qui est donc faux et est universellement connu sous le nom ≪ L'Erreur de Kirmse ≫.

C'est d'autant plus dommage qu'en interchangeant 1 avec n'importe quel autre unité, dans les 14 éléments de la liste précédente, on obtient 7 listes ... qui fonctionnent toutes et fournissent ainsi 7 arithmétiques différentes pour les octonions (la démonstration de la maximalité est un peu technique mais guère difficile cf. la thèse de D. Ghatei dans les références ci-dessous).

Par exemple en intervertissant les rôles de 1 et de i, on obtient :

$$\begin{array}{llll} (1, & i, & j, & k) \\ (1, & i, & e_4, & e_5) \\ (1, & i, & e_6, & e_7) \\ (i, & j, & e_4, & e_6) \\ (i, & j, & e_5, & e_7) \\ (i, & k, & e_4, & e_7) \\ (i, & k, & e_5, & e_6) \end{array} \text{ et leur complémentaire } \begin{array}{llll} (e_4, & e_5, & e_6, & e_7) \\ (j, & k, & e_6, & e_7) \\ (j, & k, & e_4, & e_5) \\ (1, & k, & e_5, & e_7) \\ (1, & k, & e_4, & e_6) \\ (1, & j, & e_5, & e_6) \\ (1, & j, & e_4, & e_7) \end{array}$$

.1.4 Table de multiplication

La table de multiplication des entiers de Cayley est, évidemment la même que celle des octonions, elle ne présente pas d'intérêt particulier, par contre nous pouvons donner un aperçu de la multiplication de quelques éléments dont les coefficients multiples impairs de $\frac{1}{2}$ appartiennent à la famille ci-dessus.

$\times$	$\frac{1}{2}(1,i,j,k)$	$\frac{1}{2}(i,j,e_4,e_6)$	$\cdots$	$\frac{1}{2}(1,k,e_5,e_7)$	$\frac{1}{2}(1,j,e_4,e_7)$
$\frac{1}{2}(1,i,j,k)$	$\frac{1}{2}(1,i,j,k)$	$\frac{1}{2}(1,j,e_5,e_6)$	$\cdots$	$\frac{1}{2}(i,k,e_4,e_7)$	$\frac{1}{2}(j,k,e_6,e_7)$
$\frac{1}{2}(i,j,e_4,e_6)$	$\frac{1}{2}(1,i,e_4,e_5)$	$\varnothing$	$\cdots$	$\frac{1}{2}(i,k,e_5,e_6)$	$\frac{1}{2}(1,k,e_4,e_6)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\frac{1}{2}(1,k,e_5,e_7)$	$\frac{1}{2}(j,k,e_4,e_5)$	$\frac{1}{2}(j,k,e_4,e_5)$	$\cdots$	$\frac{1}{2}(1,k,e_5,e_7)$	$\frac{1}{2}(i,j,e_5,e_7)$
$\frac{1}{2}(1,j,e_4,e_7)$	$\frac{1}{2}(i,j,e_4,e_6)$	$\frac{1}{2}(1,i,j,k)$	$\cdots$	$\frac{1}{2}(i,k,e_4,e_7)$	$\frac{1}{2}(1,j,e_4,e_7)$

.1.5 Conjugué, Module, Norme, Forme Polaire et Inverse

Les entiers de Cayley étant un sous-ensemble des Octonions, ces notions restent les mêmes (mais l'inverse n'existe que pour les éléments de norme 1).

.1.6 Propriétés algébriques

Par définition d'une arithmétique, $(\widehat{\mathbb{O}},+,\cdot)$ est un sous-anneau unitaire de $(\mathbb{O},+,\cdot)$.

De la même façon que les Entiers de Gauss, les Entiers de Eisenstein et les Quaternions de Hurwitz (voir aussi ci-dessous), les Entiers de Cayley définissent un réseau (dans le bon espace euclidien) qui a reçu le nom de réseau E_8.

Nombres de Cayley de norme 1 sont faciles à déterminer, ils sont de 2 types :

Les unités de base	:	$\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k, \pm e_4, \pm e_5, \pm e_6, \pm e_7$
Pour chacun des 14 quadruplets $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$	:	$\frac{1}{2}(\pm\alpha\pm\beta\pm\gamma\pm\delta)$

Soit un total de $2*8+14*2^4=240$ éléments, on peut en voir une image 3D, ou une image 2D.

En dimension 8, l'empilement le plus dense de sphères de même taille consiste à placer 240 sphères en chacun des points correspondants aux entiers de Cayley de norme 1.

.1.7 Synonymes, Isomorphismes, Exemples

Si, dans la définition d'une arithmétique, on remplace les condition ③ et ④ par les condition ❸ et ❹ ci-dessous, on obtient la définition d'un autre objet, pafois appelé ≪ Ordre ≫ et parfois appelé ≪ Système d'Entiers de Base ≫ :

① $\mathfrak{A}$ est clos par addition, soustraction et multiplication.
② $\forall x \in \mathfrak{A}((x+\overline{x}\in\mathbb{Z})\wedge(x\cdot\overline{x}\in\mathbb{Z}))$ [3]
❸ $1\in\mathfrak{A}$
❹ $\mathfrak{A}$ forme un réseau sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel sous-jacent.

Les possibilités en dimension 1 à 8 mettent en œuvre quatre méthodes :

Méthode de Gauss : Uniquement les éléments de $\mathbb{K}$ dont toutes les coordonnées sont entières.
Méthode d'Eisenstein : Introduction d'une racine cubique de 1.
Méthode de Hurwitz : Méthode de Gauss, mais on ajoute la demi-somme de toutes les unités.
Méthode de Cayley : Méthode de Hurwitz, mais on ajoute la demi-somme de certains groupes (bien choisi) de 4 unités.

Dans le tableau ci-dessous, le nombre à gauche du nom est le nombre de systèmes d'entiers existant et celui de droite est le nombre d'unités (entiers de norme 1). Bien sûr, les cellules sur fond bleu correspondent aux arithmétiques de l'algèbre considérée.

Méthode	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{O}$
Gauss	1 Relatifs 2	1 Gauss 4	1 Lipschitz 8	1 Graves 16
Eisenstein		1 Eisenstein_2 6	1 Eisenstein_4 12	1 Eisenstein_8 24
Hurwitz			1 Hurwitz 24	1 Klein 48
Cayley				7 Cayley 240

3. On a bien $\mathbb{Z}\subset\mathbb{K}$, puisque le corp de base de $\mathbb{K}$ est de caractéristique 0.

.1.8 Utilisation en physique

Le réseau E_8 est utilisé en théorie des cordes, super-gravité, et, bien sûr, par Anthony Garrett Lisi et sa (controversée) ≪ Théorie du Tout Exceptionnellement Simple ≫.

.1.9 Références

1. L. E Dickson, *Further development of the theory of arithmetics of algebras*, Proceedings of the International Mathematical Congress, Toronto, 1924, University of Toronto, pages 173 - 184, 1924.
2. D. Ghatei, *The Octonions*, Thèse soumise à l'Université de Birmingham, 91 pages, 2013.
3. M. Koca, *Integral Octonions And E(8)*, International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Volume 86, N° 224, 13 pages, 1986.
4. P. Boddington & D. Rumynin, *On Curtis' theorem about finite octonionic loops*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 135, N° 6, Pages 1651–1657, Juin 2007.
5. A. G. Lisi, *An Exceptionally Simple Theory of Everything*, 30 pages, 2007.