# TACS EN VRAC (SPE)

(TAC : Théorème à citer)

## ALGEBRE

### 1. Réduction

$\mathrm{K} = \mathbb{R}$ **ou** $\mathbb{C}$, $E$ **espace vectoriel sur** $\mathrm{K}$.

- $u \in L(E), a \neq 0, (a,b) \in K^2$. Si $v = au + bId_E$, alors $Sp_{\mathrm{K}}(v) = \{\mu = a\lambda + b \mid \lambda \in Sp_{\mathrm{K}}(v)\}$
- $u \in L(E), \lambda_1, ..., \lambda_p$ valeurs propres de u distinctes. Alors la somme des sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ est directe.
- Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres de $u$ 2 à 2 distinctes est libre.
- $(u,v) \in (L(E))^2, u \circ v = v \circ u$. Alors $\mathrm{Im}(u)$, $Ker(u)$ et les sous-espaces vectoriels propres de $u$ sont stables par $v$.
- $0 \in Sp_{\mathrm{K}}(u) \Leftrightarrow u$ non injective et alors $E_0(u) = Ker(u)$.
- $\forall (u,v) \in (L(E))^2, Ker(u) \subset Ker(v \circ u)$ et $\mathrm{Im}(v \circ u) \subset \mathrm{Im}(v)$.
- Soit $u \in L(E), R \in \mathrm{K}[X]$. Si $\lambda \in Sp_{\mathrm{K}}(u)$, alors $R(\lambda) \in Sp_{\mathrm{K}}(R(u))$. C'est-à-dire $R(Sp_{\mathrm{K}}(u)) \subset Sp_{\mathrm{K}}(R(u))$.
- Théorème de décomposition des noyaux : Si $A_1, ..., A_n \in \mathrm{K}[X]$ et sont 2 à 2 premiers entre eux, alors $Ker((\prod_{i=1}^{n} A_i)(u)) = \bigoplus_{i=1}^{n} Ker(A_i(u))$.

**Dans la suite,** $E$ **est de dimension finie sur** $\mathrm{K}$.

- 2 matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
- $u \in L(E)$ est diagonalisable
  $\Leftrightarrow$ $E$ est somme directe des sous-espaces propres de $u$
  $\Leftrightarrow$ La somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à la dimension de $E$
  $\Leftrightarrow$ $\exists B$ base de E formée de vecteurs propres de $u$
  $\Leftrightarrow$ Le polynôme caractéristique de $u$ est scindé dans $\mathrm{K}[X]$ et $\forall \lambda \in Sp_{\mathrm{K}}(u)$ la dimension du sous-espace propre associé à $\lambda$ est égale à sa multiplicité dans le polynôme caractéristique de $u$
  $\Leftrightarrow$ Il existe un polynôme scindé dans $\mathrm{K}[X]$, à racines simples et annulateur de $u$
- Si $\dim(E) = n$ et si $u \in L(E)$ a $n$ valeurs propres toutes distinctes, alors $u$ est simplement diagonalisable, donc diagonalisable. Ses sous-espaces propres sont alors des droites vectorielles.
- $u$ est trigonalisable $\Leftrightarrow$ Le polynôme caractéristique de $u$ est scindé dans $\mathrm{K}[X]$.
- $M \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente $\Leftrightarrow$ $Sp_{\mathbb{C}}(M) = \{0\}$ (FAUX si $\mathrm{K} = \mathbb{R}$).
- Théorème de Cayley-Hamilton : En dimension finie, le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $u$ de $E$ est annulateur de $u$. Si $M \in M_n(\mathrm{K}), P_M(M) = 0$.

### 2. Espaces préhilbertiens réels

**Dans cette partie,** $E$ **est un espace préhilbertien réel.**

- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x,y) \in E^2, |< x \mid y >| \leq \|x\| \|y\|$. Egalité si $\{x, y\}$ est lié.

- Inégalité de Minkowski : $\forall (x,y)\in E^2, \|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$
- Théorème de Pythagore : Pour tout système orthogonal $(x_1,\dots,x_p)$, $\left\|\sum_{i=1}^{p} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p}\|x_i\|^2$

