TACS EN VRAC (SUP)

(TAC : Théorème à citer)

1. ALGEBRE

• Soit A un anneau. Soit $(a,b)\in A^2$. Si a et b commutent ($ab=ba$), alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ (a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k} \quad \text{et} \quad a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^k b^{n-k-1}$$

Souvent, $a=1=1_A$

Si $A\in M_n(\mathrm{K})$ avec $A^p=0$, $(I_n-A)\sum_{k=0}^{p-1}A^k=I_n-A^p=I_n \Rightarrow (I_n-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{p-1}A^k$

• Formule de Pascal : $\binom{n+1}{p+1}=\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1}$ $(0\le p<n)$

$\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{1}=n$, $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

• $P\in\mathrm{K}[\mathrm{X}]$. $a\in\mathrm{K}$ racine de P de multiplicité n $\Leftrightarrow$ $P(a)=\ldots=P^{(n-1)}(a)=0$ et $P^{(n)}(a)\neq 0$.

• Théorème de Bezout dans $\mathbb{Z}$ ou dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$:

$A\wedge B=1 \Leftrightarrow \exists (U,V)\in(\mathrm{K}[\mathrm{X}])^2$ tq $AU+BV=1$

• Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ ou dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$:

$\forall (A,B)\in \mathrm{K}[\mathrm{X}]\times\mathrm{K}[\mathrm{X}]^*$, $\exists!(Q,R)\in(\mathrm{K}[\mathrm{X}])^2$ tq $A=BQ+R$ et $\deg(R)<\deg(B)$

• Théorème de Gauss dans $\mathbb{Z}$ ou dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$: ($A\wedge B=1$ et $A\,|\,BC$) $\Rightarrow$ $A\,|\,C$

Idem avec n éléments deux à deux premiers entre eux.

• Si $\deg(P)\le n$ et si P admet $(n+1)$ racines distinctes au moins, alors P est le polynôme nul.

• f injective $\Leftrightarrow Ker(f)=\{0\}$. f surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f)=E$.

• Théorème de Grassmann : Soient F et G 2 sous-espaces vectoriels de dimension finie de l'espace vectoriel E, sur $\mathrm{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Alors $\dim(F)+\dim(G)=\dim(F+G)+\dim(F\cap G)$

• Théorème de la base incomplète : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $(u_1,\ldots,u_p)$ une famille libre de E. Alors on peut trouver une base qui contient cette famille. De plus, si $(v_1,\ldots,v_q)$ est une famille génératrice de E, on peut compléter $(u_1,\ldots,u_p)$ en une base de E à l'aide de vecteurs de $(v_1,\ldots,v_q)$.

• Théorème du rang : Soient E et F des espaces vectoriels sur K. Soit $u\in L(E,F)$. Soit G un supplémentaire de $Ker(u)$ dans E ($E=Ker(u)\oplus G$). Soit $v=u|_G$.

1) v induit un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im}(u)=u(E)$

2) Si E est de dimension finie, $\dim(E)=rg(u)+\dim(Ker(u))$

• Soient E et F 2 espaces vectoriels de même dimension finie. Soit $u\in L(E,F)$.

Alors u injectif $\Leftrightarrow$ u surjectif $\Leftrightarrow$ u isomorphisme de E sur F.

• Si 2 endomorphismes coïncident sur une base, ils sont égaux.

• Inégalité de Cauchy-Schwarz : Soit E un espace euclidien.

Alors $\forall (x,y)\in E^2, |<x\,|\,y>|\le\|x\|\|y\|$

• $\forall A \in GL_n(\mathrm{K}), A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\, {}^t Com(A)$

• $A \in M_n(\mathrm{K})$. On lui associe canoniquement $u \in L(\mathrm{K}^n)$ telle que $M_{Can}(u) = A$.

Alors $(y = u(x)) \Leftrightarrow ([y]_{Can} = A[x]_{Can}) \Leftrightarrow (Y = AX)$

Notation : Si $B = (e_1, ..., e_n)$, alors $\left([x]_B = X \in M_{n,1}(\mathrm{K})\right) \Leftrightarrow \left(x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i , X = \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} \right)$.

• Formules de changement de base : B, B' bases de E, $x \in E$, $[x]_B = X$, $[x]_{B'} = X'$, $u \in L(E)$, $M = M_B(u)$, $M' = M_{B'}(u)$, $P : B \to B'$

Alors : $X = PX'$ et $M' = P^{-1}MP$

2. ANALYSE

I intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, $S = [a,b]$ un segment, $f : I \to \mathrm{K}$ avec $\mathrm{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

• Théorème de Bolzano-Weierstrass : De toute suite bornée de réels, on peut extraire une sous-suite convergente.

