I Roue des fractions

Jesper Carlström est un logicien suédois, qui s'est posé une question que l'on trouve souvent sur des forums mathématiques :

Pourquoi ne peut-on pas diviser par 0 ?

La réponse de Carlström est, a priori, étonnante : *Mais on peut !*

I.1 Construction de la Roue des fractions de $\mathbb{Z}$

Carlström est parti de la méthode habituelle de construction de l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ à partir de l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$ (et d'une façon plus générale, la construction de l'anneau des fractions d'un anneau, mais nous en resterons à $\mathbb{Z}$) :

Dans le cas classique, on commence par créer une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$, que nous noterons ici $\overset{\mathbb{Z}^\star}{\sim}$ par $(a,b) \overset{\mathbb{Z}^\star}{\sim} (a',b') \Leftrightarrow ab' = a'b$, et, bien sûr, on note $\mathbb{Q} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star / \overset{\mathbb{Z}^\star}{\sim}$, puis on définit une addition, une multiplication (sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$, qui soit compatible avec le quotient) et une injection canonique $\pi : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Q}$ (qui permet d'identifier $\mathbb{Z}$ avec un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$).

Comme la classe de (a,b) est tout simplement le nombre que nous notons habituellement $\dfrac{a}{b}$ (par définition), on pourrait se dire qu'il suffit de définir la même relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, malheureusement, dans ce cas, la relation précédente n'est plus une relation d'équivalence.

L'idée de Carlström[1] fut de redéfinir la relation d'équivalence, que nous noterons $\overset{\mathbb{Z}}{\sim}$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de la façon suivante : $(a,b) \overset{\mathbb{Z}}{\sim} (a',b') \Leftrightarrow \exists x \exists y ((x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \wedge ((xa, xb) = (ya', yb')))$

Puis on définit l'addition la multiplication, et l'injection canonique de la façon habituelle.

On définit en plus une involution notée / : $/\overline{(a,b)} = \overline{(b,a)}$ [2]

La Roue[3] des Fractions de $\mathbb{Z}$ est alors définie par $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \underset{\sim}{\mathbb{Z}} (+, \times, /)$.

Malheureusement la Roue des fractions a perdu beaucoup de propriétés par rapport à l'Anneau des fractions (qui est même un corps dans le cas de $\mathbb{Z}$) :

- L'addition n'est plus un groupe, elle n'est même pas régulière.
- La multiplication n'est plus régulière.
- La relation $0x = 0$ n'est même pas conservée.

En tout état de cause la division par 0 n'est pas passionnante, mais avant de voir pourquoi, nous allons montrer que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \underset{\sim}{\mathbb{Z}} = \mathbb{Q} \bigcup \{/0, 0/0\}$

Nous noterons :

$$\begin{cases} 0 & = \overline{(0,1)} \\ 1 & = \overline{(1,1)} \\ /0 & = \overline{(1,0)} \\ 0/0 & = \overline{(0,0)} \end{cases}$$

$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star \ \forall (a',b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ (((a,b) \overset{\mathbb{Z}}{\sim} (a',b')) \Rightarrow (b' \neq 0))$

Autrement dit :

$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star \ \forall (a',b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ (((a,b) \overset{\mathbb{Z}}{\sim} (a',b')) \Rightarrow (((a',b') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star) \wedge ((a,b) \overset{\mathbb{Z}^\star}{\sim} (a',b'))))$

C'est à dire que pour $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\star$, l'ensemble des classes est le même pour la relation $\overset{\mathbb{Z}}{\sim}$ que pour $\overset{\mathbb{Z}^\star}{\sim}$, c'est à dire que l'on retrouve $\mathbb{Q}$ naturellement dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \underset{\sim}{\mathbb{Z}}$.

Il est trivial que $\forall n \in \mathbb{Z}^\star \ \forall m \in \mathbb{Z}^\star \ ((n,0) \overset{\mathbb{Z}}{\sim} (m,0))$.

Et tout aussi trivial que $\overline{(0,0)} = \{(0,0)\}$.

1. L'idée de Carlström est plus générale que ce que nous allons montrer, de la même façon que l'anneau des fractions d'un anneau est une idée plus générale que le corps des fractions de $\mathbb{Z}$
2. $\overline{(a,b)}$ désigne la classe de (a,b).
3. Nom donné par J. Carlström, pour remplacer Anneau des Fractions

Le quotient contient donc une image de $\mathbb{Q}, /0$ et $0/0$, c'est à dire que $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/\underset{\sim}{\mathbb{Z}} = \mathbb{Q}\bigcup\{/0, 0/0\}$.