  On a l'équivalence : $x_i \perp x_j \Leftrightarrow \|x_i+x_j\|^2 = \|x_i\|^2+\|x_j\|^2$
- Identité du parallélogramme : $\forall (x,y)\in E^2, \|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$
- Formule de polarisation : $\forall (x,y)\in E^2, \langle x\,|\,y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2-\|x\|^2-\|y\|^2) = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$
- Si $F$ est un sous-espace de dimension finie de $E$, $E = F\oplus F^{\perp}$. Si de plus $E$ est de dimension finie, $\dim(E) = \dim(F)+\dim(F^{\perp})$
- Théorème de la projection orthogonale sur un sous-espace $F$ de dimension finie : Soit $p$ la projection orthogonale sur $F$ parallèlement à $F^{\perp}$.
  1) $F^{\perp} = Ker(p)$
  2) $y = p(x) \Leftrightarrow (y\in F$ et $x-y\in F^{\perp})$
  3) La distance de $x\in E$ à $F$ est atteinte en un et un seul point de $F$ : $p(x)$, et $\|x-p(x)\| = \inf_{y\in F}\|x-y\|$
  4) Si $(f_1,\dots,f_p)$ est une base orthonormée de $F$, $\forall x\in E, p(x) = \sum_{i=1}^{p}\langle x\,|\,f_i\rangle f_i$
- Inégalité de Bessel : Si $(x_i)_{i\in I}$ $(I\subset\mathbb{N}$, fini ou non$)$ est un système orthonormé de $E$, alors $\forall x\in E, \sum_{i\in I}\langle x\,|\,x_i\rangle^2 \leq \|x\|^2$

**Dans la suite, $E$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$.**

- Théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt : Soit $B = (u_1,\dots,u_n)$ une base quelconque de l'espace euclidien $E$. Il existe une unique base orthonormée $B' = (e_1,\dots,e_n)$ telle que :
  a) $\forall k\in[1,n], E_k = Vect(u_1,\dots,u_k) = Vect(e_1,\dots,e_k)$
  b) $\forall k\in[1,n], \langle e_k\,|\,u_k\rangle > 0$
- $u\in O(E)$

  $\Leftrightarrow$ $u$ conserve le produit scalaire / la norme

  $\Leftrightarrow$ $u\in GL(E)$ et $u^* = u^{-1}$

  $\Leftrightarrow$ L'image par $u$ d'une base orthonormée est une base orthonormée
- Si $M\in O(n), Sp_{\mathbb{R}}(M)\subset\{-1,+1\}$ et $\det(M) = \pm 1$
- $\forall u\in L(E), \exists! u^*\in L(E), \forall (x,y)\in E^2, \langle u(x)\,|\,y\rangle = \langle x\,|\,u^*(y)\rangle$. $u^*$ est l'adjoint de $u$ et on a dans une base orthonormée $B$ : $M_B(u^*) = {}^tM_B(u)$.
- $\forall u\in L(E), Ker(u^*) = \mathrm{Im}(u)^{\perp}$ et $\mathrm{Im}(u^*) = Ker(u)^{\perp}$.
- Théorème spectral : $E$ euclidien, $u\in L(E)$ symétrique ($u^* = u$). Alors $u$ est diagonalisable, les sous-espaces propres de $u$ sont 2 à 2 orthogonaux et il existe une base orthonormée de $E$ formée des vecteurs propres de $u$. $u$ peut être réduit dans une base diagonalisante orthonormée.

  $M\in M_n(\mathbb{R})$, ${}^tM = M$. Alors les valeurs propres de $M$ sont toutes réelles, $M$ est diagonalisable et $\exists P\in O(n), \exists D = Diag(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ ($\lambda_i\in\mathbb{R}$) telles que $M = PDP^{-1} = PD\,{}^tP$. On dit que $M$ est orthodiagonalisable.

- Réduction des formes quadratiques en dimension finie :
  1) Soit $\varphi$ une forme bilinéaire symétrique sur $E$, $B=(e_1,...,e_n)$ une base de $E$ et $A=(a_{i,j})\in M_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j}=\varphi(e_i,e_j)$. Alors $\varphi(x,y)={}^tXAY={}^tYAX$ où $X$ et $Y$ sont les matrices colonnes des coordonnées respectives de x et y dans la base $B$ ($\Rightarrow \varphi(x,y)=\sum_{1\le i,j\le n} a_{i,j}x_iy_j$ ).

  La matrice symétrique réelle $A$ est la matrice de $\varphi$ (ou de $\phi$) dans la base $B$.

  2) Pour toute matrice symétrique réelle $A$, il existe une unique forme bilinéaire symétrique $\varphi$ sur $\mathbb{R}^n$ dont $A$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

  3) Si $B$ et $B'$ sont 2 bases de $E$ avec $P:B\to B'$, alors $A'={}^tPAP$.

