C Preuve du théorème de Lindemann-Weierstrass

Théorème de Lindemann-Weierstrass : *Soient $\alpha_1, ..., \alpha_t, b_1, ..., b_t$ des nombres algébriques avec les α_i deux à deux distincts et les b_i non nuls ; alors*

$$b_1 e^{\alpha_1} + ... + b_t e^{\alpha_t} \neq 0$$

Preuve :

Je vais ici commencer par présenter la trame générale de la preuve qui parait assez simple, mais repose sur un lemme, beaucoup plus technique, que je démontrerais par la suite.

Considérons

$$b_1 e^{\alpha_1 x} + ... + b_t e^{\alpha_t x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$$

avec

$$u_n = \sum_{i=1}^{t} b_i \alpha_i^n$$

Considérons

$$v_n = n! \sum_{r=0}^{n} \frac{u_r}{r!}$$

On montre que :

Lemme (démontré plus loin) :

$$v(X) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n X^n \in \mathbb{Q}(X)$$

Remarquons que

$$\frac{v_n}{n!} - \frac{v_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{u_n}{n!}$$

Ainsi :

$$v_n - n v_{n-1} = u_n$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (v_n - n v_{n-1}) X^n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{i=1}^{t} b_i \alpha_i^n) X^n = \sum_{i=1}^{t} b_i \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_i X)^n = \sum_{i=1}^{t} \frac{b_i}{1 - \alpha i X}$$

Cela signifie que

$$-X^2 \frac{dV(X)}{dX} + (1 - X)V(X) = \sum_{i=1}^{t} \frac{b_i}{1 - \alpha i X}$$

Or, $V(X) \in \mathbb{Q}(X)$ donc les pôles non nuls du membre de gauche ont un ordre au moins 2 tandis que les pôles du membres de droite sont d'ordre 1 (les α_i étant deux à deux distincts), d'où la contradiction qui conclut alors cette preuve. $\square$