• Théorème des suites adjacentes : $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. a et b sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $b_n - a_n$ tend vers 0. Si a et b sont adjacentes, alors elles sont convergentes, de même limite l. Si $u_{2p} = a_p$ et $u_{2p+1} = b_p$, alors $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite l.

• Toute suite de réels croissante et majorée est convergente, de limite $l = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u_n)$.

• Théorème fondamental de l'analyse : $f : I \to \mathrm{K}$ continue, $a \in I$. Si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, alors $F \in C^1(I)$ et $F' = f$. F est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en a.

• Caractérisation séquentielle de la continuité : f continue au point $a \in I = (\alpha, \beta)$ $\Leftrightarrow$ (Pour toute suite $x_n \in I$, tendant vers a, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $f(a)$).

• Caractérisation des C[1]-difféomorphismes de I sur J ($k \geq 1, I$ et J intervalles de $\mathbb{R}$) :

$f : I \to J = f(I)$ est un C^1-difféomorphisme de I sur J $\Leftrightarrow$ $\forall t \in I, f'(t) \neq 0$.

On a alors $\forall x \in J = f(I), (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ ou $\forall t \in I, (f^{-1})'(f(t)) = \dfrac{1}{f'(t)}$.

Valable pour les fonctions à valeurs réelles uniquement :

• Théorème de la limite monotone : $a < b, f :]a,b[\to \mathbb{R}$. Si f est monotone sur $]a,b[$, f admet en tout point $x_0 \in]a,b[$ une limite à droite et une limite à gauche.

Si f est croissante et minorée, $\lim\limits_{t\to a^+} f(t)$ existe et vaut $\inf\{f(t) \mid a < t < b\}$.

• Théorème des valeurs intermédiaires et conséquences :

1) L'image d'un intervalle (resp. un segment) par une fonction continue est un intervalle (resp. un segment).

2) Si $f \in C([a,b])$ et $f(a)f(b) \leq 0$, f s'annule sur $[a,b]$.

3) f continue sur I intervalle. Si f ne s'annule pas sur I, f garde sur I un signe constant.

• Une fonction numérique continue sur un segment est majorée, minorée et atteint ses bornes.

• Théorème de Heine-Borel : Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

- <u>Théorème du prolongement dérivable :</u> Si f est continue sur $S=[a,b]$, de classe C^1 sur $]a,b]$ et si f' a une limite finie en a, alors f est C^1 sur $[a,b]$.
- <u>Formule des Accroissements Finis (FAF) :</u> $a \neq b$, si $f \in C([a,b]) \cap C^1(]a,b[)$, alors $\exists c \in]a,b[$, $\exists \theta \in]0,1[$ tels que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)=(b-a)f'(a+\theta(b-a))$.
- <u>Théorème de Rolle :</u> $f \in C([a,b]) \cap C^1(]a,b[)$ et $f(a)=f(b)$

$\Rightarrow \exists c \in]a,b[, \exists \theta \in]0,1[, f'(c)=f'(a+\theta(b-a))=0$

- <u>Formule de Taylor-Lagrange :</u> Soit f de classe C^n sur $[a,b]$, $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$.

  Alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(b)=\sum_{p=0}^{n}\frac{(b-a)^p}{p!}f^{(p)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$

  Attention, c dépend de a,b et n.

<u>Valable pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes :</u> ($\mathrm{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

- <u>Inégalité des Accroissements Finis (IAF) :</u> Soit $f \in C([a,b],\mathrm{K})$. Si f' est bornée sur $]a,b[$, alors $|f(b)-f(a)| \leq |b-a| \sup_{a<t<b} |f'(t)|$
- <u>Formule de Taylor-Young :</u> Soit $f \in C^n(I,\mathrm{K})$ et $a \in I$.

  Alors : $\forall x \in I, f(x)=\sum_{p=0}^{n}\frac{(x-a)^p}{p!}f^{(p)}(a)+o((x-a)^n) \qquad (x \to a)$
- <u>Inégalité de Taylor-Lagrange :</u> Soit $f \in C^{n+1}([a,b],\mathrm{K})$, $n \geq 1$.

Alors : $\left| f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) \right| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$

- <u>Formule de Taylor avec reste intégral :</u> Soit $f \in C^n([a,b],\mathrm{K})$, $n \geq 1$.

  Alors : $\forall x \in [a,b], f(x)=\sum_{p=0}^{n-1}\frac{(x-a)^p}{p!}f^{(p)}(a)+\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-u)^{n-1}f^{(n)}(u)du$