## 3. Algèbre générale

- Les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les $\bar{k}$ où $n\wedge k=1$. Ce sont aussi les éléments inversibles de l'anneau $\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,\times\right)$.
  Il y en a $\varphi(n)=Card\{k\,|\,1\le k\le n$ et $k\wedge n=1\}$.
- Théorème de Lagrange : Soit $G$ un groupe fini et $a\in G$.
  1) L'ordre de $a$ divise $Card(G)=|G|$
  2) L'ordre d'un sous-groupe de $G$ divise l'ordre de $G$
- Tout idéal de $\mathbb{Z}$ est principal, c'est-à-dire de la forme $a\mathbb{Z}, a\in\mathbb{N}$. Idem dans $\mathrm{K}[\mathrm{X}]$.
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps $\Leftrightarrow$ $n$ est premier.
- Théorème chinois : $(m,n)\in(\mathbb{N}^*)^2, m\wedge n=1$. Alors $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sont isomorphes.
  D'où $\varphi(mn)=\varphi(m)\times\varphi(n)$.
- Petit théorème de Fermat : $n\in\mathbb{N}^*$
  1) Si $k\wedge n=1, n\,|\,k^{\varphi(n)}-1$ ou encore $k^{\varphi(n)}\equiv 1[n]$
  2) Si $p$ est premier, $\forall k\in\mathbb{Z}, k^p\equiv k[p]$ ou $p\,|\,k^p-k$

# ANALYSE

## 1. Séries numériques

**$E$ est un espace vectoriel normé complet (tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet). $u_n\in E$. Le plus souvent, $E=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.**

- Série géométrique : $q\in\mathbb{C}$. $S_n=\sum_{k=0}^{n}q^k=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ si $q\neq 1$ et $n+1$ si $q=1$

  $\sum q^k$ converge $\Leftrightarrow$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow$ $|q|<1$ et alors $\sum_{k=0}^{+\infty}q^k=\frac{1}{1-q}$ et $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}q^k=\frac{q^{n+1}}{1-q}$.
- Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
- Série de Riemann : $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow$ $\alpha>1$
- Si $\sum u_n$ est absolument convergente (i.e. $\sum|u_n|$ converge), alors $\sum u_n$ est convergente et $\left|\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right|\le\sum_{n=0}^{+\infty}|u_n|$

- Si $u_n \in \mathbb{R}$ et $u_n \geq 0$ pour $n$ assez grand, alors $\sum u_n$ absolument convergente $\Leftrightarrow$ $\sum u_n$ convergente.
- Théorème de téléscopage : Si $u_n = a_{n+1} - a_n, \sum u_n$ converge $\Leftrightarrow$ (la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente). On a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = -a_0 + \lim_{p\to+\infty} a_p$
- Théorème de majoration : $\sum u_n$ est absolument convergente $\Leftrightarrow$ $\exists M \geq 0, \forall r \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{r} |u_k| \leq M$
- Critère de comparaison ou de domination : Si en $+\infty$, $u_n = O(v_n)$, alors :
  1) $\sum v_n$ absolument convergente $\Rightarrow$ $\sum u_n$ absolument convergente
  2) $\sum |u_n|$ divergente $\Rightarrow$ $\sum |v_n|$ divergente
- Critère d'équivalence : Si $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} |v_n|$, $\sum u_n$ absolument convergente $\Leftrightarrow$ $\sum v_n$ absolument convergente.
- La somme de 2 séries convergentes est convergente. La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente. On ne peut rien affirmer quant à la nature de la somme de 2 séries divergentes sans une étude plus détaillée.
- Règle de Riemann pour les séries :
  1) Si pour un $\alpha > 1$, $u_n = O(\frac{1}{n^\alpha})$ (ou $\lim_{n\to+\infty}(n^\alpha u_n) = 0$), alors $\sum u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
  2) Si $\frac{1}{n} = O(u_n)$, alors $\sum |u_n|$ est divergente.
- Règle de D'Alembert pour séries numériques : $u_n \in \mathbb{C}$. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{R}_+$ tels que $\forall n \geq n_0, u_n \neq 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l \geq 0$, alors :
  1) Si $0 \leq l < 1$, $\sum u_n$ est absolument convergente. De plus, si $l < k < 1$, $u_n = O(k^n)$.
  2) Si $l > 1$, $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$. De plus, si $1 < k < l$, $k^n = O(u_n)$.
  3) Si $l = 1$, on ne peut conclure.
- Règle de sommation des relations de négligeabilité, de domination et d'équivalence :

  On suppose $u_n \geq 0$, $v_n \in E$.

  1)a) Si $\sum u_n$ converge et si $v_n = o(u_n)$, alors $\sum v_n$ est absolument convergente et $R_{n-1}(v) = \sum_{k\geq n} v_k = o(R_{n-1}(u))$

  b) Si $\sum u_n$ diverge et si $v_n = o(u_n)$, alors $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = o(U_n)$

  2) Même chose avec $o \leftrightarrow O$

  On suppose $u_n \geq 0$ pour $n$ assez grand et $v_n \in \mathbb{R}$.

