

- Suites récurrentes linéaires simples.

Soit a, b, c trois réels. On cherche à étudier les suites réelles (u_n) vérifiant

$$(1) \quad au_{n+1} + bu_n = c$$

1. Montrer qu'il existe une suite constante, notée (v_n) , solution de l'équation (1), dès lors que $a + b \neq 0$.
2. Que peut-on dire de (u_n) si $a + b = 0$?
3. Montrer que toute solution (u_n) de (1) peut s'écrire

$$u_n = v_n + w_n, \quad \text{où } (w_n) \text{ est solution de } \quad aw_{n+1} + bw_n = 0.$$

4. exprimer (w_n) puis (u_n) en fonction de n .

- Suites récurrentes linéaires doubles.

Soit a, b, c, d quatre réels. On cherche à étudier les suites réelles (u_n) vérifiant

$$(2) \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d$$

1. Chercher une solution particulière (v_n) de (2). On pourra distinguer selon les cas suivants :
 - $a + b + c \neq 0$,
 - $a + b + c = 0$ et $2a + b \neq 0$,
 - $a + b + c = 2a + b = 0$.

2. Montrer que $u_n = v_n + w_n$, où (w_n) est solution de

$$(3) \quad aw_{n+2} + bw_{n+1} + cw_n = 0.$$

3. Chercher des solutions de (3) sous la forme $w_n = q^n$, où q est solution d'une équation quadratique (Q) à déterminer.
 - Si le discriminant Δ de (Q) est strictement positif, montrer que toute solution (w_n) de (3) s'écrit $w_n = Aq_1^n + Bq_2^n$, où A, B sont des réels quelconques et q_1, q_2 les solutions de (Q).
 - Si $\Delta = 0$, chercher également des solutions de la forme $w_n = nq^n$ puis trouver la forme générale de w_n .
 - Enfin, si $\Delta < 0$, poser $R = \sqrt{c/a}$, $\alpha = \arctan \frac{\sqrt{|\Delta|}}{b}$ et montrer qu'il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $w = AR^n \cos(\alpha n) + BR^n \sin(\alpha n)$.
4. Conclure.