Taylor

Lorsqu'on a une fonction très complexe, notons-là $f(x)$, on peut toujours essayer de l'approximer au voisinage d'un de ses points par un polynôme de Taylor. Le polynôme de Taylor se note $P_n(x)$ où n indique l'ordre du polynôme. Il est toujours développé autour d'un point donné que nous noterons a. Si $n \to \infty$, alors le polynôme de Taylor devient la fonction initiale : il ne s'agit plus d'une approximation. Par exemple on peut approximer la fonction e^x autour de $a = 0$ par le polynôme suivant

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} \tag{1}$$

et si $n \to \infty$, alors la notion de "autour de $a = 0$" disparaît et la fonction initiale, e^x devient exactement égale au polynôme ci-dessus, ce qui nous donne la formule bien connue

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = e^x. \tag{2}$$

Comment construire un polynôme de Taylor en pratique ? $f(x)$ est notre fonction, a sera la valeur autour de laquelle le polynôme est développé. Le polynôme de Taylor de degré n se définit comme

$$P_n(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{3}$$

En pratique il est recommandé de se fixer une valeur de n, mettons $n = 3$, et de calculer ensuite le polynôme. L'erreur d'approximation, définie comme

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \tag{4}$$

est une erreur absolue qu'il est difficile d'obtenir en pratique. En effet elle est calculable suivant l'équation

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{5}$$

où t est un paramètre dont la seule chose qu'on sait est qu'il est compris entre la valeur a et la valeur x. Seule une seule valeur de t bien précise nous donnera la véritable erreur d'approximation. Si l'on prend une valeur $t = c$ qui est supérieure à la vraie valeur de t, on va surestimer l'erreur. Notons que si $t = a$, on trouve une erreur d'approximation nulle et si $t = x$ l'erreur d'approximation qu'on trouvera sera maximale. La vraie erreur est donc entre 0 et l'erreur maximale que l'on trouve en posant $t = x$, donc en résolvant

$$\frac{f^{(n+1)}(x)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{6}$$

Autrement dit

$$P_n(x) \pm \frac{f^{(n+1)}(x)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{7}$$

contient la vraie valeur $f(x)$ avec une probabilité égale à 1. Mais l'intervalle pourrait être réduit si on connaissait la vraie valeur de t et qu'on était pas condamné à calculer l'erreur d'approximation pour $t = x$.

On notera qu'au point $x = a$ le polynôme de Taylor est la vraie fonction. En effet le polynôme de Taylor a pour propriétés remarquables

$$\begin{aligned} P_n(a) &= f(a), \\ P_n'(a) &= f'(a), \\ P_n''(a) &= f''(a), \end{aligned} \tag{8}$$

etc. Ceci peut-être facilement vérifié pour $n = 2$

$$\begin{aligned}
&P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\
&P_n(a) = f(a) + f'(a)(a-a) + \frac{f''(a)}{2!}(a-a)^2 \\
&P_n(a) = f(a) \\
&P_n'(x) = (f(a))' + (f'(a))'(x-a) + f'(a)(x-a)' + \left(\frac{f''(a)}{2!}\right)'(x-a)^2 + \frac{f''(a)}{2!}((x-a)^2)' \\
&P_n'(x) = 0 + 0 + f'(a) + 0 + \frac{f''(a)}{2!}2(x-a) \\
&P_n'(a) = f'(a) + \frac{f''(a)}{2!}2(a-a) = f'(a)
\end{aligned} \tag{9}$$

Il est rappelé que $f(a), f'(a), f''(a)$ désignent des valeurs numériques et donc leur dérivée vaut 0. Notons que le polynôme de Taylor de $f(x)$ autour d'une valeur a constitue une bonne approximation de $f(x)$ à condition que x ne soit pas trop éloigné de a. Si $x = a$, il ne s'agit plus d'une approximation, le polynôme donnera la vraie valeur de la fonction en le point a. Par contre si x est très éloigné de a, l'approximation résultante sera mauvaise et ce d'autant plus que l'ordre du polynôme est faible.

Exercice

Donnez l'approximation linéaire de $f(x) = (1+x)^5$ autour de $a = 0$ et calculer cette approximation pour $x = 1/10$ ainsi que l'erreur maximum que l'on fera.

On doit calculer $P_1(x)$

$$P_1(x) = f(0) + f'(0)(x-0) \tag{10}$$

On calcule $f(0)$, $f'(0)$ et $f''(x)$ (ce dernier est calculé pour l'erreur d'approximation).

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= 5(1+x|_{x=0})^4 = 5 \\ f''(x) &= 20(1+x)^3 \end{aligned} \tag{11}$$

Donc

$$\begin{aligned} P_1(x) &= 1+5x \\ P_1(0,1) &= 1,5 \end{aligned} \tag{12}$$

L'erreur sera au pire

$$\frac{f^{(n+1)}(x)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{f''(0,1)(0,1)^2}{2!} = \frac{26,62 \times 0,01}{2} = 0,1331 \tag{13}$$

La vraie valeur de notre fonction est donc dans l'intervalle $1,5 \pm 0,1331$. En calculant manuellement ce qu'on aurait dû obtenir, à savoir $(1+0,1)^5 = 1,61051$, on voit que cette valeur fait bien partie de notre intervalle. D'autres exercices se trouve vers le milieu de cahier bleu “2.”.