  3)a) Si $\sum u_n$ converge et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $R_n(u) \underset{+\infty}{\sim} R_n(v)$ (tendent vers 0)

  b) Si $\sum u_n$ diverge et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$ (tendent vers $+\infty$)
- Théorème des séries alternées : Si $u_n \in \mathbb{R}$, $u_n = (-1)^n |u_n|$ et si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ en décroissant, alors $\sum u_n$ converge et :

  1) $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ a le signe de $u_0$ ($= |u_0| \geq 0$)

  2) $\forall n \in \mathbb{N}, |R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq |u_{n+1}|$

  3) $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, U_{2p+1} \leq U \leq U_{2q}$ où $U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

On a le théorème analogue si $\forall n\in \mathbb{N}, u_n=(-1)^{n+1}|u_n|$. Alors $U=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \le 0$ a toujours le signe de $u_0$ et $U_{2p+1}\ge U_{2q}$.

- Théorème de comparaison série/intégrale : Si $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ est continue par morceaux, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, alors :

  1) $\forall k\ge 1, \int_k^{k+1} f(t)dt \le f(k) \le \int_{k-1}^{k} f(t)dt$

  2) $\sum f(k)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature, la série de terme général $w_n=-f(n)+\int_{n-1}^{n} f(t)dt$ ($n\in\mathbb{N}^*$) est convergente et $\exists C\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} f(k)=\int_0^n f(t)dt+C+o(1)$

## 2. Fonctions intégrables

$a>0$ **fixé. Souvent** $a=1$ **ou** $\frac{1}{2}$ **ou** $e$ **...**

- $\int_a^{+\infty}\frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha>1 \Leftrightarrow \frac{1}{t^\alpha}\in L^1([a,+\infty[)$
- $\int_0^{a}\frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \alpha<1 \Leftrightarrow \frac{1}{t^\alpha}\in L^1(]0,a])$
- $I(\lambda)=\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}dt$ converge $\Leftrightarrow$ $\lambda>0$. On a alors $I(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$.
- Dans un espace vectoriel normé complet, si $\int_a^b \|f(t)\|dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge et $\left\|\int_a^b f(t)dt\right\|\le \int_a^b \|f(t)\|dt$.
- Critère de comparaison positif : Soient $f$ et $g$ continues par morceaux de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que $\forall t\in[a,b[, 0\le f(t)\le g(t)$.

  1) Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, $\int_a^b f(t)dt$ converge et $0\le \int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$.

  2) Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, $\int_a^b g(t)dt$ diverge.
- Critère de domination : Soient $f$ et $g$ continues par morceaux de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$.

  1) Si, au voisinage de $b^-$, $f=O(g)$, alors $g$ sommable sur $[a,b[$ $\Rightarrow$ $f$ sommable sur $[a,b[$.

  2) Si $f$ et $g$ sont positives, si $f=O(g)$ et si $f$ n'est pas sommable sur $[a,b[$, alors $g$ n'est pas sommable sur $[a,b[$.
- Critère d'équivalence positif : Soient $f$ et $g$ continues par morceaux de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f\ge 0$ sur $[a,b[$ et $f\underset{b^-}{\sim} g$. Alors $g$ est positive au voisinage de $b^-$ et les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature : $f\in L^1([a,b[)\Leftrightarrow g\in L^1([a,b[)$
- Règle de Riemann pour les intégrales, borne $+\infty$ : Soit $f$ continue par morceaux sur $[a,+\infty[$

  1) Si pour un $\alpha>1$, $f(t)=O(\frac{1}{t^\alpha})$ en $+\infty$, alors $f$ est sommable sur $[a,+\infty[$ : $f\in L^1([a,+\infty[)$.

  2) Si $\frac{1}{t}=O(f(t))$ en $+\infty$, alors $f$ n'est pas sommable sur $[a,+\infty[$ : $f\notin L^1([a,+\infty[)$.
- Théorème d'intégration de la relation de négligeabilité :

  $I=[a,+\infty[, f\in CM(I,E), g\in CM(I,\mathbb{R}_+), g\ge 0$ sur $I$ et $f(t)=o(g(t))$

1) Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge (i.e. $g \in L^1(I)$ ), alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente (i.e. $f \in L^1(I)$) et on a $\int_x^{+\infty} f(t)dt = o(\int_x^{+\infty} g(t)dt)$.

2) Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt)$ diverge, alors $\int_a^x f(t)dt = o(\int_a^x g(t)dt)$.

