Zeta Riemann partielle

3 juin 2009

1 Définitions et position du problème

On considère la somme partielle d'ordre $n \in N$ de la série de Dirichlet de la fonction zeta de Riemann :

$$\zeta_n(\nu) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(1+k)^\nu}$$

L'écart de cette série à la fonction zeta de Riemann $\zeta(\nu)$ est donné par :

$$\zeta(\nu) - \zeta_n(\nu) = \frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)!}\Psi_{\nu-1}(n+2)$$

où $\Psi_k(p)$ est la fonction polygamma.
Soit :

$$F(\nu,\omega,n) = \sum_{k=\omega}^{n} \frac{\zeta_k(2\nu)\zeta_{k-1}(2\nu)\zeta_{k-2}(2\nu)\cdots\zeta_{k-\omega}(2\nu)}{(1+k)^{2\nu}}$$

Montrer que :

$$F(\nu,\omega,\infty) = \frac{p_{\nu,\omega}}{q_{\nu,\omega}}\pi^{2\nu(w+2)}$$

où $\frac{p_{\nu,\omega}}{q_{\nu,\omega}}$ est une fraction rationnelle.