Comme nous l'avons annoncé, la division par 0 est très limitée : diviser par 0, c'est exactement multiplier par $/0$, or $\overline{(a,b)}\cdot\overline{(1,0)} = \overline{(a,0)}$ qui ne peut être égal qu'à $/0$ ou à $0/0$ (et ne dépend que de a). En particulier $0\ (/0) = 0/0$, ce qui est un exemple où $0x \neq 0$.

On peut résumer les opérations sur les classes d'équivalence, que nous noterons $\overline{(a,b)} = \dfrac{a}{b}$:

- $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a'}{b'} = \dfrac{ab' + a'b}{bb'}$
- $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a'}{b'} = \dfrac{aa'}{bb'}$
- $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b}$
- $\left(\dfrac{1}{\frac{a}{b}}\right) = \dfrac{b}{a}$

La définition de la somme doit être appliquée strictement et non en utilisant les simplifications usuelles sur $\mathbb{Q}$ (ce point est visible dans le calcul de $\dfrac{1}{0} + \dfrac{1}{0}$, par exemple, il ne faudrait pas faire la somme des numérateurs sous le seul prétexte que les dénominateurs sont égaux).

$+$	q	$/0$	$0/0$
p	$p+q$	$/0$	$0/0$
$/0$	$/0$	$0/0$	$0/0$
$0/0$	$0/0$	$0/0$	$0/0$

$\cdot$	$q \neq 0$	0	$/0$	$0/0$
$p \neq 0$	pq	0	$/0$	$0/0$
0	0	0	$0/0$	$0/0$
$/0$	$/0$	$0/0$	$/0$	$0/0$
$0/0$	$0/0$	$0/0$	$0/0$	$0/0$

x	$-x$	x^{-1}
$p \neq 0$	$-p$	$\frac{1}{p}$
0	0	$/0$
$/0$	$/0$	0
$0/0$	$0/0$	$0/0$

I.2 Définition axiomatique de la structure de Roue

La théorie des Roues est une théorie du premier ordre sur le langage $\mathcal{L} = (+, \cdot, -, ^{-1}, 1, 0, \infty, \perp)$ [4] où $+$ et $\cdot$ sont des opérations (fonctions binaires), $-$ et $^{-1}$ sont des fonctions unaires, $1, 0, \infty$ et $\perp$ sont des symboles de constantes.

4. Ce langage est redondant, certains symboles étant définissables à l'aide des autres, mais cela simplifie les définitions

Commutativité	$\forall x\ \forall y\ (x + y = y + x)$
	$\forall x\ \forall y\ (x \cdot y = y \cdot x)$
Associativité	$\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((x + y) + z = x + (y + z))$
	$\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$
Distributivité	$\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((z \neq \infty) \Rightarrow ((x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z)))$
Eléments neutres	$\forall x\ (x + 0 = x)$
	$\forall x\ (x \cdot 1 = x)$
Symétriques	$\forall x\ ((x \notin \{\infty, \perp\}) \Rightarrow (x + (-x) = 0))$
	$\forall x\ ((x \notin \{0, \infty, \perp\}) \Rightarrow (x \cdot \frac{1}{x} = 1))$
Définition de $\infty, \perp$	$\infty = \frac{1}{0}$
	$\perp = 0 \cdot \infty$
Propriétés de $\perp$	$\forall x\ (x \cdot \perp = \perp)$
	$\forall x\ (x + \perp = \perp)$
	$-\perp = \perp$
	$\frac{1}{\perp} = \perp$
Propriétés de ∞	$\forall x\ ((x \notin \{\infty, \perp\}) \Rightarrow (x + \infty = \infty))$
	$\infty + \infty = \perp$
	$\forall x\ ((x \notin \{\infty, \perp\}) \Rightarrow (x \cdot \infty = \infty))$
	$-\infty = \infty$
	$\frac{1}{\infty} = 0$
Non-trivialité	$0 \neq 1$

Les tableaux précédents peuvent être ré-écrits sous la forme :

$+$	q	∞	$\perp$
p	$p+q$	∞	$\perp$
∞	∞	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

$\cdot$	$q \neq 0$	0	∞	$\perp$
$p \neq 0$	pq	0	∞	$\perp$
0	0	0	$\perp$	$\perp$
∞	∞	$\perp$	∞	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

x	$-x$	x^{-1}
$p \neq 0$	$-p$	$\frac{1}{p}$
0	0	∞
∞	∞	0
$\perp$	$\perp$	$\perp$

Deux théorèmes importants :
Théorème : *Si $\mathcal{A}$ est un anneau intègre, sa roue des fractions est une roue.*

Théorème : *Si $(\mathcal{W}, +, \cdot, -, ^{-1}, 1, 0, \infty, \perp)$ est une roue, alors $(\mathcal{W} \setminus \{\infty, \perp\}, +, \cdot, -, ^{-1}, 1, 0)$ est un corps commutatif.*