- Théorème analogue avec $o \leftrightarrow O$.
- Théorème d'intégration de la relation d'équivalence : $I = [a,+\infty[, (f,g) \in (CM(I,\mathbb{R}))^2, g \geq 0$ sur I et $f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t)$

1) Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge (i.e. $g \in L^1(I)$ ), alors $f \in L^1(I)$ et $\int_x^{+\infty} f(t)dt \underset{+\infty}{\sim} \int_x^{+\infty} g(t)dt$ (tendent vers 0 en $+\infty$ ).

2) Si $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ diverge (i.e. $g \notin L^1(I)$ ), alors $\int_a^x f(t)dt \underset{+\infty}{\sim} \int_a^x g(t)dt$ (tendent vers $+\infty$ en $+\infty$ ).

- Théorème du changement de variable : Soit $\varphi$ une bijection de classe $C^1$ de $]\alpha,\beta[$ sur $]a,b[$, $f \in CM(]a,b[,\mathbb{C})$.

1) $f \in L^1(]a,b[) \Leftrightarrow \varphi'.(f \circ \varphi) \in L^1(]\alpha,\beta[)$

2) Les intégrales $\int_a^b f(u)du$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ sont de même nature et sont égales lorsqu'elles convergent.

## 3. Suites et séries de fonctions

**$I$ intervalle de $\mathbb{R}$, $F$ espace vectoriel normé complet ou de dimension finie, le plus souvent $F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.**

- Théorème de continuité d'une limite uniforme : $E$ espace vectoriel normé de dimension finie, $X \subset E$.
  Une limite uniforme sur $X$ de fonctions continues sur $X$ est continue sur $X$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lim\limits_{x\to a} f_n(x)) = \lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{n\to+\infty}(f_n(x)) = f(a)$ ( $a \in X$ et $f_n$ continues au point $a$ ).
- Théorème d'intégration sur un segment d'une limite uniforme : $X = [a,b]$ intervalle compact de $\mathbb{R}$, $f_n \in CM([a,b],F)$, $F$ espace de Banach. Si $f_n \xrightarrow{u} f$ sur $X$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt$.
- Théorème de dérivation d'une limite : $I$ intervalle de $\mathbb{R}$, $f_n \in C^1(I,F)$, $F$ espace de Banach. Si $f_n \xrightarrow{s} f$ sur $I$ et si $\exists g : I \to F, f_n' \xrightarrow{u} g$ sur I, alors $f \in C^1(I,F)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{d}{dx} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ : $f' = g$.
  Même conclusion si $f_n' \xrightarrow{u} g$ sur tout segment de $I$.
- Théorème de la double limite : $f_n : X \to F$, $X \subset E$, $F$ espace vectoriel normé complet, $a \in \overline{X}$. Si $f_n \xrightarrow{u} f$ sur X et si $\forall n \in \mathbb{N}, \lim\limits_{x\to a, x\in X} f_n(x)$ existe et vaut $l_n \in F$, alors la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l$ dans $F$, $f$ admet en $a$ une limite égale à $l$. Autrement dit : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\lim\limits_{x\to a, x\in X} f_n(x)) = \lim\limits_{x\to a, x\in X}(\lim\limits_{n\to+\infty}(f_n(x))$.
- Théorème de convergence dominée : Soit $(f_n : I \to \mathrm{K})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications telle que $f_n \xrightarrow{s} f$ sur $I$.
  Si $\forall n \in \mathbb{N}$, $(f_n, f) \in (CM(I,\mathrm{K}))^2$ et si $\exists \varphi : I \to \mathbb{R}$ continue par morceaux, positive et intégrable sur $I$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f_n| \leq \varphi$, alors $f \in L^1(I)$ et $\int_I f = \lim\limits_{n\to+\infty}\int_I f_n$.
  $\forall t \in I, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(t)| \leq \varphi(t)$ est l'hypothèse de domination. $\varphi \in L^1(I)$ et ne dépend pas de $n$.
- $X \subset E$ ( $X = I$ intervalle de $\mathbb{R}$ par exemple). Soit $u_n : X \to F$.
  $\sum u_n$ uniformément convergente sur $X$
  $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}, R_n$ défini sur $X$ et $R_n \xrightarrow{u} 0$ sur $X$
  $\overset{déf}{\Leftrightarrow} \left(U_n = \sum_{k=0}^n u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions uniformément convergente sur $X$
- Soit $u_n : X \to F$. Si $F$ est complet, toute série normalement convergente sur $X$ est uniformément convergente sur $X$.

- <u>Théorème de continuité d'une somme uniforme :</u> $u_n : I \to F$. Si les $u_n$ sont continues sur $I$ et si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur tout segment de $I$, alors $U = \sum_{n\geq 0} u_n$ est continue sur $I$.
- <u>Théorème d'intégration terme à terme :</u>

  1) Si $I$ est un segment, $u_n, U \in CM(I,\mathbb{C})$ et $\sum u_n$ uniformément convergente sur $I$, alors $\int_I \sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} \int_I u_n$.

  2) Soit $I$ intervalle quelconque, $u_n, U \in CM(I,\mathbb{C})$, $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Si $u_n \in L^1(I,\mathbb{C})$ et si $\sum_{n\geq 0} \int_I |u_n|$ converge, alors $U \in L^1(I,\mathbb{C})$ et $\int_I \sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} \int_I u_n$. De plus, $\left|\int_I U\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |u_n|$.
- <u>Théorème de dérivation terme à terme :</u> $I$ intervalle de $\mathbb{R}$, $u_n \in C^1(I,F)$, $F$ espace de Banach. Si $\exists x_0 \in I, \sum_{n\geq 0} u_n(x_0)$ converge et si $\sum_{n\geq 0} u_n{}'$ est uniformément convergente sur $I$ ou sur tout segment de $I$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est de classe $C^1$ sur $I$ et $\forall x \in I, \frac{d}{dx}\left(\sum_{n\geq 0} u_n(x)\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{d}{dx} u_n(x)\right)$.
- <u>Théorème de la double limite :</u> $I$ intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{I}$. Si $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $I$ et si $\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x\to a} f_n(x)$ existe et vaut $l_n$, alors la série $\sum_{n\geq 0} l_n$ est convergente et $\lim_{x\to a}\left(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$.

## 4. <u>Intégrales paramétrées</u>

- Soit $A \subset \mathbb{R}^m$, et soit $f : A\times[a,b] \to F$ continue. Alors la fonction $g : A \to F$ définie par $g(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ est continue sur $A$.
- Soit $A$ un intervalle, et soit $f : A\times[a,b] \to F$ continue et telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et soit continue sur $A\times[a,b]$. Alors la fonction $g : A \to F$ définie par $g(x) = \int_a^b f(x,t)dt$ est de classe $C^1$ sur $A$ et on a $\forall x \in A, g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.
- <u>Continuité sous le signe somme :</u> Soit $I$ un intervalle quelconque. Soit $A \subset \mathbb{R}^m$, et soit $f : A\times I \to \mathbb{C}$ continue par rapport à la première variable et telle que $\forall x \in A$ la fonction $f(x,.)$ soit continue par morceaux sur $I$. On suppose de plus qu'il existe $\varphi$ intégrable sur $I$ telle que $\forall t \in I, \forall x \in A, \left|f(x,t)\right| \leq \varphi(t)$. Alors la fonction $g : A \to \mathbb{C}$ définie par $g(x) = \int_I f(x,t)dt$ est continue sur A.
- <u>Dérivation sous le signe somme :</u> Soit $A$ un intervalle, $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $f : A\times I \to \mathbb{C}$ vérifiant les hypothèses du théorème précédent et telle que $\forall k \in \{1,\dots,n\}, \frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ existe et vérifie aussi les mêmes hypothèses. Alors la fonction $g : A \to \mathbb{C}$ définie par $g(x) = \int_I f(x,t)dt$ est de classe $C^n$ sur $A$ et on a :

  $\forall x \in A, \forall k \in \{1,\dots,n\}, g^{(k)}(x) = \int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt$.

  <u>Remarque :</u> Pour les 2 théorèmes précédents et lorsque $A$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, il suffit d'établir les hypothèses de domination sur tout segment de $A$ (domination locale). La dominatrice $\varphi_k$ dépend du segment, de $k$ mais pas de $x$.
- <u>Théorème de Fubini :</u> Soient $I = [a,b]$ et $J = [c,d]$ 2 segments. Soit $f : I\times J \to F$ continue.

  Alors $\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$.

- <u>Fonction Gamma :</u> Pour $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}dt$ ; $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ ; $\Gamma(n+1)=n!$ ; $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

## 5. Séries entières

- <u>Lemme d'Abel :</u> $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de complexes, $S(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$. Soit $r>0$ tel que la suite $(a_nr^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée. Alors on a :

  1) Si $|x|<r, \sum_{n\geq 0}a_nx^n$ est absolument convergente.

  2) La série de fonctions $S(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ est normalement convergente, donc uniformément convergente, sur tout compact $K$ du disque ouvert $D_r=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<r\}$ et sur tout disque fermé $D_a=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|\leq a<r\}\subset D_r$.
- <u>Critère de D'Alembert pour séries entières :</u> Soit $S(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ une série entière. Si $\exists N,\forall n\geq N, a_n\neq 0$ et si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, de limite $l$, alors le rayon de convergence de $S$ vaut $\rho(S)=\frac{1}{l}$.
- Soit $S(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ et $T(x)=\sum_{n\geq 0}b_nx^n$.

  1) Si $|a_n|\underset{+\infty}{\sim}|b_n|$, alors $\rho(S)=\rho(T)$.

  2) S'il existe $P\in\mathbb{C}[X], P\neq 0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}, b_n=P(n)a_n$, alors $\rho(S)=\rho(T)$.
- $S(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$, $x\in\mathbb{R}, a_n\in\mathbb{C}$, $R=\rho(S)>0$, $]-R,R[$ l'intervalle ouvert de convergence de $S(x)$. Alors :

  1) Sur $]-R,R[$, on peut dériver $S$ terme à terme et la série dérivée $S'$ a même rayon de convergence que $S$.

  2) $S$ est de classe $C^\infty$ sur $]-R,R[$. On peut dériver $S$ terme à terme sur $]-R,R[$ à tout ordre.

  On a $\forall k\in\mathbb{N}, S^{(k)}(0)=k!a_k$ et si $|x|<R, S^{(k)}(x)=\sum_{p=k}^{+\infty}a_pp(p-1)...(p-k+1)x^{p-k}$.

  3) Pour $|x|<R$, on peut intégrer $S$ terme à terme sur $[0,x]$ et la série intégrée a même rayon de convergence que $S$ : c'est l'unique primitive de $S$ sur $]-R,R[$ qui s'annule en 0.
- Toute fraction rationnelle n'admettant pas 0 comme pôle est DSE(0). On obtient le DSE(0) par décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$, le rayon de convergence est le plus petit module des pôles.
- $\forall z\in\mathbb{C}, \cos(iz)=ch(z)$ et $\sin(iz)=ish(z)$.

## 6. Séries de Fourier

**Dans cette partie, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}u_k$ désigne, quand elle converge, la somme de la série de terme général $v_k=u_k+u_{-k}$ ($k\in\mathbb{N}^*$).**

**Alors $\sum_{k\in\mathbb{Z}}u_k=u_0+\sum_{k=1}^{+\infty}(u_k+u_{-k})$.**

- <u>Théorème de Dirichlet :</u> Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est de période $2\pi$ et de classe $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier $S(f)$ de $f$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}, S(f)(x)=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to x^-}f(t)+\lim_{t\to x^+}f(t)\right)$.
- <u>Théorème de convergence normale :</u> Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est de période $2\pi$, continue et de classe $C^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de $f$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et vaut $f$.

- <u>Formule de Parseval :</u> Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est de période $2\pi$, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (i.e. sur tout/un segment de longueur $2\pi$), alors $\sum_{-\infty}^{+\infty}\left|c_n(f)\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(x)\right|^2dx$ ou encore $\frac{\left|a_0\right|^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left|a_n\right|^2+\left|b_n\right|^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(x)\right|^2dx$.

## 7. Fonctions de plusieurs variables

$D$ **ouvert de** $\mathbb{R}^n$**.** $f:D\to\mathbb{R}^p,\forall x=(x_1,...,x_n)\in D,\ f(x)=\begin{pmatrix}f_1(x)\\ ...\\ f_p(x)\end{pmatrix}$.

- <u>Applications partielles :</u> Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ et $x\in\mathbb{R}^n$. La i-ème application partielle $\phi_i$ au point $x\in\mathbb{R}^n$ est définie par $\phi_i:\ \underset{t\mapsto f(x_1,...,x_{i-1},t,x_{i+\&},...,x_n)}{\mathbb{R}\to\mathbb{R}^p}$. Si $f$ est continue, il en est de même de ses applications partielles, mais la réciproque est fausse.
- $f$ est dite de classe $C^1$ sur $D$ si chacune de ses dérivées partielles existe et est continue sur $D$.
- <u>Différentielle :</u> Si $f$ est de classe $C^1$ sur $D$, alors, $\forall x\in D,\forall h\in\mathbb{R}^n$ avec $x+h\in D$, on a :

  $f(x+h)=f(x)+\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)+o(\|h\|)$. Cette expression est le développement limité de $f$ en $x$ à l'ordre 1.

  $df(x)=\sum_{i=1}^{n}h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)dx_i$ est l'application linéaire tangente (ou différentielle) de $f$ au point $x$.
- Si $f=h\circ g\in C^1(D)$, alors $\forall x\in D,\forall i\in\{1,...,p\},\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial h}{\partial u_k}(g(x))\frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x)$.
- <u>Théorème de Schwarz :</u> Si $f\in C^2(D)$, alors $\forall x\in D,\forall(i,j)\in\{1,...n\}^2$, $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x)$.
- <u>Caractérisation des extrema :</u> Soit $f$ de classe $C^1$ sur $D$. Si un point $a$ intérieur à $D$ correspond à un extremum local de $f$, alors les dérivées partielles de $f$ en $a$ s'annulent. $a$ est alors appelé un point critique de $f$. Dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, on note si $a$ est un élément de $\mathbb{R}^2$ : $r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$ et $s=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(a)$. On a :

  1) Si $rt-s^2>0$ et $r<0$, alors $a$ est un maximum local de $f$.
  2) Si $rt-s^2>0$ et $r>0$, alors $a$ est un minimum local de $f$.
  3) Si $rt-s^2<0$, alors $a$ n'est pas un extremum de $f$.
- <u>Formule de Taylor-Young :</u> Si $f\in C^2(U,\mathbb{R})$ où $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et $(a,b)$ un point de $U$, alors on a pour $h$ et $k$ assez petits :

  $$f(a+h,b+k)=f(a,b)+h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)+k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)+\frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(a,b)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)\right]+o\left(\|h,k\|^2\right).$$
- On appelle matrice jacobienne de $f$ au point $a$ la matrice de $df(a)$, relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$. Elle est notée $J_f(a)=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]$ pour $1\le i\le p$ et $1\le j\le n$. Son déterminant est appelé le jacobien de $f$ au point $a$ et est noté $j_f(a)$.
- <u>Théorème d'inversion :</u> Si $f$ est de classe $C^1$ sur $D$ et injective , alors $f$ est un $C^1$-difféomorphisme de $D$ sur $f(D)$ si et seulement si, $\forall a\in D$, $df(a)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Dans ce cas, $J_{f^{-1}}(f(a))=\left(J_f(a)\right)^{-1}$.

# 8. Espaces vectoriels normés

$E$ **espace vectoriel sur** $\mathrm{K}=\mathbb{R}$ **ou** $\mathbb{C}$**, de dimension finie ou non.**

- Une norme est une application $\|.\|: E \to \mathbb{R}^+$ telle que :
  1) $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$
  2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathrm{K}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
  3) $\forall (x,y) \in E^2, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

  $d(x,y) = \|x-y\|$ est la distance associée à $\|.\|$.
- Normes usuelles :
  1) Sur $\mathrm{K}^n$ : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\|x\|_\infty = \sup_{1\leq i \leq n} |x_i|$
  2) Sur $C([a,b],\mathrm{K})$ : $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt$, $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$, $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$
  3) Sur $M_n(\mathrm{K})$ : $\|M\|_1 = \sum_{1\leq i,j\leq n} |m_{i,j}|$, $\|M\|_2 = \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} |m_{i,j}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\|M\|_\infty = \sup_{1\leq i,j\leq n} |m_{i,j}|$
- 2 normes $N_1$ et $N_2$ de $E$ sont équivalentes si et seulement si il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que $\forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$.
- $U$ partie de $E$ est un ouvert si et seulement si $U$ est voisinage de chacun de ses points ($\Leftrightarrow U = \mathring{U}$ ).
- $U$ partie de $E$ est un fermé si et seulement si $\overline{A} = A$ où $\overline{A}$ est l'adhérence de $A$. $x$ est adhérent à $A$ si et seulement si on peut tendre vers $x$ « en restant dans $A$ ».
- $A, B$ parties de $E$. $A$ est dense dans $B$ si et seulement si $\overline{A}$ contient $B$.
- L'image réciproque continue d'un ouvert (resp. d'un fermé) est un ouvert (resp. un fermé).
- Compacité : Une partie $A$ de $E$ est dite compacte si et seulement si de toute suite de points de $A$ on peut extraire une sous-suite convergente vers un point de $A$. Si $A$ est compacte, $A$ est fermée et bornée. La réciproque n'est vraie qu'en dimension finie. Si $A$ est compacte et si $X \subset A$ est fermée, $X$ est compacte. Si $A$ est compacte, $A$ est complète (voir plus loin). Un produit de compacts est compact.
- L'image continue d'un compact est compacte.
- Toute application continue sur un compact y est bornée et atteint ses bornes.
- Théorème de Heine-Borel : Toute application continue sur un compact y est uniformément continue.
- Complétude : $E$ est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy de points de $E$ converge. Si $E$ est complet, $E$ est un espace de banach. Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet.