THEORIE DE DECOMPOSITION DES PHENOMENES CYCLIQUES

par WEIDMANN Sébastien

(travaux débutés en Octobre 2007)

Modifications éventuelles et droits d'utilisation

Je me réserve le droit d'apporter des modifications ou des corrections à tout instant si j'estime que cela est nécessaire (notamment pour corriger des erreurs éventuelles ou compléter des réflexions qui pourraient être insuffisantes).

Certains passages ne sont pas complets car ils sont secondaires (non essentiels à la compréhension globale de cette théorie), mais ils sont en cours de réalisation. Cela est précisé lorsque c'est le cas.

Le **Chapitre IV** est un chapitre important mais il ne sera publié intégralement que lorsque j'estimerai que mes travaux le concernant auront atteint une maturité satisfaisante.

Il n'y a pas de contrainte de temps concernant ces travaux en cours de réalisation.

Toute personne désirant utiliser partiellement ou complètement cette théorie peut le faire à la seule condition de le mentionner et d'associer à cette mention mes nom et prénom (aux parties ou formules utilisées, par exemple). Ceci offre quelques souplesse et liberté d'utilisation.

La redistribution de ces fichiers est également autorisée à condition de ne pas en modifier le contenu. **Aucune modification ne peut être faite sans mon accord**.

Par conséquent, pour d'éventuelles suggestions, merci de me contacter par l'intermédiaire du site **FUTURA-SCIENCES** (vous devez être inscrit comme membre, l'inscriprion est relativement simple) :

(ne vous attendez pas à une réponse systématique de ma part)

Cliquez ici pour m'envoyer un mail (message privé, pseudo : **WizartS**)

SOMMAIRE :

Résumé

Résumé global

Mon objectif a été de trouver une formule mathématique permettant de factoriser un nombre entier N en produit de nombres premiers (avec leur puissance). J'appelle $D(N)$ cette formule. Ces travaux m'ont permis d'établir des liens avec d'autres disciplines, lorsque cela a été possible.

Cette formule $D(N)$ (par son domaine de définition) appliquée à une onde (phénomène physique) permet de décomposer toute onde. En appliquant cette formule par hypothèse à la longueur d'onde ou à la période d'un photon (peu importe, car les résultats sont identiques), on doit alors admettre qu'il existe un minimum de longueur et un minimum de période. L'espace et le temps ne peuvent plus être considérés que comme étant discontinus, conformément aux limites représentées par la longueur de *PLANCK* et par le temps de *PLANCK*.

La formule $D(N)$ contient la formule $f(M;x)$ qui ne donne que des résultats "binaires" (0 ou 1), il est même possible (par substitution de variable) d'en extraire d'autres qui permettent de reconstituer une porte logique *NAND* ou bien une porte logique *NOR* (algèbre de *BOOLE*). Le calcul propositionnel classique devient donc intégralement interprétable en fonction de ces formules qui traitent uniquement la primalité des entiers. Ce qui permet également d'établir un lien avec les ondes physiques.

De plus, parallèment à ces formules et l'agèbre de *BOOLE* qui permet une étude complémentaire, les travaux portent sur des énoncés constructibles en dehors de tout raisonnement cohérent. La démarche est non-conventionnelle, mais cependant, elle permet d'intégrer un énoncé dont on peut considérer que la valeur de vérité peut être indifféremment 0 ou 1 (on peut même considérer que les 2 états sont superposés). La preuve apportée ne tire aucune conclusion directe du théorème de *GODEL* (ce qui serait un abus), bien que celui-ci constitue une partie de la réflexion. Il semblerait que ce phénomène soit fondamentalement indéterministe. En tenant compte du domaine de définition de $D(N)$ et dans le cas des phénomènes cycliques, ce phénomène trouve d'ailleurs une représentation géométrique (physique) qui le représente fidèlement, et même assez simplement.

L'ensemble de cette théorie se fixe pour objectif de représenter tous ces phénomènes par une synthèse. Le but le plus élevé étant de donner une représentation physique au photon.

Résumé par chapitre

Chapitre I : formule mathématique de factorisation d'un nombre entier (en produits de nombres premiers)

- Il existe une formule mathématique permettant de factoriser un nombre entier N (en produit de nombres premiers avec leur puissance respective), nommée $D(N)$ (D pour "*D*écomposition"). Son domaine de définition est $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$ (voir sous-partie "**2.3 Théorème de décomposition d'un nombre entier N en produit de facteurs premiers**").

- La formule de *MINÁC-WILLANS* est un cas particulier de la formule $D(N)$, qui a été nommée $s(M)$ (voir sous-partie "**3.1 Formule simplifiée $s(M)$**").

- La formule $\mathfrak{I}(M) = s(2.M + 2) = s(M + 2).s(M + 3)$, assimilable à une "impulsion" (voir sous-partie "**3.4 Formule d'Impulsion Première $\mathfrak{I}(M)$**"), permet d'établir un lien entre les polynômes à coefficients entiers et leur(s) racines lorsqu'elle(s) existe(nt) (voir **Chapitre II**).

- Ces 2 dernières formules permettent de reconstituer une porte logique *NAND* ou une porte logique *NOR*, ce qui permet d'établir un lien avec l'algèbre de *BOOLE* (voir sous-partie "**3.7 Equivalences de formules**", paragraphe "**Autres cas intéressant, un cas "binaire"**"). Le calcul propositionnel classique devient donc intégralement interprétable en fonction de ces formules qui traite uniquement la primalité des entiers.

- Une nouvelle forme d'écriture de la fonction ζ de *RIEMANN* est donnée (voir sous-partie "**3.8.8 Réécriture de la fonction ζ (Zêta) de *RIEMANN***", ce qui permet d'établir un lien intéressant avec le **Chapitre IV**.

- La formule $D(N)$ ne permettant pas d'être pratique d'exploitation, des pistes visant à alléger la simplification des calculs de $D(N)$ sont avancées. Ce qui est également l'objet du **Chapitre IV**.

Cependant, en oubliant volontairement la complexité des calculs de la formule $D(N)$, mais en ne tenant compte seulement que de son domaine de définition et en associant la variable N à une grandeur physique, il est possible d'envisager une théorie physique.

Chapitre II : reconstitution de fonctions connues, liens avec les polynômes

La formule $\Im(M)$ permet également d'établir un lien direct avec les racines des polynômes aux coefficients entiers et de degré quelconque (voir sous-partie "**5.3 Généralisation avec les polynômes**").

Chapitre III : Répartition exacte des nombres premiers

Ces 2 formules citées, $s(M)$ et $\Im(M)$, permettent de donner un équivalent à la méthode de *MINÁC-WILLANS* (différente dans la forme) pour donner la répartition exacte des nombres premiers (voir sous-partie "**7.3 Formule P_n de répartition exacte des nombres premiers**"), ce qui ne rend pas encore les calculs pratiques... L'utilité d'une formule dont le calcul serait optimal (objectif du **Chapitre IV**) se fait sentir ici aussi.

Chapitre IV : Etude de la fonction ζ de *RIEMANN* et du nombre π

Le but de ce chapitre est de rechercher une méthode qui permette de simplifier ou de rendre le calcul optimal afin d'obtenir des nombres premiers. Comme le montre la sous-partie "**3.8.7 Produit de nombres factoriels et divisibilité par M, généralisation**" du **Chapitre I**, les calculs peuvent être réduits (le but étant de donner une formule sous la forme qui permet de rendre le calcul optimal, c'est-à-dire de le réduire le plus possible).

De plus, l'étude d'autres fonctions de la forme de la fonction ζ, et la fonction ζ révèlent des régularités communes qui permettraient d'atteindre cet objectif de manière "directe". Le prix à payer étant un travail long et des efforts très importants à fournir, ce chapitre est largement en cours de réalisation. Cependant, il fait partie de mes priorités. Il ne sera publié intégralement que lorsque j'estimerai que mes travaux le concernant auront atteint une maturité satisfaisante.

Chapitre V : Réflexions logiques et philosophiques

- Tout d'abord, les méthodes employées dans ce chapitre peuvent parfois paraître non-conventionnelles mais cependant nécessaire à la compréhension du phénomène suivant. L'intérêt (entre autre) est la preuve logique qu'il soit possible de construire des énoncés en dehors de tout raisonnement cohérent (voir partie "**14 Preuve de la liberté**", et notamment la sous-partie "**14.5 Preuve complète : incomplétude et variable de valeur de vérité indéfinissable**"). La preuve apportée ne tire aucune conclusion directe du théorème de *GODEL* (ce qui serait un abus), bien que celui-ci constitue une partie non-négligeable de la réflexion.

En reliant les valeurs de vérités des énoncés tels que $E =$ [**l'énoncé** E **est indémontrable**] aux tables de vérité de l'algèbre de *BOOLE*, il est possible d'établir qu'un tel énoncé ne peut être construit qu'en dehors de toute règle de logique. Il est même possible d'établir qu'un tel énoncé a une valeur de vérité U qui possède indifféremment les 2 états $vrai$ ou $faux$ (il est même possible de concevoir que ces 2 états soient superposés) sans que cela ne pose de problème de cohérence.

Notre réalité ne peut pas être décrite de manière exclusivement déterministe, car si tel était le cas, nous pourrions à partir d'une formule (ou d'une loi physique) déduire toutes les autres, ce qui pourrait être retranscrit par des portes logiques "*OU EXCLUSIF*" uniquement. Or, l'énoncé E ne peut pas être retranscrit à l'aide de ce type de porte logique uniquement. Cependant, il peut être retranscrit à l'aide d'un autre type de portes logiques (connues), qui confirment qu'un énoncé puisse être indifféremment être $vrai$ ou $faux$.

- De plus, ce chapitre fixe des limites à ce qu'il est possible de concevoir lorsque l'on envisage d'aboutir à une théorie physique.

- Pour finir, la démarche n'étant pas conventionnelle, je dois cependant l'assumer. Ce chapitre m'a demandé d'importants efforts d'organisation, de réorganisation, de rectifications et de reformulations (depuis la $1^{ière}$ publication) pour rendre compréhensible ce phénomène. Bien que je ne sois pas parfaitement satisfait de ce chapitre, ne passez pas à côté de l'idée que je vais essayer d'exprimer! En effet, elle me paraît être d'une importance fondamentale. **Je ne serais que ravi que l'on arrive à me prouver le contraire par des moyens logiques équivalents!** N'hésitez donc pas à me contredire si nécessaire : le débat peut faire émerger quelquechose de plus grand!

Chapitre VI : Théorie physique de décomposition des phénomènes cycliques

Tout ceci nous amène au dernier chapitre (travaux en cours) qui propose de faire la synthèse de l'ensemble des chapitre précédent.

- Associer la variable N de la formule $D(N)$ à une variable physique comme la longueur d'onde du photon permet de concevoir l'existence d'une unité de mesure indivisible de longueur, d'un minimum pour la longueur d'onde ($\lambda_{min} = 2$, unités naturelles de $PLANCK$) et la discontinuité de l'espace.

- Associer la variable N de la formule $D(N)$ à une variable physique comme la période d'un phénomène cyclique (ou photon) permet de concevoir l'existence d'une unité de mesure indivisible de durée, d'un minimum pour la période ($T_{min} = 2$, unités naturelles de $PLANCK$) et la discontinuité du temps.

D'où l'existence d'un maximum pour la fréquence $f_{max} = 1/2$ et d'un maximum pour la fréquence angulaire $\omega_{max} = \pi$ pour tout phénomène cyclique.

- En supposant l'existence d'éléments indivisibles et identiques appartenant à un ensemble, associer la variable N de la formule $D(N)$ à la quantité d'éléments de cet un ensemble permet de concevoir qu'il soit possible de décomposer un ensemble d'éléments en sous-ensembles fondamentaux. Ainsi, cela implique également d'admettre :

* l'existence d'une unité de mesure indivisible (la valeur 1, évidemment),
* l'existence d'une limite minimum pour un sous-ensemble ($N_{min} = 2$ éléments, le cas de l'intrication impose 1 groupe d'au moins 2 photons),
* que nos mesures ne puissent être que discontinues (domaine de définition des nombres entiers).

- Le domaine de définition de la formule $D(N)$ donne ainsi un cadre et les limites (avec entre autres $\omega_{max} = \pi$) pour la représentation géométrique du phénomène fondamentalement indéterministe évoqué dans le **Chapitre V**.

- L'objectif de ce chapitre (objectif non atteint car les travaux sont encore en cours de réalisation) est de proposer un modèle de représentation géométrique au photon, afin d'envisager (je l'espère) une possible représentaion du phénomène d'intrication quantique.

Pour finir

Ce que j'ai voulu mettre en évidence, et il ne faut finalement retenir que cela, c'est que l'on ne peut que constater qu'il existe des conditions favorables à l'émergence d'un tel indéterminisme, le "plus profond" indéterminisme possible :

* Une formule mathématique $D(N)$ qui permet de donner un domaine de définition à une vairaible N, et donc un cadre de représentation géométrique si l'on admet que l'on puisse associer N à une grandeur physique (la longueur d'onde, la période ou la quantité d'éléments d'un ensemble);
* Pour la variable indéfinissable U, la mise en présence de 2 éléments indivisibles et identiques dans le cas limite $\omega_{max} = \pi$: une seule configuration au départ qui permet 2 interprétations possibles (indifféremment), 2 interprétations qui sont même dans des états binaires "superposés". La mise en présence d'un $3^{ième}$ élément supplémentaire indivisible et identique aux 2 autres permet d'aboutir à 2 conséquences potentiellement équiprobables, dont uniquement l'une des 2 peut effectivement se réaliser. Il est fort probable que ce phénomène soit très répandu.
* Cette représentation doit enfin permettre de rendre compte des effets de la relativité dans une particule en mouvement par rapport à un observateur (en cours de réalisation, bien que les idées essentiels soient indiquées).

Cette conception des choses (relativement simple à représenter géométriquement, finalement) permettrait aussi de donner une raison aux phénomènes cycliques et à la diversité des formes d'assemblages de matière.

En fait, j'ai la forte intuition que tôt ou tard, les sciences seront amenées à examiner un cas physique équivalent à celui. Notamment la recherche du domaine robotique et la cybernétique, ce qui permettrait de donner aux robots une "liberté" , une autonomie, à l'instar des êtres vivants, de pouvoir faire des choix cohérents OU en dehors de toute cohérence logique (dans cette éventualité, je préconise d'ailleurs toujours la vigilance).

CHAPITRE I

Formule Mathématique de Factorisation d'un Nombre Entier (en Produit de Nombres Premiers)

Introduction générale

Les travaux qui vont suivre sont issus d'une remarque simple mais d'une importance fondamentale sur la régularité des variations de la puisssance de chaque nombre premier P_n, dont la puissance est notée α_n, dans le cas de la factorisation d'un nombre entier positif $N \geq 2$. L'étude sera divisée en plusieurs parties car elle fait intervenir plusieurs formules utiles pour atteindre cet objectif. Nous terminerons en donnant simplement une formule unique permettant cette factorisation d'un nombre entier en produit de nombres premiers.

Je précise que je suis l'auteur unique de ces réflexions, de ces démonstrations, de ces travaux et de leurs conclusions, et du contenu de ces 6 chapitres dont le plan est donné précédemment.

Je désire par avance prévenir le lecteur que je ne suis pas mathématicien ou scientifique de profession. J'ai pourtant un goût et un intérêt très prononcé pour ces diciplines, et les thèmes de la logique en général, activités auxquelles j'aimerais participer davantage. J'aime m'intéresser avant tout aux problèmes non résolus. Pour cette raison, on pourrait trouver que mes démonstrations seraient peut-être un peu rapides, mais je donnerai des exemples en nombre suffisant lorsque nécessaire pour vous convaincre de l'importance d'un phénomène qui semble se manifester dans un ordre, et non pas au hasard. Je me suis intéressé de très près aux nombres premiers après m'être intéressé aux systèmes réguliers auxquels j'ai trouvé des formules en marge de ma formation scolaire. Je pense désormais que les nombres premiers apparaissent de manière régulière, je désire donc informer le plus possible sur mes découvertes. Il existe une formulation pour dire que les nombres premiers ne sont divisible que par 1 et par eux-même, il doit donc exister une formule équivalente pour l'exprimer aussi en langage mathématique. Le but est clairement de connaître de manière précise la répartition des nombres premiers, ou à quels "moments" ils apparaissent. Pour cela, les travaux sont divisés en deux ensembles importants. Un **Premier Chapitre** qui porte sur la factorisation d'un nombre entier en produit de nombres premiers, les deux chapitres suivants portent sur la répartition exacte des nombres premiers. Il m'a semblé intéressant d'aborder un **Deuxième Chapitre** du fait des propriétés de fonctions étudiées dans le **Premier Chapitre**. En effet, celui-ci permettra d'établir des liens intéressants entre divers fonctions connues (notamment les polynômes à coefficients entiers). Le **Troisième Chapitre** donne la répartition exacte des nombres premiers (en conséquence des formules étudiées dans le premier et dans le **Deuxième Chapitre**).

Par conséquent et j'insiste sur ce point, ces travaux sont plus une réflexion permettant de fournir des réponses théoriques aux problèmes liés aux nombres premiers qu'une méthode pratique pour parvenir à des calculs rapides.

L'étude du **Quatrième Chapitre** se propose au contraire de rechercher une méthode pour rendre optimal le calcul des nombres prmiers (partiellement vue en **Chapitre I**), l'objectif étant de les rendre exploitable en pratique, ce qui en fait un chapitre nettement plus ambitieux.

Le **Cinquième Chapitre** permet de développer des approches strictement logiques, mais aussi philosiques qu'il m'a semblé intéressant d'exposer. Il est au moins aussi important que les autres étant donné qu'il permet de nous guider au **Sixième Chapitre** en donnant un ensemble de règles utiles pour une orientation vers la représentation de phénomènes physiques.

Finalement, et s'appuyant sur les chapitres précédents, ce **Dernier Chapitre** se propose d'établir un lien avec des phénomènes physiques cycliques, et notamment un lien avec des phénomènes quantique (mathématiques appliquées), en faisant la synthèse des points essentiels que nous allons étudier au cours de cette théorie.

<u>A noter :</u>

Une démonstration plus complète de ce qui va suivre est proposée dans la partie intitulée "**2 Démonstration complète**" (page 52). La partie "**1 Factorisation et mécanique des puissances**" (page 21) n'étant ici que pour appuyer et renforcer par des exemples précis la partie démonstration. Celle-ci permet également de s'accoutumer et à se persuader du phénomène régulier qui se produit concernant les nombres premiers.

Rappels

- Tout d'abord, Il a déjà été démontré de plusieurs manières différentes dans l'Histoire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

- Rappelons que tout nombre $N \in \mathbb{N}$, tel que $N \geq 2$, est factorisable en produit de nombres premiers $P_n \in \mathbb{P}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) de cette manière :

  $$N = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times P_3^{\alpha_3} \times ... \times P_n^{\alpha_n}$$

  avec $P_1 = 2$, et tel que $P_1 < P_2 < P_3 < ... < P_n$,
  $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ étant des nombres premiers consécutifs
  (c'est-à-dire $P_1 = 2$, $P_2 = 3$, $P_3 = 5$, $P_4 = 7$, $P_5 = 11...$).

- Nous pourrions nous limiter à un nombre de termes “utiles” (limité par n) ou encore écrire N sous la forme d'un produit d'une infinité de nombres premiers P_n :

  $$N = \prod_{n=1}^{n \to +\infty} (P_n)^{\alpha_n}$$

  Dans ce cas, les termes non utiles aurant leur puissance $\alpha_n = 0$ (notamment tous les P_n supérieur au plus grand nombre premier utile à la factorisation).

- Mais il faut aussi noter que nous aurions pu écrire ce nombre comme produit de tous les nombres entiers $M_i \in \mathbb{N}$, $M_i \geq 2$ ainsi :

  $$N = \prod_{i=1}^{i \to +\infty} (M_i)^{a_i}$$

  Dans ce cas, nous pouvons ramener cette formule à la formule précédente car les seuls termes utiles sont ceux contenant des nombres premiers. En effet, la plupart des puissances a_i pourront être égales à 0, notamment lorsque $M_i \notin \mathbb{P}$, et, dans le cas où $M_i \in \mathbb{P}$, lorsque M_i n'est pas un nombre premier utile à la factorisation de N.

Remarque préalable

Nous noterons que :

$$N = P_n \qquad \text{si} \qquad \sum_{n=1}^{n \to +\infty} (\alpha_n) = 1$$

Remarquons ici aussi que nous pourrions nous limiter à une somme de termes utiles plutôt qu'à une somme infinie (Ce que nous tenterons de faire).

1

Factorisation et mécanique des puissances

Commençons par la formule suivante :

$$N = \prod_{n=1}^{n \to +\infty} (P_n)^{\alpha_n}$$

Avec $P_n \in \mathbb{P}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$),
avec $P_1 = 2$, et tel que $P_1 < P_2 < P_3 < ... < P_n$,
$P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ étant des nombres premiers consécutifs
(c'est-à-dire $P_1 = 2$, $P_2 = 3$, $P_3 = 5$, $P_4 = 7$, $P_5 = 11$...).

Rappel évident :

α_1 correspond à la puissance de P_1
α_2 correspond à la puissance de P_2
α_3 correspond à la puissance de P_3
...
α_n correspond à la puissance de P_n

Nous pouvons construire un tableau de référence $T.R.1$ (qui est immuable) où la première colonne représente N, et toutes les suivantes représentent les α_n qui correspondent à N :

Exemple préalable pour $N = 12$, $N = 2^2 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^0 \times ... \times {P_n}^0 \times ...$
Donc $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 1$; $\alpha_3 = 0$; $\alpha_4 = 0$; ... $\alpha_n = 0$; ...

*T.R.*1

N	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	...	α_n
1	0	0	0	0	0	0	0	...	0
2	1	0	0	0	0	0	0		0
3	0	1	0	0	0	0	0		0
4	2	0	0	0	0	0	0		0
5	0	0	1	0	0	0	0		0
6	1	1	0	0	0	0	0		0
7	0	0	0	1	0	0	0		0
8	3	0	0	0	0	0	0		0
9	0	2	0	0	0	0	0		0
10	1	0	1	0	0	0	0	...	0
11	0	0	0	0	1	0	0		0
12	2	1	0	0	0	0	0		0
13	0	0	0	0	0	1	0		0
14	1	0	0	1	0	0	0		0
15	0	1	1	0	0	0	0		0
16	4	0	0	0	0	0	0		0
17	0	0	0	0	0	0	1		0
18	1	2	0	0	0	0	0		0
19	0	0	0	0	0	0	0		0
20	2	0	1	0	0	0	0	...	0
21	0	1	0	1	0	0	0		0
22	1	0	0	0	1	0	0		0
23	0	0	0	0	0	0	0		0
24	3	1	0	0	0	0	0		0
25	0	0	2	0	0	0	0		0
26	1	0	0	0	0	1	0		0
27	0	3	0	0	0	0	0		0
28	2	0	0	1	0	0	0		0
29	0	0	0	0	0	0	0		0
30	1	1	1	0	0	0	0	...	0
31	0	0	0	0	0	0	0		0
32	5	0	0	0	0	0	0		0
33	0	1	0	0	1	0	0		0
34	1	0	0	0	0	0	1		0
35	0	0	1	1	0	0	0		0
36	2	2	0	0	0	0	0		0
37	0	0	0	0	0	0	0		0
38	1	0	0	0	0	0	0		0
39	0	1	0	0	0	1	0		0
40	3	0	1	0	0	0	0	...	0
41	0	0	0	0	0	0	0		0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
P_n	0	0	0	0	0	0	0	...	1

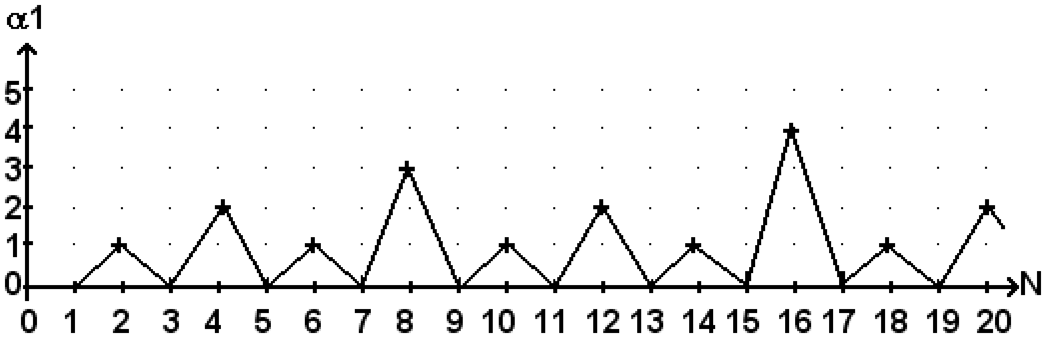
La compréhension de ce tableau est essentielle pour la suite de l'étude de la factorisation d'un nombre entier. Nous remarquons aisément des symétries et des régularités à l'intérieur de chaque colonne. De plus, les données de ce tableau sont immuables (elles seront toujours constantes) : nous pouvons donc nous en servir en permanence. Par la suite, nous allons donner une représentation graphique à ces données, et pour plus de lisibilité, nous allons lier chaque point du graphique par des segments (ceux-ci ne représentant donc pas une continuité, puisque passer d'un nombre entier à un autre invoque nécessairement la discontinuité). Comme nous allons le voir, et pour N un nombre entier positif, chaque graphique correspondant à une puissance α_n est assimilable à une "onde" qui peut être décomposée en somme de plusieurs ondes plus simples.

Remarque :

Le tableau de référence $T.R.1$ peut être construit de manière "mécanique", une fois que l'on comprend comment se répètent (par symétries) et s'incrémentent les valeurs dans une colonne α_n. Nous pouvons déjà constater facilement qu'un nombre N est un nombre premier si et seulement si la somme de toutes les valeurs de α_n (pour un nombre N, cela correspondant à une ligne complète de valeurs de α_n) vaut 1.

1.1 Etude de la puissance de 2

Colonne α_1, correspondant à $P_1 = 2$:



Il est important de garder à l'esprit que de cette manière, nous avons regroupé tous les multiples de 2 (c'est-à-dire P_1) grâce à la "courbe" de α_1.

On distingue clairement ces symétries sur des longueurs finies :

Une Symétrie verticale S_1 en $N = 2$ de Longueur $L_1 = 2$ sur l'axe N;
Une Symétrie verticale S_2 en $N = 4$ de Longueur $L_2 = 6$ sur l'axe N;
Une Symétrie verticale S_3 en $N = 8$ de Longueur $L_3 = 14$ sur l'axe N;
Une Symétrie verticale S_4 en $N = 16$ de Longueur $L_4 = 30$ sur l'axe N;
...

Et pour $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$:

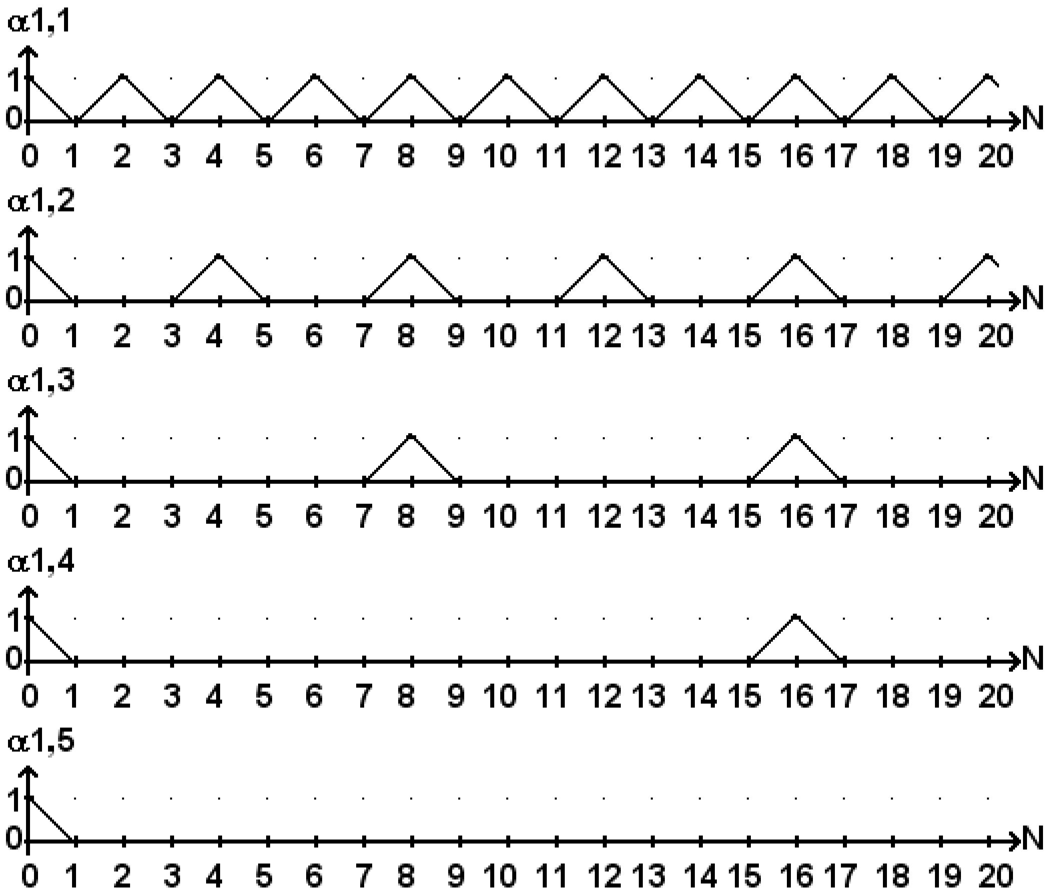
Une Symétrie verticale S_a en $N = (P_1)^a$ de Longueur $L_a = 2.(P_1)^a - 2$ sur l'axe N.

Notons aussi que le nombre de répétition R_a des sommets de même hauteur jusqu'à l'axe de symétrie est régulière et que :

Pour S_1, on a $R_1 = P_1 - 1$
Pour S_a, on a $R_a = {P_1}^a - 1$

Pour comprendre que la "courbe" α_1 est régulière, nous devons garder à l'esprit qu'elle dépend directement de N. Car dans le cas de cette courbe, P_1 voit logiquement sa puissance α_1 s'annuler lorsque N est impaire (c'est-à-dire lorsque N n'est pas multiple de 2) : c'est-à-dire une fois sur 2. Le reste de la construction est aussi simple car dans les nombres paires restant, nous avons ceux qui sont multiples de 2^1, ceux multiples de 2^2, ceux multiples de 2^3, ... ceux multiples de ${P_1}^{\alpha_1}$.

Or, cette façon de procéder nous donne directement la construction de la courbe α_1 comme une superposition d'une infinité de courbes plus simples, que nous pouvons décomposer comme un somme de courbes $\alpha_{1,x}$ (avec $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$) :



Ces courbes sont répétées d'un sommet à l'autre de manière régulière (la longueur entre chaque sommet est identique) et infinie.

Nous avons donc :

$$\alpha_1 = \sum_{x=1}^{x \to +\infty} (\alpha_{1,x})$$

Nous devons prendre en compte le caractère périodique de chaque $\alpha_{1,x}$ pour la construction de leur courbe. les fonctions recherchées devront donc refléter cette périodicité. De plus, nous devons avoir $\alpha_{1,x} = 1$ pour $N = 0$. Nous sommes dans le cas de la fonction *SINUS*. De plus $\alpha_{1,x}$ n'admettant pas de valeur négative mais seulement les valeurs 0 et 1, nous devrons élever cette fonction au carré. De là, nous déduisons facilement $\alpha_{1,1}$. Pour les courbes suivantes, nous devons simplement trouver le moyen d'avoir une fonction nulle pour certaines valeurs de N réparties régulièrement, ce que permettent les fonctions polynômiales lorsqu'elles sont associées à la fonction *SINUS*. Nous devons finalement diviser ce polynôme $\mathrm{P}(N)$ par une fonction qui nous permette d'avoir la valeur $\alpha_{1,x} = 1$ au moins tous les 2^x pour N. c'est-à-dire que la fonction *SINUS* élevée au carré doit valoir 1, ou encore :

$$\sin^2\left(\frac{\mathrm{P}(N).\pi}{d(N)}\right) = 1 \text{ (avec } d(N) \text{ le dénominateur).}$$

Pour qu'un polynôme $\mathrm{P}(N)$ s'annule uniquement pour 1, il doit être de la forme : $\mathrm{P}(N) = (N - 1)$.

Pour que ce polynôme s'annule seulement pour 1 et pour 2, il doit être de la forme : $\mathrm{P}(N) = (N - 1)(N - 2)$.

Pour qu'il s'annule seulement pour 1, pour 2 et pour 3, il doit être de la forme : $\mathrm{P}(N) = (N - 1)(N - 2)(N - 3)$.

Pour qu'il s'annule seulement pour 1, pour 2, pour 3, ... et pour $y \in \mathbb{N}$, $y \geq 1$, il doit être de la forme : $\mathrm{P}(N) = (N - 1)(N - 2)(N - 3)...(N - y)$.

En admettant que $N = 0$ pour chacune de ces lignes précédentes, le polynôme sera non nulle, et c'est la valeur du dénominateur $d(N)$ qui permet à la fonction de prendre 1 pour valeur.

Avec pour $\alpha_{1,x}$:

$$\alpha_{1,1} = \sin^2\left(\frac{(N-1).\pi}{2}\right)$$
$$\alpha_{1,2} = \sin^2\left(\frac{(N-1)(N-2)(N-3).\pi}{4}\right)$$
$$\alpha_{1,3} = \sin^2\left(\frac{(N-1)(N-2)(N-3)(N-4)(N-5)(N-6)(N-7).\pi}{32}\right)$$
$$\alpha_{1,4} = \sin^2\left(\frac{(N-1)(N-2)...(N-14)(N-15).\pi}{4096}\right)$$
$$\alpha_{1,5} = \sin^2\left(\frac{(N-1)(N-2)...(N-30)(N-31).\pi}{134217728}\right)$$
$$...$$

Il y a un lien direct entre le numérateur et le dénominateur car il n'est pas utile que ce dénominateur soit autre chose qu'une puissance de 2 (il suffit de faire référence à la trigonométrie). En effet, le numérateur faisant intervenir N, il sera composé en puissance de 2, on le remarque aisément en remplaçant N par 0 (pour des raisons pratiques ne gênant pas la suite du raisonnement, notons que cela fonctionne avec tout autre entier positif). Le dénominateur doit alors obligatoirement aussi être composé en puissance de 2 (au moins) mais seulement d'une unité supérieure, ceci afin de permettre la validité des courbes.

De plus, en comparant les "$\alpha_{1,x}$" , nous remarquons aussi une régularité entre les termes de chaque numérateur (dans les parenthèses) et encore une autre régularité entre les termes de chaque dénominateur.

Ici, les valeurs de la puissance (de 2) dans le dénominateur $d(N)$ sont 1; 2; 5; 12; 27; 58; ... Or :

$$\begin{array}{rcl}
1 & = & 2^1 - 1 \\
2 & = & 2^2 - 2 \\
5 & = & 2^3 - 3 \\
12 & = & 2^4 - 4 \\
27 & = & 2^5 - 5 \\
58 & = & 2^6 - 6 \\
... & & \\
... & = & 2^x - x
\end{array}$$

D'où :

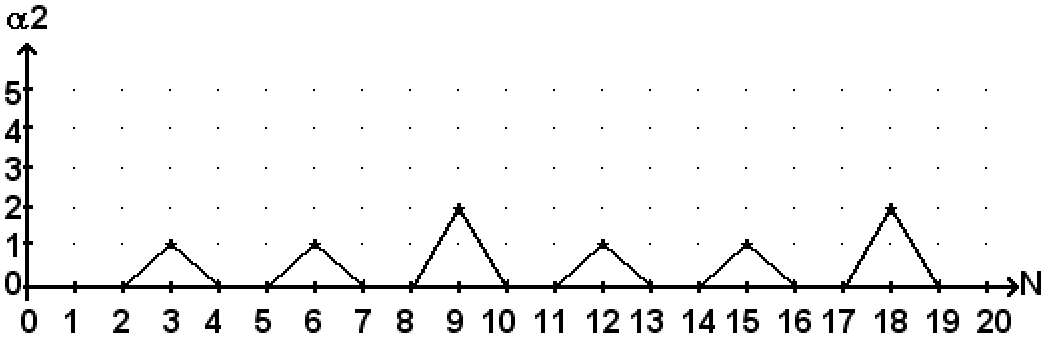
$$\alpha_{1,x} = \sin^2 \left(\pi . \frac{\prod_{h=1}^{h=(2^x-1)} (N-h)}{2^{(2^x-x)}} \right)$$

Et voici donc la formule de la puissance α_1 pour P_1 :

$$\alpha_1 = \sum_{x=1}^{x \to +\infty} \sin^2 \left(\pi . \frac{\prod_{h=1}^{h=(2^x-1)} (N-h)}{2^{(2^x-x)}} \right)$$

1.2 Etude de la puissance de 3

Colonne α_2, correspondant à $P_2 = 3$:



Il est important de garder à l'esprit que de cette manière, nous avons regroupé tous les multiples de 3 (c'est-à-dire P_2) grâce à la courbe de α_2.

De la même manière, des symétries apparaissent régulièrement :

Une Symétrie verticale S_1 en $N = 3$ de Longueur $L_1 = 4$ sur l'axe N;
Une Symétrie verticale S_2 en $N = 9$ de Longueur $L_2 = 16$ sur l'axe N;
Une Symétrie verticale S_3 en $N = 27$ de Longueur $L_3 = 52$ sur l'axe N;
Une Symétrie verticale S_4 en $N = 81$ de Longueur $L_4 = 160$ sur l'axe N;
...

Et pour $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$:

Une Symétrie verticale S_a en $N = (P_2)^a$ de Longueur $L_a = 2.(P_2)^a - 2$ sur l'axe N.

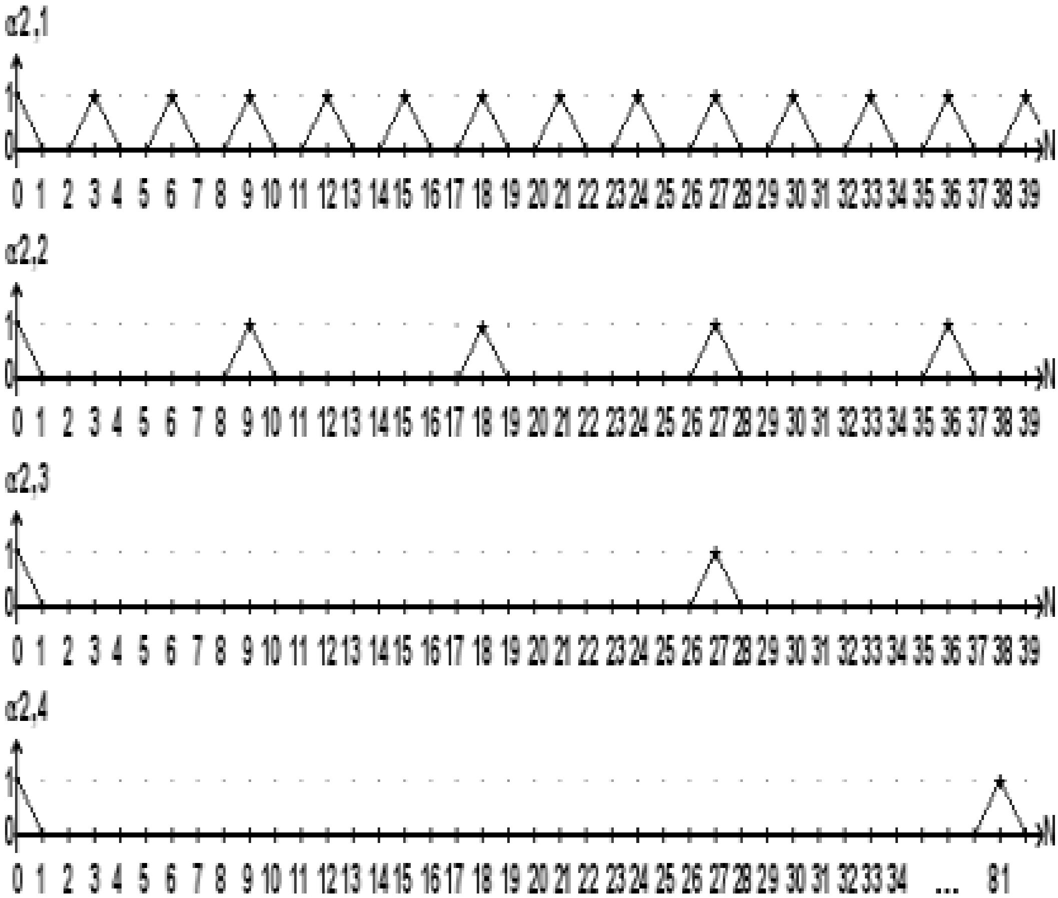
Notons aussi que le nombre de répétition R_a des sommets de même hauteur jusqu'à l'axe de symétrie est régulière et que :

Pour S_1, on a $R_1 = P_2 - 1$
Pour S_a, on a $R_a = {P_2}^a - 1$

Pour les mêmes raisons que la courbe α_1, α_2 est régulière car elle aussi dépend directement de N. En effet, dans le cas de cette courbe, P_2 voit logiquement sa puissance α_2 s'annuler lorsque N n'est pas multiple de 3 : c'est-à-dire une fois sur 3.

Le reste de la construction est aussi simple car dans les nombres restants, nous avons ceux qui sont multiples de 3^1, ceux multiples de 3^2, ceux multiples de 3^3, ... ceux multiples de ${P_2}^{\alpha_2}$.

Or, cette façon de procéder nous donne directement la construction de la courbe α_2 comme une superposition d'une infinité de courbes plus simples, que nous pouvons décomposer comme un somme de courbes $\alpha_{2,x}$ (avec $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$) :



Ces courbes sont répétées d'un sommet à l'autre de manière régulière (la longueur entre chaque sommet est identique) et infinie. Nous avons donc :

$$\alpha_2 = \sum_{x=1}^{x \to +\infty} (\alpha_{2,x})$$

De la même manière que pour les courbes de $\alpha_{1,x}$, nous utiliserons les mêmes fonctions utiles à la construction des courbes $\alpha_{2,x}$: c'est-à-dire les fonctions $\sin^2$, les polynômes $(N-1)(N-2)...(N-y)$, et un dénominateur $d(N)$ qui devra être nécessairement composé en puissance de 3.

Comme pour les courbes de $\alpha_{1,x}$, en admettant que $N=0$, le polynôme sera non nulle, et c'est la valeur du dénominateur $d(N)$ qui permet à la fonction de prendre 1 pour valeur. En cela, la méthode est la même que précédemment. Mais la différence avec les courbes de $\alpha_{1,x}$ apparaît ici et pour la suite de l'étude car nous devrons ensuite encore diviser l'ensemble par une valeur précise pour que la formule finale $\alpha_{2,x}$ puisse prendre 1 pour valeur lorsque N est un multiple de 3.

Avec pour $\alpha_{2,x}$:

$$\alpha_{2,1} = \frac{\sin^2[(N-1)(N-2).\pi/3]}{\sin^2(\pi/3)}$$
$$\alpha_{2,2} = \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)...(N-7)(N-8).\pi/3^3]}{\sin^2(\pi/3)}$$
$$\alpha_{2,3} = \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)...(N-25)(N-26).\pi/3^{11}]}{\sin^2(\pi/3)}$$
$$\alpha_{2,4} = \frac{\sin^2[(N-1)...(N-80).\pi/3^{37}]}{\sin^2(\pi/3)}$$
$$\alpha_{2,5} = \frac{\sin^2[(N-1)...(N-242).\pi/3^{117}]}{\sin^2(\pi/3)}$$
$$...$$

ATTENTION : Il est important de remarquer que cette règle n'est valable que pour un nombre premier (ici, il s'agit de 3), car nous désirons construire ce dénominateur $d(N)$ de telle sorte qu'il "compte" le nombre concernant la puissance de 3 qui résulte du calcul du polynôme au numérateur. Clairement, nous souhaitons obtenir au dénominateur une puissance de 3 qui soit d'une unité supérieur à celle du numérateur (on exécute un calcul rapidement en remplaçant volontairement N par 0).

Poursuivons en comparant les "$\alpha_{2,x}$" , nous remarquons aussi une régularité entre les termes de chaque numérateur (dans les parenthèses) et encore une autre régularité entre les termes de chaque dénominateur.

Ici, les valeurs de la puissance dans le dénominateur $d(N)$ sont 1; 3; 11; 37; 117; ... Or :

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{3^1-1}{3-1} - 1 + 1 \\
3 &= \frac{3^2-1}{3-1} - 2 + 1 \\
11 &= \frac{3^3-1}{3-1} - 3 + 1 \\
37 &= \frac{3^4-1}{3-1} - 4 + 1 \\
117 &= \frac{3^5-1}{3-1} - 5 + 1 \\
&\ldots \\
\ldots &= \frac{3^x-1}{3-1} - x + 1
\end{aligned}$$

D'où :

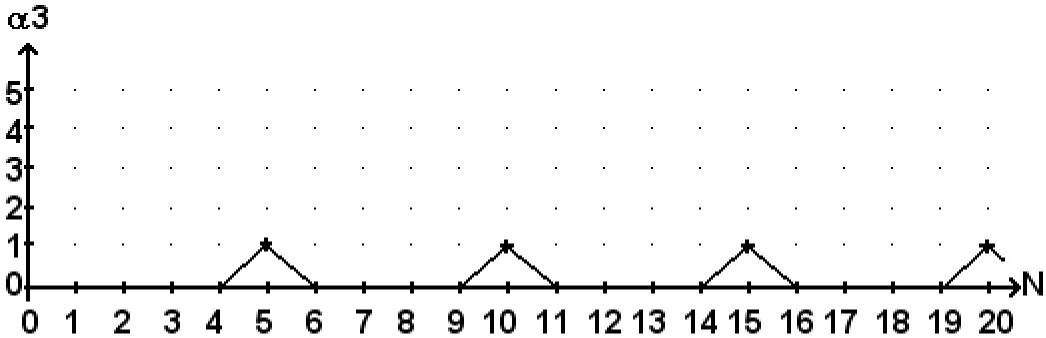
$$\alpha_{2,x} = \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.\displaystyle\prod_{h=1}^{h=(3^x-1)}(N-h)}{3^{\left(\frac{3^x-1}{3-1}-x+1\right)}}\right)}{\sin^2(\pi/3)}$$

Et voici donc la formule de la puissance α_2 pour P_2 :

$$\alpha_2 = \sum_{x=1}^{x\to+\infty} \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.\displaystyle\prod_{h=1}^{h=(3^x-1)}(N-h)}{3^{\left(\frac{3^x-1}{3-1}-x+1\right)}}\right)}{\sin^2(\pi/3)}$$

1.3 Etude de la puissance de 5

Colonne α_3, correspondant à $P_3 = 5$:



Il est important de garder à l'esprit que de cette manière, nous avons regroupé tous les multiples de 5 (c'est-à-dire P_3) grâce à la courbe de α_3.

Nous constatons aussi :

Une Symétrie verticale S_1 en $N = 5$ de Longueur $L_1 = 8$ sur l'axe N;
Une Symétrie verticale S_2 en $N = 25$ de Longueur $L_2 = 48$ sur l'axe N;
Une Symétrie verticale S_3 en $N = 125$ de Longueur $L_3 = 248$ sur l'axe N;
Une Symétrie verticale S_4 en $N = 625$ de Longueur $L_4 = 1248$ sur l'axe N;
...

Et pour $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$:

Une Symétrie verticale S_a en $N = (P_3)^a$ de Longueur $L_a = 2.(P_3)^a - 2$ sur l'axe N.

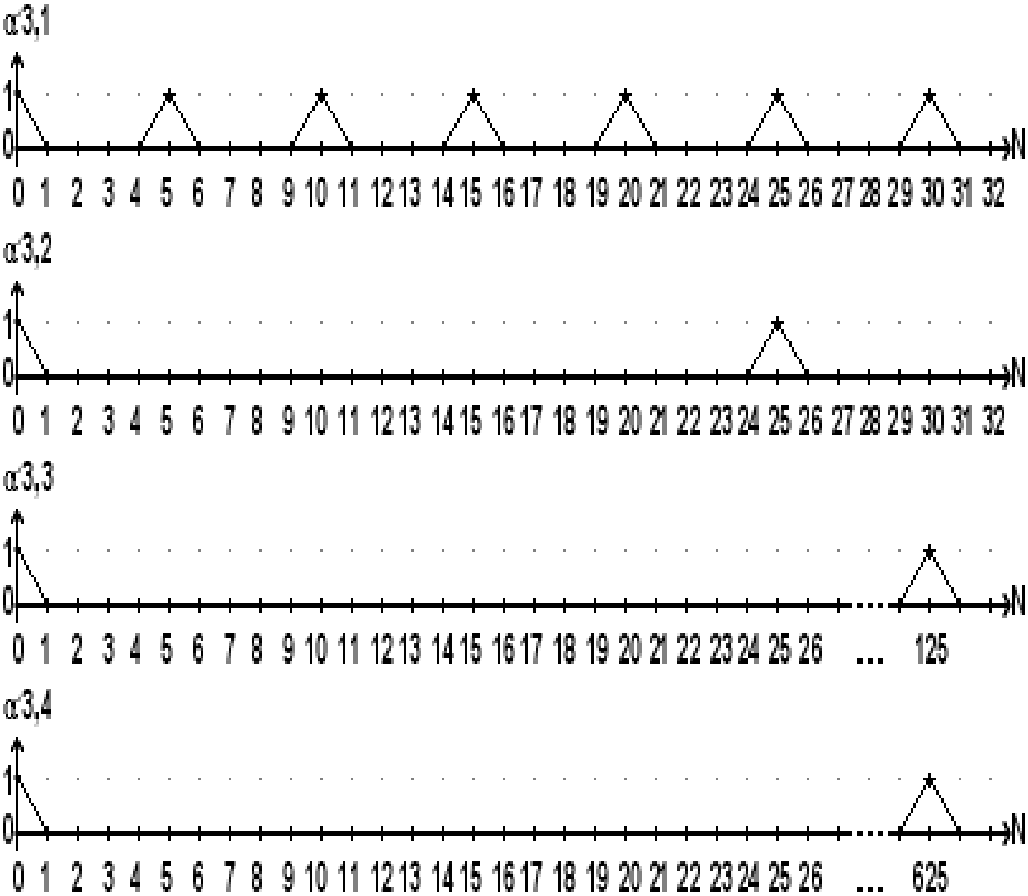
Remarquons aussi que le nombre de répétition R_a des sommets de même hauteur jusqu'à l'axe de symétrie :

Pour S_1, on a $R_1 = P_3 - 1$
Pour S_a, on a $R_a = {P_3}^a - 1$

Pour les mêmes raisons que la courbe α_1, α_3 est régulière car elle aussi dépend directement de N. En effet, dans le cas de cette courbe, P_3 voit logiquement sa puissance α_3 s'annuler lorsque N n'est pas multiple de 5 : c'est-à-dire une fois sur 5.

Le reste de la construction est aussi simple car dans les nombres restants, nous avons ceux qui sont multiples de 5^1, ceux multiples de 5^2, ceux multiples de 5^3, ... ceux multiples de ${P_3}^{\alpha_3}$.

Or, cette façon de procéder nous donne directement la construction de la courbe α_3 comme une superposition d'une infinité de courbes plus simples, que nous pouvons décomposer comme un somme de courbes $\alpha_{3,x}$ (avec $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$) :



Ces courbes sont répétées d'un sommet à l'autre de manière régulière (la longueur entre chaque sommet est identique) et infinie. Nous avons donc :

$$\alpha_3 = \sum_{x=1}^{x \to +\infty} (\alpha_{3,x})$$

De la même manière que pour les courbes de $\alpha_{2,x}$, nous utiliserons les mêmes fonctions utiles à la construction des courbes $\alpha_{3,x}$: c'est-à-dire les fonctions $\sin^2$, les polynômes $(N-1)(N-2)...(N-y)$, et un dénominateur $d(N)$ qui devra être nécessairement composé en puissance de 5.

Comme pour les courbes de $\alpha_{2,x}$, en admettant que $N = 0$, le polynôme sera non nulle, et c'est la valeur du dénominateur $d(N)$ qui permet à la fonction de prendre 1 pour valeur. En cela, la méthode est la même que précédemment. Et comme pour les courbes de $\alpha_{2,x}$, nous devrons ensuite encore diviser l'ensemble par une valeur précise pour que la formule finale $\alpha_{3,x}$ puisse prendre 1 pour valeur lorsque N est un multiple de 5.

Avec pour $\alpha_{3,x}$:

$$\alpha_{3,1} = \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)(N-3)(N-4).\pi/5]}{\sin^2(\pi/5)}$$
$$\alpha_{3,2} = \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)...(N-23)(N-24).\pi/5^5]}{\sin^2(\pi/5)}$$
$$\alpha_{3,3} = \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)...(N-123)(N-125).\pi/5^{29}]}{\sin^2(\pi/5)}$$
$$\alpha_{3,4} = \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)...(N-623)(N-624).\pi/5^{153}]}{\sin^2(\pi/5)}$$
$$\alpha_{3,5} = \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)...(N-3124)(N-3125).\pi/5^{777}]}{\sin^2(\pi/5)}$$

...

ATTENTION : Il est important de remarquer que cette règle n'est valable que pour un nombre premier ici aussi (il s'agit de 5), car nous désirons construire ce dénominateur $d(N)$ de telle sorte qu'il "compte" le nombre concernant la puissance de 5 qui résulte du calcul du polynôme au numérateur. Clairement, nous souhaitons obtenir au dénominateur une puissance de 5 qui soit d'une unité supérieur à celle du numérateur (on exécute un calcul rapidement en remplaçant volontairement N par 0).

Poursuivons en comparant les "$\alpha_{3,x}$" , nous remarquons aussi une régularité entre les termes de chaque numérateur (dans les parenthèses) et encore une autre régularité entre les termes de chaque dénominateur.

Ici, les valeurs de la puissance dans le dénominateur $d(N)$ sont 1; 5; 29; 153; 777; ... Or :

$$\begin{array}{rcl}
1 & = & \dfrac{5^1-1}{5-1}-1+1 \\
5 & = & \dfrac{5^2-1}{5-1}-2+1 \\
29 & = & \dfrac{5^3-1}{5-1}-3+1 \\
153 & = & \dfrac{5^4-1}{5-1}-4+1 \\
777 & = & \dfrac{5^5-1}{5-1}-5+1 \\
... & & \\
... & = & \dfrac{5^x-1}{5-1}-x+1
\end{array}$$

D'où :

$$\alpha_{3,x} = \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.\displaystyle\prod_{h=1}^{h=(5^x-1)}(N-h)}{5^{\left(\frac{5^x-1}{5-1}-x+1\right)}}\right)}{\sin^2(\pi/5)}$$

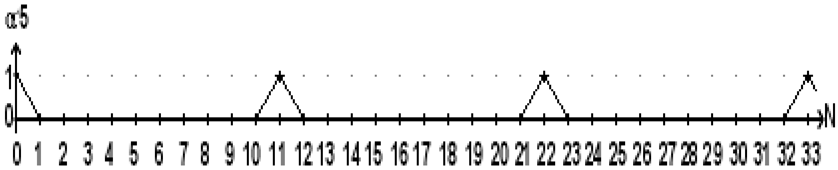
Et voici donc la formule de la puissance α_3 pour P_3 :

$$\alpha_3 = \sum_{x=1}^{x\to+\infty} \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.\displaystyle\prod_{h=1}^{h=(5^x-1)}(N-h)}{5^{\left(\frac{5^x-1}{5-1}-x+1\right)}}\right)}{\sin^2(\pi/5)}$$

1.4 Etude de la puissance de 11

Colonne α_5, correspondant à $P_5 = 11$.

Dorénavant, comme nous allons le voir, la manière de rédiger les formules est identique à partir de α_3 jusqu'à α_n. Mais prenons encore un exemple avec α_5 avant la généralisation (les explications seront plus brèves pour α_5).

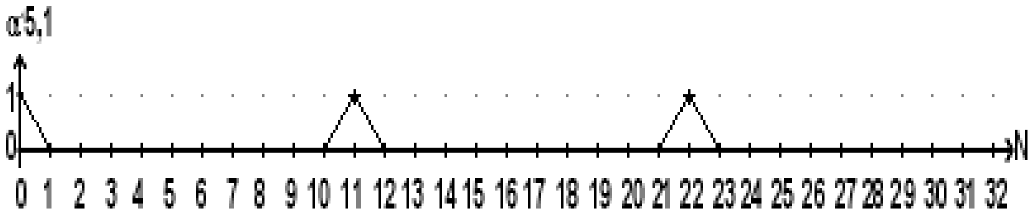


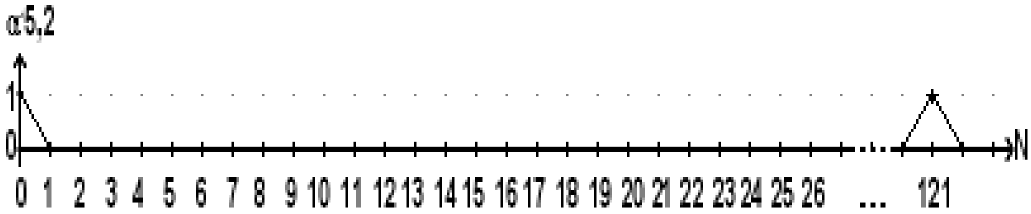
Il est important de garder à l'esprit que de cette manière, nous avons regroupé tous les multiples de 11 (c'est-à-dire P_5) grâce à la courbe de α_5.

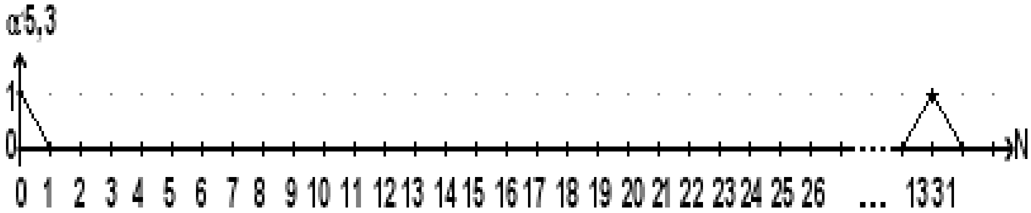
Pour $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$: une Symétrie verticale S_a en $N = (P_5)^a$ de Longueur $L_a = 2.(P_5)^a - 2$ sur l'axe N.

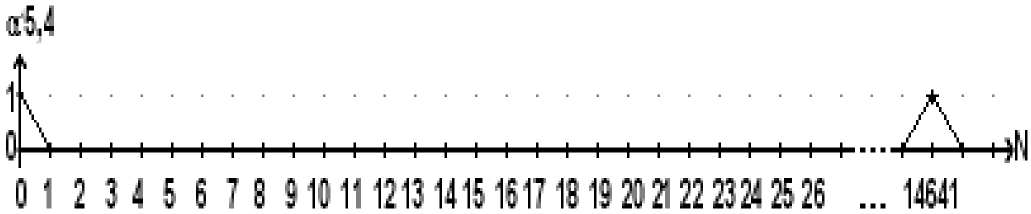
α_5 est régulière car elle dépend directement de N. α_5 est composée de la somme d'une infinité de courbes plus simples que nous noterons $\alpha_{5,x}$ (avec $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$) :

(voir page suivante)









Ces courbes sont répétées d'un sommet à l'autre de manière régulière (la longueur entre chaque sommet est identique) et infinie. Nous avons donc :

$$\alpha_5 = \sum_{x=1}^{x\to+\infty} (\alpha_{5,x})$$

Avec pour $\alpha_{5,x}$:

$$\alpha_{5,1} = \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)...(N-10).\pi/11]}{\sin^2(\pi/11)}$$
$$\alpha_{5,2} = \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)...(N-120).\pi/11^{11}]}{\sin^2(\pi/11)}$$
$$\alpha_{5,3} = \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)...(N-1330).\pi/11^{131}]}{\sin^2(\pi/11)}$$
$$\alpha_{5,4} = \frac{\sin^2[(N-1)(N-2)...(N-14640).\pi/11^{1461}]}{\sin^2(\pi/11)}$$
...

ATTENTION : Cette règle n'est valable que pour un nombre premier (ici, il s'agit de 11). Nous souhaitons toujours obtenir au dénominateur une puissance de 11 qui soit d'une unité supérieur à celle du numérateur (on exécute un calcul rapidement en remplaçant volontairement N par 0).

Ici, les valeurs de la puissance dans le dénominateur $d(N)$ sont 1; 11; 131; 1461; ... Or :

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{11^1-1}{11-1}-1+1 \\
11 &= \frac{11^2-1}{11-1}-2+1 \\
131 &= \frac{11^3-1}{11-1}-3+1 \\
1461 &= \frac{11^4-1}{11-1}-4+1 \\
&\dots \\
\dots &= \frac{11^x-1}{11-1}-x+1
\end{aligned}$$

Ce qui, au passage, nous permet de prédire la prochaine valeur du dénominateur $d(N)$ pour $\alpha_{5,5}$ (ainsi que toutes les valeurs suivantes) :

$$16101 = \frac{11^5-1}{11-1}-5+1$$

D'où :

$$\alpha_5 = \sum_{x=1}^{x\to+\infty} \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.\displaystyle\prod_{h=1}^{h=(11^x-1)}(N-h)}{11^{\left(\frac{11^x-1}{11-1}-x+1\right)}}\right)}{\sin^2(\pi/11)}$$

1.5 Etude de la puissance de Pn

Colonne α_p, correspondant à P_n.

Nous avons une Symétrie verticale S_a en $N = (P_n)^a$ de Longueur $L_a = 2.(P_n)^a - 2$ sur l'axe N.

Avec un nombre de répétition R_a des sommets de même hauteur jusqu'à l'axe de symétrie :

Pour S_1, on a $R_1 = P_n - 1$
Pour S_a, on a $R_a = {P_n}^a - 1$

α_p est régulière (comme précédemeent) car elle dépend directement de N. α_p est composée de la somme d'une infinité de “courbes” plus simples que nous noterons $\alpha_{p,x}$ (avec $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$) :

$$\alpha_p = \sum_{x=1}^{x \to +\infty} \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi . \displaystyle\prod_{h=1}^{h=({P_n}^x - 1)} (N-h)}{{P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x + 1\right)}}\right)}{\sin^2(\pi / P_n)}$$

Après vérification, nous pouvons aisément constater que cette formule inclu également α_1 (pour $P_1 = 2$), ce qui est intéressant si nous nous donnons pour objectif de généraliser.

Il est important de garder à l'esprit que de cette manière, nous regroupons tous les multiples de P_n grâce à ce système de "courbes" de α_n. Ainsi, le calcul entre le dénominateur et le numérateur dans le "$\sin^2$" permet d'obtenir exclusivement :

- Un nombre rationnel multiplié par π sous la forme $2c.\pi/P_n$

  (avec $c \in \mathbb{N}$) pour les nombres premiers impaires, de telle sorte que

  $(2c{\pm}1).\pi/P_n = d.\pi$ (avec $d \in \mathbb{N}$), et donc un nombre rationnel multiplié par π sous la forme :

  $(d.P_n \pm 1).\pi/(2.P_n)$ ce qui permet $\alpha_p = 1$.

  Et aussi un nombre rationnel multiplié par π sous la forme $(2c+1).\pi/2$ (avec $c \in \mathbb{N}$) pour $P_1 = 2$ qui est le seul nombre premier paire.

  Ou bien

- Un nombre entier multiplié par π et donc directement $\alpha_p = 0$, sauf pour le cas où P_n n'est pas connu et si nous le supposions égale à 4 : pour $x = 1$ (seulement), nous obtenons après calcul un nombre rationnel permettant $\alpha_p = 2$ pour tout N multiple de 4 alors que nous désirons avoir $\alpha_p = 0$ pour tout N dans ce cas (étant donné qu'en supposant $P_n = 4$ pour ce cas, 4 n'est pas un nombre premier). Nous allons donc aborder une étape supplémentaire pour résoudre ce problème.

1.6 Problème lorsque Pn est inconnu

Il est primordial de constater que la fonction α_p est construite de telle manière que la formule $d(N)$ du dénominateur ne se calcule qu'en fonction d'un nombre premier et non d'un autre nombre, c'est-à-dire que sans connaître ce nombre premier, nous pouvons maintenant remplacer P_n par un entier quelconque supérieur à 1, et obtenir un résultat très proche du résultat généralisé. Mais si nous nous arrêtions ici, nous rencontrions un problème si nous supposions que nous ne connaissions pas les nombres premiers dans le cas suivant :

Si nous supposions en particulier que $P_n = 4$, nous constaterions que les résultats obtenus seraient inexactes car la formule est incomplète. Effectivement, $\alpha_p = 2$ pour N multiple de 4. Nous devons donc construire une fonction qui nous permette de corriger ce problème. C'est-à-dire que nous devons construire une fonction $f(N)$ qui s'annule tous les multiples de 4 et qui vaut 1 sinon, ceci afin de ne pas perturber les résultats donnés par le reste de la formule, ce qui nous permettra de la multiplier à α_p :

$$\alpha_n = f(N).\alpha_p$$

Avec sur le même principe de construction que dans les parties précédentes (sachant que ce que nous recherchons est une fonction complémentaire à celle de la fonction *SINUS*) :

$$\alpha_n = \alpha_p.\cos^2\left(\frac{\pi}{4}.(P_n-1)(P_n-2)(P_n-3)\right)$$

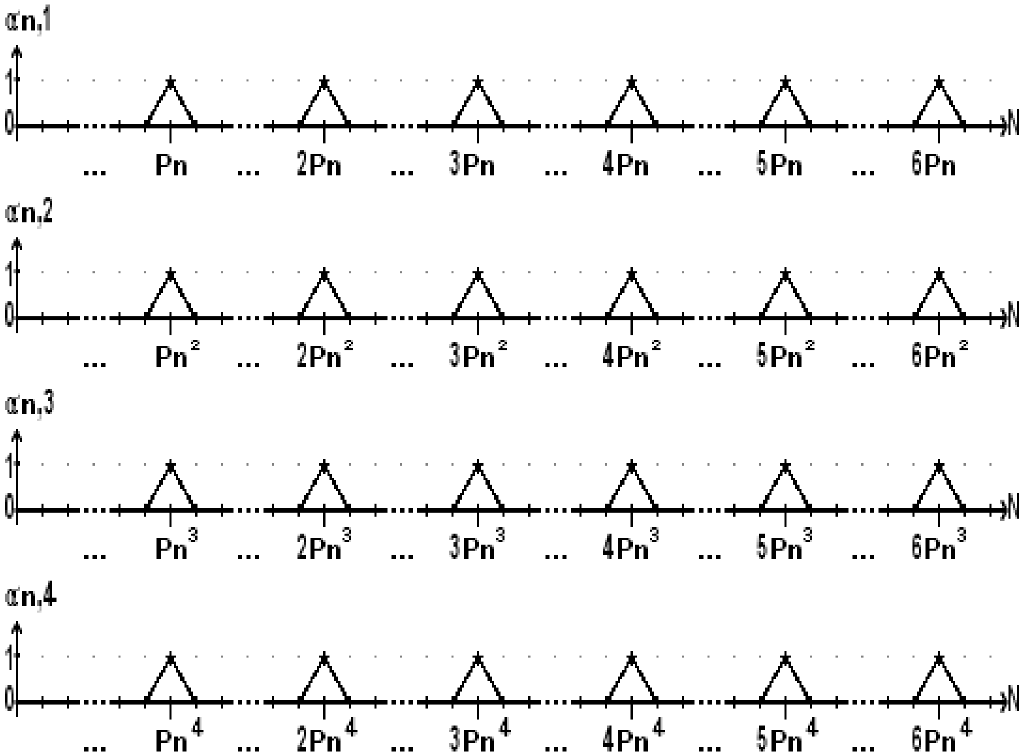
$$\alpha_n = \alpha_p.\cos^2\left(\frac{\pi}{4}.\prod_{v=1}^{v=3}(P_n-v)\right)$$

Ainsi, nous aurons construit la formule α_n permettant de donner les valeurs des puissances de chaque nombre premier P_n sans même avoir besoin de connaître P_n. En effet, cette formule ayant une valeur nulle dans le cas où nous prendrions pour P_n un autre nombre qu'un nombre premier, nous pouvons davantage la généraliser et remplacer P_n dans la formule α_n par $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$. D'ailleurs, par la suite nous donnerons la formule de factorisation sous les 2 formes.

Précisons encore que M est bornée par $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ car la formule de α_p construite contenant l'expression $\sin^2(\pi/P_n)$ sous le “grand” dénominateur, si P_n valait 1, le dénominateur vaudrait 0, or, la division par 0 est interdite. D'autre part, la construction de la fonction α_p n'est valable qu'à partir du nombre 2 étant donné que tout nombre élevé à une puissance supérieur à 1 vaut autre chose que ce nombre lui-même, ce qui n'est pas le cas pour le nombre 1. En effet, lorsqu'on élève le nombre 1 à une puissance quelconque supérieur 1, on obtient toujours 1. Cette formule ne peut donc pas le concerner.

Ceci exclu le nombre 1 de l'ensemble des nombres premiers de façon naturelle, c'est-à-dire sans supposition ni convention.

Evidemment, le nombre 0 est à exclure également des valeurs que peut prendre M étant donné que cela amènerait aussi à effectuer une division par 0.



Notons que depuis le début de l'utilisation de ce système graphique, $\alpha_{n,x}$ vaut 1 seulement pour les multiples d'un nombre premier, puis d'un nombre premier élevé au carré, puis d'un nombre premier elevé au cube, ... etc. Voici donc une formule qui révèle la mécanique des puissances pour la factorisation d'un nombre entier en produit de nombres premiers.

- *Brève explication sur le problème rencontré pour l'hypothèse de $P_n = 4$:*

Pour $x = 1$, pour $P_n = 4$ et pour cette partie de la formule de α_n :

$$\frac{\displaystyle\prod_{h=1}^{h=({P_n}^x-1)} (N-h)}{P_n^{\left(\frac{{P_n}^x-1}{P_n-1}-x+1\right)}} = \frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{4}$$

Or, lorsqu'on remplace (volontairement) N par 0, le résultat est un nombre rationnel pour cette partie de la formule. D'ailleurs, pour tout x entier, le résultat sera de la forme :

$\dfrac{2^{a_1}.b_1}{4^{a_2}}$ avec a_1, a_2, a_3 et $b_1 \in \mathbb{N}$ et b_1 non multiple de 2.

Ce qui revient à écrire, pour $a_2 = 1 + a_3$:

$$\frac{2^{a_1}.b_1}{4^{a_2}} = \frac{2^{(a_1-a_3)}.b_1}{2}$$

Où dans le cas de $x = 1$, nous avons $a_1 = a_3 = 1$, d'où il résulte un nombre rationnel de la forme $\dfrac{b}{2}$ permettant $\alpha_p = 2$ (alors que pour $x \geq 2$, nous avons $a_1 > a_3$, d'où il résulte un nombre entier permettant $\alpha_p = 0$). Il nous fallait donc une fonction complémentaire à la fonction "$\sin^2$" qui, multipliées entre elles valaient 0, précisément dans les cas recherchés.

ATTENTION :

Voir la partie "**2 démonstration complète**" (page 52) pour des explications approfondies.

1.7 Formule D(N) de factorisation d'un Nombre Entier

Rappelons que nous avions noté :

$$N = \prod_{n=1}^{n \to +\infty} (P_n)^{\alpha_n}$$

Or, nous connaissons maintenant α_n, et $f(N)$ nous permet de contourner le problème de P_n inconnu, nous pouvons donc déduire une formule pour N :

$$N = D(N) = \prod_{n=1}^{n \to +\infty} (P_n)^{\left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} . \prod_{v=1}^{v=3} (P_n - v)\right)}{\sin^2(\pi/P_n)} . \sum_{x=1}^{x \to +\infty} \sin^2 \left(\frac{\pi . \prod_{h=1}^{h=({P_n}^x - 1)} (N-h)}{{P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x + 1\right)}} \right) \right]}$$

(Attention, il s'agit bien de crochets dans ces formules, et non des symboles des "valeurs absolues" , ni de ceux des "parties entières" : ils ont donc la même fonction que de simples parenthèses, ils contiennent α_n, c'est-à-dire la puissance de P_n).

Comme nous avions aussi noté (avec $M_i \in \mathbb{N}$, $M_i \geq 2$) :

$$N = \prod_{i=1}^{i \to +\infty} (M_i)^{a_i}$$

Or nous avons vu (rapidement) que la formule $D(N)$ pouvait s'appliquer pour tout entier $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ (voir "brève explication" précédemment, dans la partie "**1.6 Problème lorsque P_n est inconnu**" page 42, ou pour la démonstration dans la partie "**2 démonstration complète**" page 52).

Notons M_i cet entier M pour faire directement le lien avec cette dernière formule. Nous pouvons donc aussi déduire une autre formule équivalente mais "plus générale" pour N :

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M \to +\infty} M^{\left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}.\prod_{v=1}^{v=3}(M-v)\right)}{\sin^2(\pi/M)}.\sum_{x=1}^{x\to+\infty}\sin^2\left(\frac{\pi.\prod_{h=1}^{h=(M^x-1)}(N-h)}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}}\right)\right]}$$

Notons cette grande formule de Décompostion (ou factorisation) de N en produit de facteurs premiers $D(N)$, et appelons cette formule $D(N)$ la "Décomposée" de N :

$N = D(N)$

1.8 Simplifications possibles pour D(N)

- Restriction du nombre de termes du "grand produit" :

Pour éviter d'avoir à effectuer un calcul infini comme le suppose la formule de $D(N)$, remarquons que le nombre de termes "utiles" à la foctorisation d'un nombre entier en nombres premiers est toujours fini. D'ailleurs, le plus grand de tous ces termes ne peut être plus grand que N lui-même. Mais si N est un nombre premier, alors le plus grand terme est au maximum égal à N. Notons :

$Mi \leq N$ ou (comme nous en venons d'en convenir) $M \leq N$

Nous pouvons ainsi borner le produit comme ceci :

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M=N} M^{\left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}.\prod_{v=1}^{v=3}(M-v)\right)}{\sin^2(\pi/M)}.\sum_{x=1}^{x\to+\infty}\sin^2\left(\frac{\pi.\prod_{h=1}^{h=(M^x-1)}(N-h)}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}}\right)\right]}$$

Remarquons que cette formule devient plus restrictive pour N puisqu'elle n'admet pas $N < 2$. En effet, cette formule induit de traiter les nombres N pour lesquels $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Ceci reste cohérent dans le sens où nous pouvons considérer que pour le cas de $N = 1$, il ne peut pas y avoir explicitement de nombre premier qui compose ce nombre.

Une borne ayant été donnée pour le "grand produit" $\prod$ des termes associés à M, il nous reste à borner la "grande somme" $\sum$ des termes de "$\sin^2$", ce qui va être plus délicat. En effet, pour remplacer cet "infini", nous allons rechercher une formule de Restriction R_n pour x nous permettant de limiter les calculs aux calculs utiles, ou en tout cas, à moins de calculs inutiles.

- Recherche d'une formule de Restriction R_n pour la "grande somme":

Pour un nombre entier $N \geq 2$, nous souhaiterions restreindre la grande somme $\sum$ des termes de "sin^2" à la puissance maximale qui sera utile pour l'ensemble des nombres premiers concernés par le calcul. Rappelons que cette grande somme sert à "calculer" la puissance d'un nombre premier de la factorisation de N.

Etudions cette formule par le biais d'un tableau, par exemple pour $P_1 = 2$:

N	$\alpha_1(réel)$	$\alpha'_1(recherché)$
1	0	0
2	1	1
3	0	1
4	2	2
5	0	2
6	1	2
7	0	2
8	3	3
9	0	3
10	1	3
11	0	3
12	2	3
13	0	3
14	1	3
15	0	3
16	4	4
17	0	4

Pour les valeurs de N en rouge :

$N = (P_1)^j$ (avec $j \in \mathbb{N}$)

Donc $j = \dfrac{\ln N}{\ln P_1}$

Nous aimerions borner j à α'_1.

Dans tous les cas de P_n, nous souhaitons avoir :

$R_n = 0$ pour $(P_n)^0$

$\mathrm{R}_n = 1$ pour $(P_n)^1$

$\mathrm{R}_n = 2$ pour $(P_n)^2$

$\mathrm{R}_n = 3$ pour $(P_n)^3$

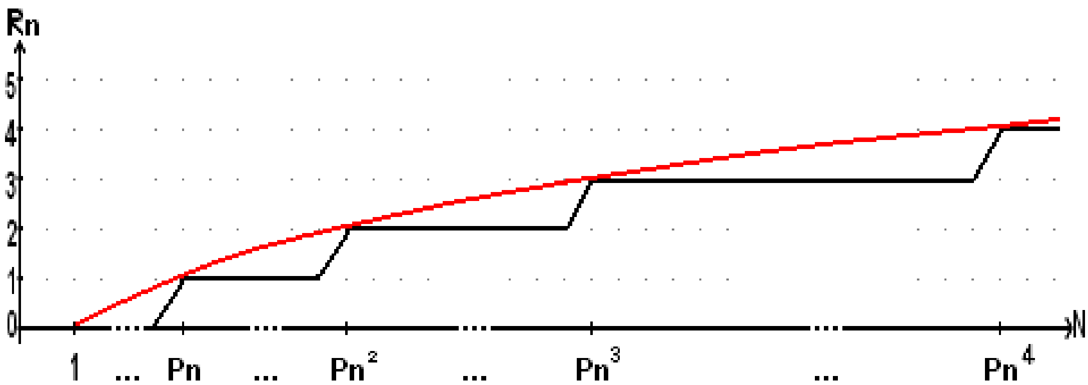
...

$\mathrm{R}_n = j$ pour $(P_n)^j$

Pour $N = (P_n)^j$

$$j = \frac{\ln N}{\ln P_n}$$

Représentation graphique de la formule R_n recherchée :



▷ La courbe noire est celle de $R_n = j$, la formule de restriction recherchée.

▷ La courbe rouge est celle de $j = \dfrac{\ln N}{\ln P_n}$

Cependant il est possible de donner un encadrement :

Pour $N \in [(P_n)^j ; (P_n)^{(j+1)} - 1]$

$\Rightarrow R_n = j$

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M=N} M^{\left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}.\prod_{v=1}^{v=3}(M-v)\right)}{\sin^2(\pi/M)} . \sum_{x=1}^{x=R_n} \sin^2\left(\frac{\pi . \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}} \right) \right]}$$

Mais cette borne n'étant pas pleinement satisfaisante (car elle sous-entend de connaître déjà les nombres premiers), il serait de loin préfèrerable de construire de manière exacte la fonction R_n recherchée (en noire sur le graphique). Pour cela, nous devrons faire appel à d'autres fonctions dont l'étude est faite en partie "**3 Formules Courtes**" page 147 (notamment une fonction d'Impulsion Première $\mathfrak{I}$, définie en page 154) , afin de donner la fonction R_n dans la sous-partie "**3.6 Formule de restriction** $RM(N)$" (page 166). Nous ne reviendrons donc pas sur cette étude, nous nous contenterons maintenant de donner cette fonction pour finaliser la formule. Comme il est nécessaire de comprendre les démonstrations qui suivront cette partie pour comprendre cette fonction de restriction, il serait plus judicieux de poursuivre et de ne pas tenir rigueur (pour l'instant) du manque d'explications.

En notant la grande formule $D(N)$ ainsi :

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M=N} M^{\alpha_M}$$

Notons $RM(N)$ la fonction de restriction en fonction du nombre M (toujours dans l'hypothèse où le "$n^{ième}$" nombre premier n'est pas connu, et où l'on remplace P_n dans la formule an par M, ce qui nous donne la formule α_M).

Avec $\mathfrak{I}$ la fonction d'Impulsion Première définie d'après l'étude consacrée à $RM(N)$, nous avons :

$$RM(N) = \sum_{b=1}^{b=a} \left\{ 1 - \mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=M^b-1} (N-k) \right] \right\}$$

Où les calculs ne sont plus nécessaires (pour des valeurs de a croissantes) dès que :

$$1 - \mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=M^b-1} (N-k) \right] = 0$$

Ce qui sous-entend finalement que les calculs ne sont plus nécessaires dès que N est une des valeurs entières de l'intervalle $[0; M^a - 1]$

Plus précisément, si nous avons :

$$1 - \mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=M^{a+1}-1} (N-k) \right] = 0$$

Et

$$1 - \mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=M^a-1} (N-k) \right] = 1$$

Alors, la borne supérieur de x dans la formule de α_M vaut $x = a$.

Grâce à la fonction $RM(N)$, nous pouvons limiter les calculs inutiles, sans pour autant les éviter complètement.

2

Démonstration complète

Dorénavant, certaines lettres qui vont être utlisées seront les mêmes que précédemment, mais elles n'auront pas de lien entre elles (exemple pour les variables comme a, comme b, comme c, comme d ou comme k ...). Nous préciserons ce changement par une redéfinition des variables concernées.

2.1 Vue d'ensemble des étapes à suivre

Cette grande formule $D(N)$ de factorisation d'un entier en produit de nombres premiers peut être vue comme un ensemble regroupant plusieurs "fonctions" ayant chacune une "tâche" précise à effectuer. C'est justement ce que nous allons expliquer.

Tout d'abord, si nous reprenons la formule de α_n et que nous la réécrivons sous cette forme :

$$\alpha_n = A.Cc. \sum_{x=1}^{x=R_n} \sin^2\left(\frac{\pi.F_p}{{P_n}^{F_c}}\right)$$

- Avec $F_p = \prod_{h=1}^{h=({P_n}^x-1)} (N-h)$

  F_p est la fonction qui permet à l'ensemble "$\sin^2$" de s'annuler de manière cyclique. F_p permet d'annuler cet ensemble lorsque le nombre de fois où elle est divisible par P_n est supérieur ou égale à F_c.

- Avec $F_c = \dfrac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x + 1$

  F_c est la fonction qui permet de "calculer" la divisibilité de P_n sur $[0; {P_n}^x]$ (les facteurs de P_n dans les multiples de P_n que l'on retrouve dans le calcul de F_p).

▷ Ainsi, le calcul de $\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{{P_n}^{F_c}}\right)$ permet d'obtenir soit 0 (notamment lorsque N n'est pas divisible par P_n), soit un nombre de la forme $\sin^2(\pi.\varepsilon/P_n)$ (avec $\varepsilon \in \mathbb{N}$ et non divisible par P_n).

- Avec $Cc = \dfrac{1}{\sin^2(\pi/P_n)}$

  Cc est la fonction Coefficient Correcteur qui va permettre à α_n de valoir un nombre entier. En effet, $\sin^2(\pi.\varepsilon/P_n)$ (comme précédemment avec $\varepsilon \in \mathbb{N}$ et non divisible par P_n) a la même valeur que $\sin^2(\pi/P_n)$.

▷ Ainsi, le calcul de $\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{{P_n}^{F_c}}\right)$ permet d'obtenir soit 0 (lorsque N n'est pas divisible par P_n), soit 1 (lorsque N est divisible par P_n). Ajoutons que si nous remplacions P_n par un autre nombre entier qui n'est pas un nombre premier, le calcul permet aussi d'obtenir 0 (sauf pour $P_n = 4$ à ce stade du développement).

- Avec $A = \cos^2[(P_n - 1)(P_n - 2)(P_n - 3).\pi/4]$

  A est la fonction qui permet d'éliminer le défaut lorsque P_n est inconnu et qu'on le suppose égale à 4 (défaut pour $x = 1$ uniquement).

- Avec $R_n = j$ Pour $N \in [(P_n)^j; (P_n)^{j+1} - 1]$

  R_n est la fonction de Restriction permettant de limiter les calculs aux nombres premiers $P_n \leq N$.

▷ Ainsi, si N est divisible par P_n, la formule α_n donne le nombre de divisibilité(s) par P_n sous la forme d'une puissance de P_n.

2.2 Démonstration complète

Pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, N se décompose en produit de nombres premiers $P_n \in \mathbb{P}$ tel que :

$$N = \prod_{n=1}^{n \to +\infty} (P_n)^{\alpha_n}$$

N ainsi défini contient nécessairement au moins un terme étant un nombre premier premier P_n. Supposons que P_n ne soit pas connu. Nous désirons savoir quelle est la “progression” de la puissance de α_n pour N.

Evidemment, nous savons déjà que $\alpha_n = 0$ pour N non multiple de P_n. α_n prend une valeur entière si et seulement si N est multiple de P_n, c'est-à-dire si :

$N = t.P_n$ (avec $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$ car 1 n'est pas un nombre premier, par convention).

Par exemple, si $t = P_n$ alors $N = (P_n)^2$ et donc $\alpha_n = 2$.

Tableau de référence $T.R.2$:

(voir page suivante)

N	α_n
1	0
2	0
3	0
...	...
$P_n - 1$	0
P_n	1
$P_n + 1$	0
...	...
$2.P_n - 1$	0
$2.P_n$	1
$2.P_n + 1$	0
...	...
${P_n}^2 - 1$	0
${P_n}^2$	2
${P_n}^2 + 1$	0
...	...
${P_n}^2 + 2.P_n - 1$	0
${P_n}^2 + 2.P_n = P_n.(P_n + 2)$	1
${P_n}^2 + 2.P_n + 1$	0
...	...
$2.{P_n}^2 - 1$	0
$2.{P_n}^2$	2
$2.{P_n}^2 + 1$	0
...	...
$2.{P_n}^2 + P_n - 1$	0
$2.{P_n}^2 + P_n = P_n(2P_n + 1)$	1
$2.{P_n}^2 + P_n - 1$	0
...	...
${P_n}^3 - 1$	0
${P_n}^3$	3
${P_n}^3 + 1$	0
...	...
$2.{P_n}^{\alpha_n} - P_n - 1$	0
$2.{P_n}^{\alpha_n} - P_n = P_n({P_n}^{(\alpha_n - 1)} - 1)$	1
$2.{P_n}^{\alpha_n} - P_n + 1$	0
...	...
$2.{P_n}^{\alpha_n} - 1$	0
$2.{P_n}^{\alpha_n}$	α_n
$2.{P_n}^{\alpha_n} + 1$	0
...	...
$2.{P_n}^{\alpha_n} + P_n - 1$	0
$2.{P_n}^{\alpha_n} + P_n$	1
$2.{P_n}^{\alpha_n} + P_n + 1$	0
...	...

$T.R.2$

L'objectif est de trouver une formule qui permette d'obtenir α_n en fonction de N.

Sachant que $P_n \in \mathbb{P}$ et que 1 n'est pas un nombre premier (par convention), nous avons :

$$P_n > (P_n - 1) \geq 1.$$

Aucun des nombres sur l'intervalle $[1; P_n - 1]$ n'est divisible par P_n.

2.2.1 Remarques préalables sur le tableau de référence T.R.2

▷ ***Règle n°1 :***

Nous pouvons relever ceci :

- Sur l'intervalle $]0; P_n[$:

  Il n'existe aucun multiple de P_n.

- Sur l'intervalle $]0; {P_n}^2[$:

  Il existe $(P_n - 1)$ multiple(s) de P_n.

  En effet, le dernier multiple de P_n de cet intervalle vaut $(P_n - 1).P_n$.

  De plus chaque multiple de P_n est réparti régulièrement : l'écart entre 2 multiples de P_n consécutifs vaut P_n.

- Sur l'intervalle $]0; {P_n}^3[$:

  Il existe $({P_n}^2 - 1)$ multiples de P_n,

  dont $(P_n - 1)$ sont multiples de ${P_n}^2$.

  En effet, le dernier multiple de P_n de cet intervalle vaut $({P_n}^2 - 1).P_n$

  et le dernier multiple de P_n de cet intervalle vaut $(P_n - 1).{P_n}^2$.

  De plus chaque multiple de P_n est réparti régulièrement : l'écart entre 2 multiples de P_n consécutifs vaut P_n. De même, pour chaque multiple de ${P_n}^2$, leur répartition est régulière : l'écart entre 2 multiples de ${P_n}^2$ consécutifs vaut ${P_n}^2$ (le raisonnement étant le même pour la suite, il est inutle de le réécrire à chaque fois).

- Sur l'intervalle $]0; {P_n}^4[$:

  Il existe $({P_n}^3 - 1)$ multiples de P_n,

  dont $({P_n}^2 - 1)$ sont multiples de ${P_n}^2$,

  et dont $(P_n - 1)$ sont multiples de ${P_n}^3$.

- Sur l'intervalle $]0; {P_n}^5[$:
  Il existe $({P_n}^4 - 1)$ multiples de P_n,
  dont $({P_n}^3 - 1)$ sont multiples de ${P_n}^2$,
  dont $({P_n}^2 - 1)$ sont multiples de ${P_n}^3$,
  et dont $(P_n - 1)$ sont multiples de ${P_n}^4$.

  ...

- Sur l'intervalle $]0; {P_n}^{\alpha_n}[$:
  Il existe $({P_n}^{(\alpha_n - 1)} - 1)$ multiples de P_n,
  dont $({P_n}^{(\alpha_n - 2)} - 1)$ sont multiples de ${P_n}^2$,
  dont $({P_n}^{(\alpha_n - 3)} - 1)$ sont multiples de ${P_n}^3$,

  ...

  dont $({P_n}^3 - 1)$ sont multiples de ${P_n}^{(\alpha_n - 3)}$,
  dont $({P_n}^2 - 1)$ sont multiples de ${P_n}^{(\alpha_n - 2)}$,
  et dont $(P_n - 1)$ sont multiples de ${P_n}^{(\alpha_n - 1)}$.

- De manière générale, pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \leq (\alpha_n - 1)$:

  Sur l'intervalle $]0; {P_n}^{\alpha_n}[$, qui peut encore s'écrire $[1; {P_n}^{\alpha_n} - 1]$:

  Il existe $({P_n}^{(\alpha_n - k - 1)} - 1)$ multiples de ${P_n}^{(k+1)}$,

  dont la répartition de chaque multiples de ${P_n}^{(k+1)}$ est régulière puisque l'écart entre 2 de ces multiples vaut ${P_n}^{(k+1)}$.

▷ ***Règle n°2 :***

par construction nous obtenons ce qui suit :

Soit $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$, nous avons $(t-1).P_n$ est multiple de P_n.

Il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$](t-1).P_n; t.P_n[$

Il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$](t-1).{P_n}^2; t.{P_n}^2[$

Il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$](t-1).{P_n}^3; t.{P_n}^3[$

Il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$](t-1).{P_n}^4; t.{P_n}^4[$

...

De manière générale, il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$](t-1).{P_n}^{\alpha_n}; t.{P_n}^{\alpha_n}[$ qui peut encore s'écrire $[(t-1).{P_n}^{\alpha_n}+1; t.P_n^{\alpha_n}-1]$

Ces multiples sont répartis de manière “symétrique” dans le sens où l'écart entre 2 multiples consécutifs vaut P_n. Ceci donne à α_n des symétries qui sont localisables sur ces intervalles. En effet, sur cet intervalle, le nombre de multiples de P_n se déduit ainsi :

(la longueur de l'intervalle est équivalente à la différence de ses 2 bornes)

$$\begin{aligned}(t.{P_n}^{\alpha_n} - 1) - [(t-1).{P_n}^{\alpha_n} + 1] &= {P_n}^{\alpha_n} - 2 \\ &= {P_n}^{\alpha_n} - P_n + P_n - 2 \\ &= P_n.({P_n}^{(\alpha_n - 1)} - 1) + (P_n - 2)\end{aligned}$$

Le plus petit nombre premier étant $P_n = 2$, les relations précédentes et suivantes sont donc valables pour tout P_n.

(factorisation également valable pour toutes les puissances de P_n intermédiaires possibles jusqu'à ceci)

$$= {P_n}^{\alpha_n - 1}.(P_n - 1) + ({P_n}^{\alpha_n - 1} - 2)$$

$(P_n - 2)$ n'étant pas multiple de P_n, nous avons toujours sur cet intervalle $({P_n}^{(\alpha_n-1)} - 1)$ multiples de P_n.

(même raisonnement pour toutes les puissance de P_n intermédiaires)

$({P_n}^{(\alpha_n-1)} - 2)$ n'étant pas multiple de ${P_n}^{(\alpha_n-1)}$, nous avons toujours sur cet intervalle $(P_n - 1)$ multiples de ${P_n}^{(\alpha_n-1)}$.

La longueur de cet intervalle étant constante pour α_n constant, elle contient un nombre de multiples de P_n et de ${P_n}^{(\alpha_n-1)}$ constant qui est le même pour tout t ***(idem pour toutes les puissance de P_n intermédiaires)***.

Or, pour $t = 1$, le nombre de multiples de P_n a été défini précédemment :

Il existe $({P_n}^{(\alpha_n-k-1)} - 1)$ multiples de ${P_n}^{(k+1)}$ sur $[1; {P_n}^{\alpha_n} - 1]$.

Des symétries sont donc à constater sur an lorsque $\alpha_n \geq 1$:

Sur l'intervalle $[1; {P_n}^{\alpha_n} - 1]$, il existe une symétrie en $\frac{{P_n}^{\alpha_n}}{2}$, c'est-à-dire qu'il existe des symétries entre les intervalles :

$$\left[1; \frac{{P_n}^{\alpha_n}}{2}\right] \text{ et } \left[\frac{{P_n}^{\alpha_n}}{2}; {P_n}^{\alpha_n} - 1\right]$$

▷ ***Règle n°3 :***

D'après les valeurs que peut prendre N sur l'inervalle suivant $]0; {P_n}^{\alpha_n}]$, les nombres N pouvant être multiples de P_n apparaissent régulièrement dans le tableau de référence $T.R.2$. Or,

$${P_n}^{\alpha_n} = P_n.{P_n}^{(\alpha_n - 1)}$$

Et donc, sur l'intervalle $]0; {P_n}^{\alpha_n}]$, la quantité de nombres N pouvant être multiples de P_n vaut ${P_n}^{(\alpha_n - 1)}$

L'intervalle $]0; {P_n}^{\alpha_n}]$ peut aussi s'écrire $[1; {P_n}^{\alpha_n}]$. L'écart (c'est-à-dire la différence) entre les 2 bornes vaut $({P_n}^{\alpha_n} - 1)$.

Si nous faisons varier les bornes de cet intervalle ainsi (de manière à ce que cet écart soit constant) :

$$[1 + r; {P_n}^{\alpha_n} + r] \qquad (\text{pour } r \in \mathbb{N})$$

Comme l'écart entre ces 2 bornes est exactement le même, la quantité de nombres N pouvant être multiples de P_n vaut toujours ${P_n}^{(\alpha_n - 1)}$.

2.2.2 Début de l'étude

Soit k un nombre entier et soit ε un nombre entier non divisible par P_n. Menons l'étude d'après Le tableau de référence $T.R.2$ (précédent).

Nous "numéroterons" k et ε par des nombres et des lettres (en indice) correspondant à chaque cas étudié afin de les différencier. Abordons ces différents cas en différents points, qui seront une étape vers la démonstration complète.

Dans les formules, les 3 points de suspensions "..." ***entre 2 termes de la même ligne*** représentent les nombres entiers consécutifs entre ces 2 termes.

- **Pour $(P_n-1)!$ nous avons :**

$$\begin{aligned}(P_n-1)! &= (P_n-1).(P_n-2).(P_n-3)...3.2.1\\ &= k_1 = \varepsilon_{n,1}\\ &= \prod_{h=1}^{h=(P_n-1)}(P_n-h)\end{aligned}$$

Par construction, $(P_n-1)!$ est un nombre entier non divisible par P_n.

- **Pour $({P_n}^2-1)!$ nous avons :**

$$\begin{aligned}({P_n}^2-1)! &= P_n.2P_n.3P_n...(P_n-1)P_n.k_2\\ &= (P_n.P_n.P_n...P_n).[(1).(2).(3)...(P_n-1)].k_2\end{aligned}$$

Ici, le nombre de multiples de P_n uniquement est (P_n-1), k_2 étant le produit de tous les autres nombres (k_2 est donc un nombre entier), il est non divisible par P_n (il n'y a aucun multiple de P_n dans k_2).

$$({P_n}^2-1)! = {P_n}^{(P_n-1)}.\varepsilon_{n,2}$$

avec $\varepsilon_{n,2} = 1.2.3...(P_n-1).k_2 = (P_n-1)!.k_2$

k_2 est donc le produit de tous les nombres non divisibles par P_n, $\varepsilon_{n,2}$ n'est donc pas divisible par P_n.

Et sous une autre forme (en étalant le produit sur plusieurs lignes) :

$$\begin{aligned}
(P_n{}^2-1)! \quad = \quad & (1).(2)...(P_n-1).(1P_n) \\
& .(P_n+1)...(2P_n-1).(2P_n) \\
& .(2P_n+1)...(3P_n-1).(3P_n) \\
& . \quad ... \\
& .(P_n{}^2-3P_n+1)...(P_n{}^2-2P_n-1).[(P_n-2).(P_n)] \\
& .(P_n{}^2-2P_n+1)...(P_n{}^2-P_n-1).[(P_n-1).(P_n)] \\
& .(P_n{}^2-P_n+1)...(P_n{}^2-1)
\end{aligned}$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned}
(P_n{}^2-1)! \quad = \quad & (1).(2)...(P_n-1) \\
& .(P_n+1)...(2P_n-1) \\
& .(2P_n+1)...(3P_n-1) \\
& . \quad ... \\
& .(P_n{}^2-3P_n+1)...(P_n{}^2-2P_n-1) \\
& .(P_n{}^2-2P_n+1)...(P_n{}^2-P_n-1) \\
& .(P_n{}^2-P_n+1)...(P_n{}^2-1) \\
& .(1P_n).(2P_n).(3P_n)....[(P_n-2).(P_n)].[(P_n-1).(P_n)]
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
(P_n{}^2-1)! \quad = \quad & (P_n-1)! \\
& .(P_n+1)...(2P_n-1) \\
& .(2P_n+1)...(3P_n-1) \\
& . \quad ... \\
& .(P_n{}^2-3P_n+1)...(P_n{}^2-2P_n-1) \\
& .(P_n{}^2-2P_n+1)...(P_n{}^2-P_n-1) \\
& .(P_n{}^2-P_n+1)...(P_n{}^2-1) \\
& .(P_n-1)!.(P_n)^{(P_n-1)}
\end{aligned}$$

Pour retrouver $\varepsilon_{n,2}$, il suffit d'éliminer dans chaque nombre (c'est-à-dire entre 2 parenthèses) tous les facteurs de P_n s'il y en a (c'est-à-dire le dernier terme de la dernière ligne dans notre cas puisqu'il regroupe tous les facteurs de P_n) :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{n,2} \quad = \quad & (P_n - 1)! \\
& .(P_n + 1)...(2P_n - 1) \\
& .(2P_n + 1)...(3P_n - 1) \\
& . \quad ... \\
& .({P_n}^2 - 3P_n + 1)...({P_n}^2 - 2P_n - 1) \\
& .({P_n}^2 - 2P_n + 1)...({P_n}^2 - P_n - 1) \\
& .({P_n}^2 - P_n + 1)...({P_n}^2 - 1) \\
& .(P_n - 1)!
\end{aligned}$$

- **<u>Pour $({P_n}^3 - 1)!$ nous avons :</u>**

$$({P_n}^3 - 1)! = P_n.2P_n.3P_n...({P_n}^2 - 1)P_n.k_3$$

Ici, le nombre de termes sous la forme $a.P_n$ multiples de P_n est $({P_n}^2 - 1)$. k_3 est le produit de tous les autres nombres, non divisible par P_n. Et le nombre de multiples de ${P_n}^2$ est $(P_n - 1)$, car le produit factoriel se décompose aussi ainsi :

$$({P_n}^3 - 1)! = {P_n}^2.2{P_n}^2.3{P_n}^2...(P_n - 1){P_n}^2.k'_3$$

k'_3 est le produit de tous les autres nombres. Ainsi, ce produit factoriel est divisible par ${P_n}^{({P_n}^2 - 1)}$ et par ${P_n}^{(P_n - 1)}$.

$$({P_n}^3 - 1)! = {P_n}^{({P_n}^2 - 1)}.{P_n}^{(P_n - 1)}.\varepsilon_{n,3} = {P_n}^{({P_n}^2 + P_n - 2)}.\varepsilon_{n,3}$$

Et donc $\varepsilon_{n,3}$ n'est pas divisible par P_n.

Et sous une autre forme (en étalant le produit sur plusieurs lignes et sur plusieurs pages) :

$$
\begin{aligned}
({P_n}^3 - 1)! \quad = \quad & (1).(2)...(P_n - 1).(1P_n) \\
& .(P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n) \\
& .(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n) \\
& . \quad ... \\
& .({P_n}^2 - 3P_n + 1)...({P_n}^2 - 2P_n - 1).[(P_n - 2).(P_n)] \\
& .({P_n}^2 - 2P_n + 1)...({P_n}^2 - P_n - 1).[(P_n - 1)(P_n - 2).(P_n)(1)] \\
& .({P_n}^2 - P_n + 1)...({P_n}^2 - 1).[({P_n}^2).(1)] \\
& .({P_n}^2 + 1)...({P_n}^2 + P_n - 1).[(P_n + 1).(P_n)] \\
& .({P_n}^2 + P_n + 1)...({P_n}^2 + 2P_n - 1).[(P_n + 2).(P_n)] \\
& .({P_n}^2 + 2P_n + 1)...({P_n}^2 + 3P_n - 1).[(P_n + 3).(P_n)] \\
& . \quad ... \\
& .(2{P_n}^2 - 3P_n + 1)...(2{P_n}^2 - 2P_n - 1).[(P_n - 1).(P_n).(2)] \\
& .(2{P_n}^2 - 2P_n + 1)...(2{P_n}^2 - P_n - 1).[(2P_n - 1).(P_n)] \\
& .(2{P_n}^2 - P_n + 1)...(2{P_n}^2 - 1).[({P_n}^2).(2)] \\
& .(2{P_n}^2 + 1)...(2{P_n}^2 + P_n - 1).[(2P_n + 1).(P_n)] \\
& .(2{P_n}^2 + P_n + 1)...(2{P_n}^2 + 2P_n - 1).[(P_n + 1).(P_n).(2)] \\
& .(2{P_n}^2 + 2P_n + 1)...(2{P_n}^2 + 3P_n - 1).[(2P_n + 3).(P_n)] \\
& . \quad ... \\
& .(3{P_n}^2 - 3P_n + 1)...(3{P_n}^2 - 2P_n - 1).[(3P_n - 2).(P_n)] \\
& .(3{P_n}^2 - 2P_n + 1)...(3{P_n}^2 - P_n - 1).[(3P_n - 1).(P_n)] \\
& .(3{P_n}^2 - P_n + 1)...(3{P_n}^2 - 1).[({P_n}^2).(3)] \\
& .(3{P_n}^2 + 1)...(3{P_n}^2 + P_n - 1).[(3P_n + 1).(P_n)] \\
& .(3{P_n}^2 + P_n + 1)...(3{P_n}^2 + 2P_n - 1).[(3P_n + 2).(P_n)] \\
& .(3{P_n}^2 + 2P_n + 1)...(3{P_n}^2 + 3P_n - 1).[(P_n + 1).(P_n).(3)] \\
& . \quad ... \\
& .({P_n}^3 - 3{P_n}^2 - 3P_n + 1)...({P_n}^2 - 3{P_n}^2 - 2P_n - 1).[({P_n}^2 - 3P_n - 2).(P_n)] \\
& .({P_n}^3 - 3{P_n}^2 - 2P_n + 1)...({P_n}^3 - 3{P_n}^2 - P_n - 1).[({P_n}^2 - 3P_n - 1).(P_n)] \\
& .({P_n}^3 - 3{P_n}^2 - P_n + 1)...({P_n}^3 - 3{P_n}^2 - 1).[({P_n}^2).(P_n - 3)] \\
& .({P_n}^3 - 3{P_n}^2 + 1)...({P_n}^3 - 3{P_n}^2 + P_n - 1).[({P_n}^2 - 3P_n + 1).(P_n)] \\
& . \quad ...
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&. \quad ...\\
&.(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - 3P_n + 1)...(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - 2P_n - 1).[(P_n{}^2 - 2P_n - 2).(P_n)]\\
&.(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - 2P_n + 1)...(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - P_n - 1).[(P_n{}^2 - 2P_n - 1).(P_n)]\\
&.(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - P_n + 1)...(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - 1).[(P_n{}^2).(P_n - 2)]\\
&.(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 + 1)...(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 + P_n - 1).[(P_n{}^2 - 2P_n + 1).(P_n)]\\
&. \quad ...\\
&.(P_n{}^3 - P_n{}^2 - 3P_n + 1)...(P_n{}^3 - P_n{}^2 - 2P_n - 1).[(P_n{}^2 - P_n - 2).(P_n)]\\
&.(P_n{}^3 - P_n{}^2 - 2P_n + 1)...(P_n{}^3 - P_n{}^2 - P_n - 1).[(P_n{}^2 - P_n - 1).(P_n)]\\
&.(P_n{}^3 - P_n{}^2 - P_n + 1)...(P_n{}^3 - P_n{}^2 - 1).[(P_n{}^2).(P_n - 1)]\\
&.(P_n{}^3 - P_n{}^2 + 1)...(P_n{}^3 - P_n{}^2 + P_n - 1).[(P_n{}^2 - P_n + 1).(P_n)]\\
&. \quad ...\\
&.(P_n{}^3 - 3P_n + 1)...(P_n{}^3 - 2P_n - 1).[(P_n{}^2 - 2).(P_n)]\\
&.(P_n{}^3 - 2P_n + 1)...(P_n{}^3 - P_n - 1).[(P_n{}^2 - 1).(P_n)]\\
&.(P_n{}^3 - P_n + 1)...(P_n{}^3 - 1)
\end{aligned}
$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$
\begin{aligned}
(P_n - 1)! \quad = \quad & (P_n - 1)!\\
&.(P_n + 1)...(2P_n - 1)\\
&.(2P_n + 1)...(3P_n - 1)\\
&. \quad ...\\
&.(P_n{}^2 - 3P_n + 1)...(P_n{}^2 - 2P_n - 1)\\
&.(P_n{}^2 - 2P_n + 1)...(P_n{}^2 - P_n - 1)\\
&.(P_n{}^2 - P_n + 1)...(P_n{}^2 - 1)\\
&.(P_n{}^2 + 1)...(P_n{}^2 + P_n - 1)\\
&.(P_n{}^2 + P_n + 1)...(P_n{}^2 + 2P_n - 1)\\
&.(P_n{}^2 + 2P_n + 1)...(P_n{}^2 + 3P_n - 1)\\
&. \quad ...
\end{aligned}
$$

. ...
$.(2{P_n}^2-3P_n+1)...(2P{P_n}^2-2P_n-1)$
$.(2{P_n}^2-2P_n+1)...(2{P_n}^2-P_n-1)$
$.(2{P_n}^2-P_n+1)...(2{P_n}^2-1)$
$.(2{P_n}^2+1)...(2{P_n}^2+P_n-1)$
$.(2{P_n}^2+P_n+1)...(2{P_n}^2+2P_n-1)$
$.(2{P_n}^2+2P_n+1)...(2{P_n}^2+3P_n-1)$
. ...
$.(3{P_n}^2-3P_n+1)...(3{P_n}^2-2P_n-1)$
$.(3{P_n}^2-2P_n+1)...(3{P_n}^2-P_n-1)$
$.(3{P_n}^2-P_n+1)...(3{P_n}^2-1)$
$.(3{P_n}^2+1)...(3{P_n}^2+P_n-1)$
$.(3{P_n}^2+P_n+1)...(3{P_n}^2+2P_n-1)$
$.(3{P_n}^2+2P_n+1)...(3{P_n}^2+3P_n-1)$
. ...
$.({P_n}^3-3{P_n}^2-3P_n+1)...({P_n}^3-3{P_n}^2-2P_n-1)$
$.({P_n}^3-3{P_n}^2-2P_n+1)...({P_n}^3-3{P_n}^2-P_n-1)$
$.({P_n}^3-3{P_n}^2-P_n+1)...({P_n}^3-3{P_n}^2-1)$
$.({P_n}^3-3{P_n}^2+1)...({P_n}^3-3{P_n}^2+P_n-1)$
. ...
$.({P_n}^3-2{P_n}^2-3P_n+1)...({P_n}^3-2{P_n}^2-2P_n-1)$
$.({P_n}^3-2{P_n}^2-2P_n+1)...({P_n}^3-2{P_n}^2-P_n-1)$
$.({P_n}^3-2{P_n}^2-P_n+1)...({P_n}^3-2{P_n}^2-1)$
$.({P_n}^3-2{P_n}^2+1)...({P_n}^3-2{P_n}^2+P_n-1)$
. ...
$.({P_n}^3-{P_n}^2-3P_n+1)...({P_n}^3-{P_n}^2-2P_n-1)$
$.({P_n}^3-{P_n}^2-2P_n+1)...({P_n}^3-{P_n}^2-P_n-1)$
$.({P_n}^3-{P_n}^2-P_n+1)...({P_n}^3-{P_n}^2-1)$
$.({P_n}^3-{P_n}^2+1)...({P_n}^3-{P_n}^2+P_n-1)$
. ...
$.({P_n}^3-3P_n+1)...({P_n}^3-2P_n-1)$
$.({P_n}^3-2P_n+1)...({P_n}^3-P_n-1)$
$.({P_n}^3-P_n+1)...({P_n}^3-1)$
. ...

(toujours dans le même produit, voici maintenant tous les termes multiples de P_n :)

$$
\begin{aligned}
&.(1P_n).(2P_n).(3P_n)...[(P_n-2).(P_n)].[(P_n-1).(P_n)]\\
&.({P_n}^2).[(P_n+1).P_n].[(P_n+2).P_n]...[(P_n-1).P_n.2].[(2P_n-1).P_n]\\
&.2({P_n}^2).[(2P_n+1).P_n]...[(3P_n-2).P_n].[(3P_n-1).P_n]\\
&.3({P_n}^2).[(3P_n+1).P_n]...[(P_n-3P_n-2).P_n].[(P_n-3P_n-1).P_n]\\
&.[{P_n}^2.(P_n-3)].[({P_n}^2-3P_n+1).P_n]...[({P_n}^2-2P_n-1).P_n]\\
&.[{P_n}^2.(P_n-2)].[({P_n}^2-2P_n+1).P_n]...[({P_n}^2-P_n-1).P_n]\\
&.[{P_n}^2.(P_n-1)].[({P_n}^2-P_n+1).P_n]...[({P_n}^2-2).P_n].[(P_n-1).P_n]
\end{aligned}
$$

Pour retrouver $\varepsilon_{n,3}$, il suffit d'éliminer dans chaque nombre tous les facteurs de P_n s'il y en a, cela nous donne, en réorganisant de manière “avantageuse” les termes non multiples de P_n restants :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{n,3} \quad = \quad &(P_n-1)!\\
&.(P_n+1)...(2P_n-1)\\
&.(2P_n+1)...(3P_n-1)\\
&.\quad ...\\
&.({P_n}^2-3P_n+1)...({P_n}^2-2P_n-1)\\
&.({P_n}^2-2P_n+1)...({P_n}^2-P_n-1)\\
&.({P_n}^2-P_n+1)...({P_n}^2-1)\\
&.({P_n}^2+1)...({P_n}^2+P_n-1)\\
&.({P_n}^2+P_n+1)...({P_n}^2+2P_n-1)\\
&.({P_n}^2+2P_n+1)...({P_n}^2+3P_n-1)\\
&.\quad ...
\end{aligned}
$$

$. \quad ...$
$.(2{P_n}^2-3P_n+1)...(2{P_n}^2-2P_n-1)$
$.(2{P_n}^2-2P_n+1)...(2{P_n}^2-P_n-1)$
$.(2{P_n}^2-P_n+1)...(2{P_n}^2-1)$
$.(2{P_n}^2+1)...(2{P_n}^2+P_n-1)$
$.(2{P_n}^2+P_n+1)...(2{P_n}^2+2P_n-1)$
$.(2{P_n}^2+2P_n+1)...(2{P_n}^2+3P_n-1)$
$. \quad ...$
$.(3{P_n}^2-3P_n+1)...(3{P_n}^2-2P_n-1)$
$.(3{P_n}^2-2P_n+1)...(3{P_n}^2-P_n-1)$
$.(3{P_n}^2-P_n+1)...(3{P_n}^2-1)$
$.(3{P_n}^2+1)...(3{P_n}^2+P_n-1)$
$.(3{P_n}^2+P_n+1)...(3{P_n}^2+2P_n-1)$
$.(3{P_n}^2+2P_n+1)...(3{P_n}^2+3P_n-1)$
$. \quad ...$
$.({P_n}^3-3{P_n}^2-3P_n+1)...({P_n}^3-3{P_n}^2-2P_n-1)$
$.({P_n}^3-3{P_n}^2-2P_n+1)...({P_n}^3-3{P_n}^2-P_n-1)$
$.({P_n}^3-3{P_n}^2-P_{n+}1)...({P_n}^3-3{P_n}^2-1)$
$.({P_n}^3-3{P_n}^2+1)...({P_n}^3-3{P_n}^2+P_n-1)$
$. \quad ...$
$.({P_n}^3-2{P_n}^2-3P_n+1)...({P_n}^3-2{P_n}^2-2P_n-1)$
$.({P_n}^3-2{P_n}^2-2P_n+1)...({P_n}^3-2{P_n}^2-P_n-1)$
$.({P_n}^3-2{P_n}^2-P_n+1)...({P_n}^3-2{P_n}^2-1)$
$.({P_n}^3-2{P_n}^2+1)...({P_n}^3-2{P_n}^2+P_n-1)$
$. \quad ...$
$.({P_n}^3-{P_n}^2-3P_n+1)...({P_n}^3-{P_n}^2-2P_n-1)$
$.({P_n}^3-{P_n}^2-2P_n+1)...({P_n}^3-{P_n}^2-P_n-1)$
$.({P_n}^3-{P_n}^2-P_n+1)...({P_n}^3-{P_n}^2-1)$
$.({P_n}^3-{P_n}^2+1)...({P_n}^3-{P_n}^2+P_n-1)$
$. \quad ...$
$.({P_n}^3-3P_n+1)...({P_n}^3-2P_n-1)$
$.({P_n}^3-2P_n+1)...({P_n}^3-P_n-1)$
$.({P_n}^3-P_n+1)...({P_n}^3-1)$
$. \quad ...$

(toujours dans le même produit, voici maintenant tous les nombres restants non multiples de P_n :)

$$
\begin{aligned}
&.(1).(2).(3)...(P_n-2).(P_n-1)\\
&.(P_n+1).(P_n+2)...(P_n-1).(2).(2P_n-1)\\
&.(2).(2P_n+1)...(3P_n-2).(3P_n-1)\\
&.(3).(3P_n+1)...(P_n-3P_n-2).(P_n-3P_n-1)\\
&.(P_n-3).({P_n}^2-3P_n+1)...({P_n}^2-2P_n-1)\\
&.(P_n-2).({P_n}^2-2P_n+1)...({P_n}^2-P_n-1)\\
&.(P_n-1).({P_n}^2-P_n+1)...({P_n}^2-2).({P_n}^2-1)
\end{aligned}
$$

Or, dans cette dernière partie de l'égalité, nous constatons que nous pouvons réorganiser les termes restants ainsi (les couleurs noires forment un ensemble et les couleurs rouges forment un autre ensemble):

$$
\begin{aligned}
&(1).(2).(3)...(P_n-2).(P_n-1)\\
&.(1).(P_n+1).(P_n+2)...(P_n-1).(2).(2P_n-1)\\
&.(2).(2P_n+1)...(3P_n-2).(3P_n-1)\\
&.(3).(3P_n+1)...(P_n-3P_n-2).(P_n-3P_n-1)\\
&.(P_n-3).({P_n}^2-3P_n+1)...({P_n}^2-2P_n-1)\\
&.(P_n-2).({P_n}^2-2P_n+1)...({P_n}^2-P_n-1)\\
&.(P_n-1).({P_n}^2-P_n+1)...({P_n}^2-2).({P_n}^2-1)\\
&=\\
&(P_n-1)!.(P_n+1)...(2P_n-1).(2P_n+1)...(3P_n-1).(3P_n+1)...({P_n}^2-1)\\
&.(P_n-1)!
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{n,3} \quad = \quad & (P_n-1)!.(P_n+1)...(2P_n-1).(2P_n+1)...(3P_n-1).(3P_n+1)...({P_n}^3-1)\\
& .(P_n-1)!.(P_n+1)...(2P_n-1).(2P_n+1)...(3P_n-1).(3P_n+1)...({P_n}^2-1)\\
& .(P_n-1)!
\end{aligned}
$$

Avec $\varepsilon_{n,3}$ non divisible par P_n.

• **Pour** $({P_n}^4-1)!$ **nous avons :**

$$({P_n}^4-1)! = P_n.2P_n.3P_n...({P_n}^3-1)P_n.k_4$$

Ici, le nombre de termes sous la forme $a.P_n$ multiples de P_n est $({P_n}^3-1)$. k_4 est le produit de tous les autres nombres, non divisible par P_n. Le nombre de multiples de ${P_n}^2$ est $({P_n}^2-1)$, car le produit factoriel se décompose aussi ainsi :

$$({P_n}^4-1)! = {P_n}^2.2{P_n}^2.3{P_n}^2...({P_n}^2-1){P_n}^2.k'_4$$

k'_4 est le produit de tous les autres nombres. Le nombre de multiples de ${P_n}^3$ est (P_n-1), car le produit factoriel se décompose aussi ainsi :

$$({P_n}^4-1)! = {P_n}^3.2{P_n}^3.3{P_n}^3...(P_n-1){P_n}^3.k''_4$$

k''_4 est le produit de tous les autres nombres. Ainsi, ce produit factoriel est divisible par ${P_n}^{({P_n}^3-1)}$, par ${P_n}^{({P_n}^2-1)}$ et par ${P_n}^{(P_n-1)}$.

$$\begin{aligned}({P_n}^4-1)! &= {P_n}^{({P_n}^3-1)}.{P_n}^{({P_n}^2-1)}.{P_n}^{(P_n-1)}.\varepsilon_{n,4} \\ &= {P_n}^{({P_n}^3+{P_n}^2+P_n-3)}.\varepsilon_{n,4}\end{aligned}$$

Et donc $\varepsilon_{n,4}$ n'est pas divisible par P_n.

Même principe que précédemment concernant la réécriture et une réorganisation adéquate (l'écriture de chaque ligne avant simplification serait trop lourde à gérer, même en plusieurs pages) :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n,4} &= (P_n-1)!.(P_n+1)...(2P_n-1).(2P_n+1)...(3P_n-1).(3P_n+1)...({P_n}^4-1) \\ &\quad .(P_n-1)!.(P_n+1)...(2P_n-1).(2P_n+1)...(3P_n-1).(3P_n+1)...({P_n}^3-1) \\ &\quad .(P_n-1)!.(P_n+1)...(2P_n-1).(2P_n+1)...(3P_n-1).(3P_n+1)...({P_n}^2-1) \\ &\quad .(P_n-1)!\end{aligned}$$

• **Pour** $({P_n}^x - 1)!$ **nous avons :**

Ecrivons toutes les possibilités pour la divisibilité de ce produit factoriel, pour $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$:

$$({P_n}^x - 1)! = P_n.2P_n.3P_n...({P_n}^{(x-1)} - 1)P_n.k_x$$

Ceci signifie aussi que, sur l'intervalle $]0; {P_n}^x[$, il existe $({P_n}^{(x-1)} - 1)$ multiples de P_n. Mais continuons (les 3 points de suspension dans le produit suivant représente des nombres entiers consécutifs:

$$\begin{aligned} ({P_n}^x - 1)! &= {P_n}^2.2{P_n}^2.3{P_n}^2...({P_n}^{(x-2)} - 1){P_n}^2.k'_x \\ &= {P_n}^3.2{P_n}^3.3{P_n}^3...({P_n}^{(x-3)} - 1){P_n}^3.k''_x \\ &... \\ &= {P_n}^{(x-1)}.2{P_n}^{(x-1)}.3{P_n}^{(x-1)}...(P_n - 1){P_n}^{(x-1)}.k_{x'} \end{aligned}$$

Avec k_x, k'_x, k''_x, ... , $k_{x'}$ des nombres entiers, chacun étant le produit des nombres qui n'apparaissent pas dans le produit (pour alléger l'écriture).

Et donc sur l'intervalle $]0; {P_n}^x[$, il existe $(P_n - 1)$ multiples de ${P_n}^{(x-1)}$, d'après cette dernière formule. Mais nous devons aussi tenir compte de ce qui suit :

Sur l'intervalle $]0; {P_n}^x[$,

Il existe $({P_n}^{(x-1)} - 1)$ multiples de P_n,

dont $({P_n}^{(x-2)} - 1)$ sont multiples de ${P_n}^2$,

dont $({P_n}^{(x-3)} - 1)$ sont multiples de ${P_n}^3$,

...

dont $({P_n}^3 - 1)$ sont multiples de ${P_n}^{(x-3)}$,

dont $({P_n}^2 - 1)$ sont multiples de ${P_n}^{(x-2)}$,

et dont $(P_n - 1)$ sont multiples de ${P_n}^{(x-1)}$.

Ainsi, nous avons :

$$
\begin{aligned}
(P_n{}^x - 1)! &= P_n{}^{(P_n{}^{(x-1)}-1)}.P_n{}^{(P_n{}^{(x-2)}-1)}.P_n{}^{(P_n{}^{(x-3)}-1)}...P_n{}^{(P_n-1)}.\varepsilon_{n,x} \\
&= P_n{}^{(P_n{}^{(x-1)}-1+P_n{}^{(x-2)}-1+P_n{}^{(x-3)}-1+...+P_n-1)}.\varepsilon_{n,x}
\end{aligned}
$$

Avec $\varepsilon_{n,x}$ un nombre entier non divisible par P_n (par construction). Le terme " -1 " à l'intérieur des parenthèses est répété $(x-1)$ fois. Donc :

$$
\begin{aligned}
(P_n{}^x - 1)! &= P_n{}^{[P_n{}^{(x-1)}+P_n{}^{(x-2)}+P_n{}^{(x-3)}+...+P_n-(x-1)]}.\varepsilon_{n,x} \\
&= P_n{}^{[P_n{}^{(x-1)}+P_n{}^{(x-2)}+P_n{}^{(x-3)}+...+P_n+1-x]}.\varepsilon_{n,x}
\end{aligned}
$$

Or,

$$[P_n{}^{(x-1)} + P_n{}^{(x-2)} + P_n{}^{(x-3)} + ... + P_n + 1] = \frac{P_n{}^x - 1}{P_n - 1}$$

Donc,

$$(P_n{}^x - 1)! = P_n{}^{\left(\frac{P_n{}^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}.\varepsilon_{n,x} \qquad (\varepsilon_{n,x} \text{ non divisible par } P_n).$$

Et donc,

$$\varepsilon_{n,x} = \frac{(P_n{}^x - 1)!}{P_n{}^{\left(\frac{P_n{}^x-1}{P_n-1} - x\right)}}$$

Si P_n n'était pas un nombre premier, alors $\varepsilon_{n,x}$ serait un nombre entier divisible par ce nombre. Ce qui explique la fonction F_c, vue précédemment. En effet, pour :

$$\varepsilon_{M,x} = \frac{(M^x - 1)!}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1} - x + 1\right)}}$$

où l'on a simplement divisé l'expression de $\varepsilon_{n,x}$ par P_n , $\varepsilon_{M,x}$ vaut un nombre rationnel si M est un nombre premier, et vaut un nombre entier si M est un autre nombre entier (non premier). Ainsi, nous n'avons pas besoin de connaître les nombres premiers pour formuler cette expression.

<u>Démonstration :</u>

Si M est un nombre entier qui n'est pas un nombre premier (M est tel que $M \in \mathbb{N}$ et $M \notin \mathbb{P}$), alors M peut se décomposer ainsi :

$$M = \prod_{n=1}^{n \to +\infty} (P_n)^{\alpha_n}$$

(*<u>développement 1</u>*)

Avec P_1, P_2, P_3, ... et P_n, avec $P_1 < P_2 < P_3 < ... < P_n$ et avec au moins 2 des termes $\alpha_n \geq 1$.

Rappelons que pour M défini ainsi, nous avons nécessairement :

$$P_n < M$$

ou, autrement dit, un nombre entier non premier est supérieur à chaque nombre premier P_n (élevé à la puissance α_n) dont il est composé.

Et donc nécessairement :

$$P_n{}^x < M^x$$

Avec $x \geq 1$, car ce raisonnement s'applique seulement si M peut être décomposé en produit de nombres premiers. En reprenant la méthode précédente (voir la formule de $\varepsilon_{M,x}$), nous avons :

$$\begin{aligned}
(M^x - 1)! &= M.2M.3M...(M^{(x-1)} - 1).M.k_x \\
&= M^2.2M^2.3M^2...(M^{(x-2)} - 1).M^2.k'_x \\
&= M^3.2M^3.3M^3...(M^{(x-3)} - 1).M^3.k''_x \\
&... \\
&= M^{(x-1)}.2M^{(x-1)}.3M^{(x-1)}...(M - 1).M^{(x-1)}.k_{x'}
\end{aligned}$$

Avec k_x, k'_x, k''_x, ... , $k_{x'}$ des nombres entiers, chacun étant le produit des nombres qui n'apparaissent pas dans le produit (pour alléger l'écriture).

(rappelons que cette méthode consiste à regrouper ensemble tous les facteurs premiers possibles pour chaque puissance de x).

Or, M étant composé de produit de facteurs premiers, nous retrouvons nécessairement tous ses facteurs dans le produit factoriel puisque chacun est inférieur à M :

$$\begin{aligned}(M^x - 1)! &= {P_1}^{(x.\alpha_1)}.{P_2}^{(x.\alpha_2)}.{P_3}^{(x.\alpha_3)}...{P_n}^{(x.\alpha_n)}.k_{x''} \\ &= M^x.k_{x''} \qquad \text{(avec } k_{x''} \text{ un nombre entier)}\end{aligned}$$

Pour alléger la démonstration, il n'est pas utile d'étudier tous les multiples de chaque facteur des P_n, ainsi, $(M^x - 1)!$ est divisible par au moins M "en plus de" :

$$M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x\right)}$$

Ce qui revient à écrire :

$$(M^x - 1)! = (\varepsilon_{M,x}).M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}$$

(avec $\varepsilon_{M,x}$ un nombre entier pour tout $M \in \mathbb{N}$ et $M \notin \mathbb{P}$).

Ce qui doit être toujours vrai lorsque $P_1 < P_2 < P_3 < ... < P_n$ avec au moins 2 des termes $\alpha_n \geq 1$.

(*développement 2*)

Supposons que $M = {P_n}^x$

Le résultat de $({P_n}^x - 1)!/\varepsilon_{n,x}$ contient le nombre maximum possible de divisiblités par P_n. Ce nombre maximum se retrouve dans la puissance de P_n, c'est-à-dire dans $\left(\frac{{P_n}^x-1}{P_n-1} - x\right)$.

Pour $x = 1$,

$$(M - 1)! = (P_n - 1)!$$

Or, $(P_n - 1)!$ n'est jamais divisible par P_n car aucun des nombre du produit de la factorielle n'est divisible par P_n.

Pour $x > 1$,

$$(M-1)! = (P_n - 1)!$$

Or, $(M-1)!$ est divisible par M si et seulement si l'on retrouve le produit de ses facteurs premiers dans les produits de la factorielle.

Par exemple, pour $M = P_1.P_2$, comme $M > P_2 > P_1$, nous avons :

$$(M-1)! = (M-1).(M-2)...P_2.P_1...3.2$$

est divisible par M.

Et, de manière plus explicite, pour notre cas où $M = {P_n}^x$ avec quelques exemples :

* Si $P_n = 2$ et $x = 3$,

  $$(M-1)! = 7.(6).5.(4).3.(2).1$$

  est divisible au moins par M ou bien par ${P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}$.

* Si $P_n = 3$ et $x = 2$,

  $$(M-1)! = 8.7.(6).5.4.(3).2.1$$

  est divisible au moins par M ou bien par ${P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}$.

* Si $P_n = 3$ et $x = 3$,

$(M-1)! =$
26.25.(24).23.22.(21).20.19.(18).17.16.(15).14.13.(12).11.10.(9).8.7.(6).5.4.(3).2.1

est divisible au moins par M ou bien par ${P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x-1}{P_n-1}-x\right)}$.

* Si $P_n = 5$ et $x = 2$,

$(M-1)! =$
24.23.22.21.(20).19.18.17.16.(15).14.13.12.11.(10).9.8.7.6.(5).4.3.2.1

est divisible au moins par M ou bien par ${P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x-1}{P_n-1}-x\right)}$.

La question qu'il convient alors de nous poser est : existe-t-il des nombres M qui échappe à cette règle ? Y'a-t-il toujours des facteurs premiers en nombre suffisant dans la décomposition du produit factoriel de M ?

Pour y répondre, étudions des inégalités, tout en gardant à l'esprit l'égalité $M = {P_n}^x$.

$(M-1)!$ est divisible par au moins par M ou bien par ${P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x-1}{P_n-1}-x\right)}$, avec, comme nous l'avons déjà déterminé :

$$\begin{aligned} (M-1)! &= ({P_n}^x - 1)! \\ ({P_n}^x - 1)! &= {P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x-1}{P_n-1}-x\right)}.(\varepsilon_{n,x}) \end{aligned}$$

($\varepsilon_{n,x}$ non divisible par P_n, donc seul le reste de la formule est divisible par M).

Or, pour que $(M-1)!$ soit divisible au moins par M ou bien par ${P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x-1}{P_n-1}-x\right)}$, nous pouvons borner l'inégalité par le minimum auquel $(M-1)!$ doit être divisible, c'est-à-dire par M, puis comparer cette borne inférieure à la formule théorique que nous avons déterminé pour obtenir le nombre de divisibilité par P_n :

$$\Large {P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x-1}{P_n-1}-x\right)} \geq {P_n}^x$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x\right) &\geq x \\
{P_n}^x &\geq 2.x(P_n - 1) + 1 \\
{P_n}^x - 2.x(P_n - 1) &\geq 1
\end{aligned}$$

Rappelons que ce raisonnement est à appliquer seulement si $x \geq 2$ car dans le cas où $x = 1$, $(P_n - 1)!$ n'est pas divisible par P_n.

(<u>*Vérification 1*</u>)

Si $x = 2$, nous avons :

$$\begin{aligned}
{P_n}^2 - 4.P_n + 4 &\geq 1 \\
\Rightarrow (P_n - 2)^2 &\geq 1 \\
\text{Donc} \qquad P_n &\geq 3
\end{aligned}$$

Les nombres entiers inférieurs à 3 se trouvent sur l'intervalle $]0;3[$. Ces nombres entiers sont 1 et 2. Or, 2 est le plus petit nombre premier. La formule suivante ayant été établie :

$({P_n}^x - 1)! = {P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}.(\varepsilon_{n,x})$

Cette formule échappe donc au cas $P_n = 2$ lorsque $x = 2$. Or, 2 étant le plus petit nombre premier, tous les cas ont donc été examinés pour $x = 2$.

(<u>*Vérification 2, suite*</u>)

Si $x \geq 3$, nous cherchons toujours à établir la justesse de l'inégalité précédente, que nous redonnons ici :

$$P_n{}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x\right)} \geq {P_n}^x$$

Ce qui revient à écrire :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x\right) &\geq x \\
\Rightarrow \frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - 2.x &\geq 0
\end{aligned}$$

Remarquons que le plus petit nombre premier étant 2, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} &\geq \frac{2^x - 1}{2 - 1} \\
\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - 2x &\geq \frac{2^x - 1}{2 - 1} - 2x
\end{aligned}$$

Or, pour $x \geq 3$, nous avons :

$$\begin{aligned}
2^x &> 2.x + 1 \\
\Rightarrow 2^x - 1 - 2x &> 0 \\
\Rightarrow \frac{2^x - 1}{2 - 1} - 2x &> 0
\end{aligned}$$

Et donc, pour $x \geq 3$, nous pouvons déduire que :

$$\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - 2.x > 0$$

Ce qui est une condition nécessaire pour que les formules $\varepsilon_{n,x}$ et $\varepsilon_{M,x}$ établies soient tels que nous les avions défini juste avant cette démonstration.

Conclusion partielle :

- Pour $P_n \in \mathbb{P}$:

$$({P_n}^x - 1)! = {P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x\right)} . (\varepsilon_{n,x})$$

avec $\varepsilon_{n,x}$ un nombre entier non divisible par P_n, cette formule est donc toujours vraies sauf pour le seul cas de $P_n = 2$ et $x = 2$.

- Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \notin \mathbb{P}$:

$$(M^x - 1)! = M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1} - x + 1\right)} . (\varepsilon_{M,x})$$

Cette formule est donc toujours vraie sauf pour le seul cas de $M = 4$ et $x = 1$.

Et donc :

$$\varepsilon_{M,x} = \frac{(M^x - 1)!}{M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1 + 1} - x + 1\right)}}$$

$\varepsilon_{M,x}$ vaut un nombre rationnel si M est un nombre premier, et vaut un nombre entier si M est un autre nombre entier (non premier) supérieur à 3, toujours en dehors du seul cas $M = 4$ et $x = 1$.

$\Longrightarrow$ ***ATTENTION :***

Par la suite, nous considérerons ces 2 cas comme acquis pour tout le reste de l'étude : à chaque fois que nous utiliserons les fomules $\varepsilon_{n,x}$ et $\varepsilon_{M,x}$, nous sous-entendrons que ces formules sont toujours valables sauf dans le cas de $P_n = 2$ et $x = 2$, et respectivement sauf dans le cas de $M = 4$ et $x = 1$.

(*Explications*)

Explication concernant le "problème" rencontré pour $M = 4$:

Ce problème s'explique parce qu'il n'existe qu'un multiple de 2 sur l'intervalle $]0;4[$, Or, une division par M $(= 2^2)$ aurait été nécessaire pour que la formule donne toujours les résultats désirés, c'est-à-dire $\varepsilon_{M,x}$ divisible par M lorsque M est un nombre entier qui n'est pas un nombre premier.

Comme ce n'est pas le cas pour $M = 4$, nous avons plusieurs choix qui s'offre à nous pour contourner ce problème : soit élever $(M-1)!$ au carré pour obtenir la divisibilité par M lorsque $M = 4$, soit en construisant une formule "annexe" qui corrige ce problème, comme nous l'avons fait pour la "fonction A" vu dans la partie précédente (voir partie "**2.1 Vue d'ensemble des étapes à suivre**" page 52).

En tenant compte de toutes ces informations nous pouvons formuler les "fonctions" F_c et A vues vu dans la partie "**2.1 Vue d'ensemble des étapes à suivre**" (page 52).

- **Suite 1 de l'étude de $({P_n}^x - 1)!$:**

Nous désirons maintenant savoir ce qu'il advient de la divisibilité de $\varepsilon_{n,x}$ et de $\varepsilon_{M,x}$ par P_n lorsque $x \geq 2$. Le théorème de *WILSON* [1] nous permettant directement de savoir que :

$$(P_n - 1)! = P_n.w_1 - 1 \qquad \text{(avec } w_1 \text{ un nombre entier)}$$

D'après ce que nous venons de voir, nous pouvons déduire de la formule $\varepsilon_{n,x}$ qu'elle est équivalente aux produits de tous les termes non divisibles par P_n. Nous avons donc ce qui suit :

$$\varepsilon_{n,x} = \frac{({P_n}^x - 1)!}{{P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}}$$

En décomposant $({P_n}^x - 1)!$ (ceci étant un peu lourd à gérer, nous allons étaler l'égalité en produits sur plusieurs lignes et plusieurs pages, d'abord les produits des termes non multiples de P_n, puis les produits des termes muliples de P_n), nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl}
({P_n}^x - 1)! & = & ({P_n}^x - 1).({P_n}^x - 2)...({P_n}^x - P_n + 1) \\
& & .({P_n}^x - P_n - 1).({P_n}^x - P_n - 2)...({P_n}^x - 2P_n + 1) \\
& & .({P_n}^x - 2P_n - 1).({P_n}^x - 2P_n - 2)...({P_n}^x - 3P_n + 1) \\
& & . \quad ... \\
& & .({P_n}^x - {P_n}^2 - 1).({P_n}^x - {P_n}^2 - 2)...({P_n}^x - {P_n}^2 - P_n + 1) \\
& & .({P_n}^x - {P_n}^2 - P_n - 1)...({P_n}^x - {P_n}^2 - 2P_n + 1) \\
& & .({P_n}^x - {P_n}^2 - 2P_n - 1)...({P_n}^x - {P_n}^2 - 3P_n + 1) \\
& & . \quad ... \\
& & .({P_n}^x - 2{P_n}^2 - 1)...({P_n}^x - 2{P_n}^2 - P_n + 1) \\
& & .({P_n}^x - 2{P_n}^2 - P_n - 1).....({P_n}^x - 2{P_n}^2 - 2P_n + 1) \\
& & .({P_n}^x - 2{P_n}^3 - 2P_n - 1)...({P_n}^x - 2{P_n}^2 - 3P_n + 1) \\
& & . \quad ... \\
& & .({P_n}^x - 3{P_n}^2 - 1)...({P_n}^x - 3{P_n}^2 - P_n + 1) \\
& & .({P_n}^x - 3{P_n}^2 - P_n - 1)...({P_n}^x - 3{P_n}^2 - 2P_n + 1) \\
& & .({P_n}^x - 3{P_n}^2 - 2P_n - 1)...({P_n}^x - 3{P_n}^2 - 3P_n + 1) \\
& & . \quad ... \\
& & .({P_n}^x - {P_n}^3 - 1).({P_n}^x - {P_n}^3 - 2)...({P_n}^x - {P_n}^3 - P_n + 1) \\
& & .({P_n}^x - {P_n}^3 - P_n - 1)...({P_n}^x - {P_n}^3 - 2P_n + 1) \\
& & .({P_n}^x - {P_n}^3 - 2P_n - 1)...({P_n}^x - {P_n}^3 - 3P_n + 1) \\
& & . \quad ... \\
& & .({P_n}^x - 2{P_n}^3 - 1)...({P_n}^x - 2{P_n}^3 - P_n + 1) \\
& & .({P_n}^x - 2{P_n}^3 - P_n - 1)...({P_n}^x - 2{P_n}^3 - 2P_n + 1) \\
& & .({P_n}^x - 2{P_n}^3 - 2P_n - 1)...({P_n}^x - 2{P_n}^3 - 3P_n + 1) \\
& & . \quad ...
\end{array}$$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^x - 3P_n{}^3 - 1)...(P_n{}^x - 3P_n{}^3 - P_n + 1)$

$.(P_n{}^x - 3P_n{}^3 - P_n - 1)...(P_n{}^x - 3P_n{}^3 - 2P_n + 1)$

$.(P_n{}^x - 3P_n{}^3 - 2P_n - 1)...(P_n{}^x - 3P_n{}^3 - 3P_n + 1)$

$. \quad ...$

$. \quad ...$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^3 - 1)...(P_n{}^3 - P_n + 1)$

$.(P_n{}^3 - P_n - 1)...(P_n{}^3 - 2P_n + 1)$

$.(P_n{}^3 - 2P_n - 1)...(P_n{}^3 - 3P_n + 1)$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^3 - P_n{}^2 - 1)...(P_n{}^3 - P_n{}^2 - P_n + 1)$

$.(P_n{}^3 - P_n{}^2 - P_n - 1)...(P_n{}^3 - P_n{}^2 - 2P_n + 1)$

$.(P_n{}^3 - P_n{}^2 - 2P_n - 1)...(P_n{}^3 - P_n{}^2 - 3P_n + 1)$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - 1)...(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - P_n + 1)$

$.(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - P_n - 1)...(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - 2P_n + 1)$

$.(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - 2P_n - 1)...(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - 3P_n + 1)$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^3 - 3P_n{}^2 - 1)...(P_n{}^3 - 3P_n{}^2 - P_n + 1)$

$.(P_n{}^3 - 3P_n{}^2 - P_n - 1)...(P_n{}^3 - 3P_n{}^2 - 2P_n + 1)$

$.(P_n{}^3 - 3P_n{}^2 - 2P_n - 1)...(P_n{}^3 - 3P_n{}^2 - 3P_n + 1)$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^2 - 1)...(P_n{}^2 - P_n + 1)$

$.(P_n{}^2 - P_n - 1)...(P_n{}^2 - 2P_n + 1)$

$.(P_n{}^2 - 2P_n - 1)...(P_n{}^2 - 3P_n + 1)$

$. \quad ...$

$.(P_n - 1).(P_n - 2).(P_n - 3)...(3).(2).(1)$

(toujours dans le même produit, voici maintenant tous les termes multiples de P_n et uniquement les termes multiples de P_n dans le même ordre décroissant que suivi précédemment : voir page suivante)

$.(P_n{}^x - P_n).(P_n{}^x - 2P_n).(P_n{}^x - 3P_n)$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^x - P_n{}^2).(P_n{}^x - P_n{}^2 - P_n).(P_n{}^x - P_n{}^2 - 2P_n).(P_n{}^x - P_n{}^2 - 3P_n)$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^x - 2P_n{}^2).(P_n{}^x - 2P_n{}^2 - P_n).(P_n{}^x - 2P_n{}^2 - 2P_n).(P_n{}^x - 2P_n{}^2 - 3P_n)$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^x - 3P_n{}^2).(P_n{}^x - 3P_n{}^2 - P_n).(P_n{}^x - 3P_n{}^2 - 2P_n).(P_n{}^x - 3P_n{}^2 - 3P_n)$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^x - P_n{}^3).(P_n{}^x - P_n{}^3 - P_n).(P_n{}^x - P_n{}^3 - 2P_n).(P_n{}^x - P_n{}^3 - 3P_n)$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^x - 2P_n{}^3).(P_n{}^x - 2P_n{}^3 - P_n).(P_n{}^x - 2P_n{}^3 - 2P_n).(P_n{}^x - 2P_n{}^3 - 3P_n)$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^x - 3P_n{}^3).(P_n{}^x - 3P_n{}^3 - P_n).(P_n{}^x - 3P_n{}^3 - 2P_n).(P_n{}^x - 3P_n{}^3 - 3P_n)$

$. \quad ...$

$. \quad ...$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^3).(P_n{}^3 - P_n).(P_n{}^3 - 2P_n).(P_n{}^3 - 3P_n)$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^3 - P_n{}^2).(P_n{}^3 - P_n{}^2 - P_n).(P_n{}^3 - P_n{}^2 - 2P_n).(P_n{}^3 - P_n{}^2 - 3P_n)$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^3 - 2P_n{}^2).(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - P_n).(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - 2P_n).(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - 3P_n)$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^3 - 2P_n{}^2).(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - P_n).(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - 2P_n).(P_n{}^3 - 2P_n{}^2 - 3P_n)$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^3 - 3P_n{}^2).(P_n{}^3 - 3P_n{}^2 - P_n).(P_n{}^3 - 3P_n{}^2 - 2P_n).(P_n{}^3 - 3P_n{}^2 - 3P_n)$

$. \quad ...$

$.(P_n{}^2).(P_n{}^2 - P_n).(P_n{}^2 - 2P_n).(P_n{}^2 - 3P_n)...(P_n)$

En divisant ce “grand” produit par $P_n{}^{\left(\frac{P_n{}^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}$, nous éliminons tous les facteurs P_n de chaque terme multiple de P_n. Ceci nous permet d'observer des “trous” à la place des multiples de P_n dont la valeur est un “reste” non divisible par P_n. Nous obtenons donc ce qui suit : *(voir page suivante)*

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{n,x} \quad = \quad & (P_n - 1)!.(P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n + 1)...({P_n}^{x} - 1) \\
& .(P_n - 1)!.(P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n + 1)...({P_n}^{(x-1)} - 1) \\
& .(P_n - 1)!.(P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n + 1)...({P_n}^{(x-2)} - 1) \\
& . \quad ... \\
& .(P_n - 1)!.(P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n + 1)...({P_n}^{3} - 1) \\
& .(P_n - 1)!.(P_n + 1)...(2P_n - 1).(2P_n + 1)...(3P_n - 1).(3P_n + 1)...({P_n}^{2} - 1) \\
& .(P_n - 1)!
\end{aligned}
$$

Ce qui peut aussi s'écrire (produits étalés ligne par ligne avec des séparations sous forme de tirets rouges pour plus de clarté, c'est-à-dire que par rapport à notre dernière formule de $\varepsilon_{n,x}$, lorsque nous passons à la ligne suivante de cette formule, les tirets seront là pour marquer ce passage d'une ligne à l'autre) :

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{n,x} \quad = \quad & \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [{P_n}^{(x-1)}.P_n - a] \\
& . \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [({P_n}^{(x-1)} - 1).P_n - a] \\
& . \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [({P_n}^{(x-1)} - 2).P_n - a] \\
& . \quad ... \\
& . \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (3P_n - a) \\
& . \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (2P_n - a) \\
& . \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a) \\
& - - - - - - - - - - -
\end{aligned}
$$

$$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [{P_n}^{(x-2)}.P_n - a]$$

$$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [({P_n}^{(x-2)} - 1).P_n - a]$$

$$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [({P_n}^{(x-2)} - 2).P_n - a]$$

$. \quad ...$

$$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (3P_n - a)$$

$$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (2P_n - a)$$

$$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a)$$

— — — — — — — — — — —

$$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [{P_n}^{(x-3)}.P_n - a]$$

$$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [({P_n}^{(x-3)} - 1).P_n - a]$$

$$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [({P_n}^{(x-3)} - 2).P_n - a]$$

$. \quad ...$

$$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (3P_n - a)$$

$$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (2P_n - a)$$

$$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a)$$

— — — — — — — — — — —

$. \quad ...$

— — — — — — — — — — —

. $\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [{P_n}^2.P_n - a]$

. $\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [({P_n}^2 - 1).P_n - a]$

. $\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [({P_n}^2 - 2).P_n - a]$

. ...

. $\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (3P_n - a)$

. $\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (2P_n - a)$

. $\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a)$

— — — — — — — — — — —

. $\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [P_n.P_n - a]$

. $\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n - 1).P_n - a]$

. $\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(P_n - 2).P_n - a]$

. ...

. $\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (3P_n - a)$

. $\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (2P_n - a)$

. $\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a)$

— — — — — — — — — — —

. $\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (P_n - a)$

Ce qui peut encore s'écrire ainsi :

$$\varepsilon_{n,x} = \prod_{b=1}^{b={P_n}^{(x-1)}} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) \right]$$

$$. \prod_{b=1}^{b={P_n}^{(x-2)}} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) \right]$$

$$. \prod_{b=1}^{b={P_n}^{(x-3)}} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) \right]$$

$$. \quad \ldots$$

$$. \prod_{b=1}^{b={P_n}^{2}} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) \right]$$

$$. \prod_{b=1}^{b={P_n}^{1}} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) \right]$$

$$. \prod_{b=1}^{b={P_n}^{0}} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) \right]$$

Donc, pour finir, et pour $x \geq 1$, nous avons :

$$\varepsilon_{n,x} = \prod_{c=0}^{c=(x-1)} \prod_{b=1}^{b={P_n}^{c}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a)$$

Et donc

$$\frac{({P_n}^{x} - 1)!}{{P_n}^{\left(\frac{{P_n}^{x}-1}{P_n-1} - x\right)}} = \prod_{c=0}^{c=(x-1)} \prod_{b=1}^{b={P_n}^{c}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a)$$

Prenons un exemple pour bien voir concrètement comment cette formule se représente. Prenons $P_n = P_3 = 5$ ($n = 3$ car dans l'ordre croissant, 5 est le $3^{ième}$ de la liste des nombres premiers) et prenons $x = 3$ (les couleurs permettent une réorganisation en groupe, un groupe par couleur. Entre les parenthèses, les multiples de 5 sont mis en évidence par un produit par 5) :

$$\begin{aligned}
(5^3-1)! &= 124! \\
&= 1.2.3.4.(1.5).6.7.8.9.(2.5).11.12.13.14.(3.5).16.17.18.19.(4.5).21.22.23.24 \\
&\quad .(1.5.5).26.27.28.29.(6.5).31.32.33.34.(7.5).36.37.38.39.(8.5).41.42.43.44 \\
&\quad .(9.5).46.47.48.49.(2.5.5).51.52.53.54.(11.5).56.57.58.59.(12.5).61.62.63.64 \\
&\quad .(13.5).66.67.68.69.(14.5).71.72.73.74.(3.5.5).76.77.78.79.(16.5).81.82.83.84 \\
&\quad .(17.5).86.87.88.89.(18.5).91.92.93.94.(19.5).96.97.98.99.(4.5.5).101.102.103 \\
&\quad .104.(21.5).106.107.108.109.(22.5)111.112.113.114.(23.5).116.117.118.119 \\
&\quad .(24.5).121.122.123.124
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5^3-1)! &= 5^{\left(\frac{5^3-1}{5-1}-3\right)}.\varepsilon_{3,3} \qquad (\varepsilon_{3,3} \text{ non divisible par } 5) \\
&= 5^{28}.\varepsilon_{3,3}
\end{aligned}$$

$\varepsilon_{3,3}$ nous permet "d'éliminer" tous les 5 qui sont facteurs de chaque nombre dans notre produit.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{3,3} &= 1.2.3.4.(1).6.7.8.9.(2).11.12.13.14.(3).16.17.18.19.(4).21.22.23.24 \\
&\quad .(1).26.27.28.29.(6).31.32.33.34.(7).36.37.38.39.(8)41.42.43.44 \\
&\quad .(9).46.47.48.49.(2).51.52.53.54.(11).56.57.58.59.(12).61.62.63.64 \\
&\quad .(13).66.67.68.69.(14).71.72.73.74.(3).76.77.78.79.(16).81.82.83.84 \\
&\quad .(17).86.87.88.89.(18).91.92.93.94.(19).96.97.98.99.(4).101.102.103 \\
&\quad .104.(21).106.107.108.109.(22)111.112.113.114.(23).116.117.118.119 \\
&\quad .(24).121.122.123.124
\end{aligned}$$

D'où l'on voit apparaître clairement dans chaque groupe de couleur une réorganisation possible :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{3,3} = \ & (1.2.3.4).(6.7.8.9).(11.12.13.14).(16.17.18.19).(21.22.23.24) \\ & .(26.27.28.29).(31.32.33.34).(36.37.38.39).(41.42.43.44).(46.47.48.49) \\ & .(51.52.53.54).(56.57.58.59).(61.62.63.64).(66.67.68.69).(71.72.73.74) \\ & .(76.77.78.79).(81.82.83.84).(86.87.88.89).(91.92.93.94).(96.97.98.99) \\ & .(101.102.103.104).(106.107.108.109).(111.112.113.114).(116.117.118.119) \\ & .(121.122.123.124).(1.2.3.4).(6.7.8.9).(11.12.13.14).(16.17.18.19) \\ & .(21.22.23.24).(1.2.3.4)\end{aligned}$$

Ce qui correspond bien à :

$$\varepsilon_{3,3} = \prod_{c=0}^{c=(3-1)} \prod_{b=1}^{b=5^c} \prod_{a=1}^{a=(5-1)} (b.5-a)$$

- **Suite 2 de l'étude de $(P_n{}^x - 1)!$:**

Pour éviter de nous perdre dans des développements trop longs, nous ferons des simplifications dans chacune des prochaines parties qui nous permettrons d'aller à l'essentiel. C'est-à-dire que nous n'écrirons pas les développements en polynôme comme nous le devrions, mais nous allons simplifier leur écriture en factorisant les termes les plus significatifs pour résoudre notre problème.

Poursuivons en notant $B = b.P_n$ (d'après la formule de $\varepsilon_{n,x}$, b est implicitement un nombre entier), nous avons :

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) = \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (B-a)$$

En développant, nous obtenons un résultat du type :

- Si P_n est paire

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (B-a) = (B).f(B) - (P_n-1)!$$

- P_n est impaire

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (B-a) = (B).f(B) + (P_n-1)!$$

avec $f(B)$ un nombre entier (en fonction de B). $(P_n - 1)!$ apparaît suite à la multiplication entre eux de tous les “ a ” (à droite de la parenthèse) entre eux, pour “ a ” partant de 1 jusqu'à $(P_n - 1)$ et en passant par toutes les valeurs intermédiaires. Comme (P_n-1) est paire lorsque P_n est impaire, lors du développement, nous avons une multiplication de “ $-a$ ” un nombre paire de fois, ce qui rend positif le signe devant la factorielle. Evidemment, le reste du développement est nécessairement une somme de puissances de B (un “polynôme” dont les puissances décroissent de $(P_n - 1)$ jusqu'à 1 en passant par toutes les valeurs intermédiaires, ce qui nous permet une factorisation par B. Nous appellerons $f(B)$ “nombre entier polynômiale”), chaque puissance de B ayant un nombre entier pour coefficient.

En revenant aux variables de départ, nous avons donc :

- Si P_n est paire

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n-a) = (b.P_n).f(b.P_n) - (P_n-1)!$$

- P_n est impaire

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (B-a) = (b.P_n).f(b.P_n) + (P_n-1)!$$

avec $f(b.P_n)$ un nombre entier polynômiale de degré $(P_n - 1)$ en fonction de b et de P_n.

Dans le cas où P_n est paire :

si $P_n = 2.m$ (avec $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$)

$P_n = 2$ est le seul nombre premier qui soit paire (donc $m = 1$) car tous les autres nombres paires > 0 sont composés en produit de 2 et de $m > 1$. Nous avons donc :

$$\prod_{a=1}^{a=(2-1)} (2.b - a) = (2.b) - 1$$

Ce qui signifie donc que

$$\prod_{a=1}^{a=(2-1)} (2.b - a) + 1 = (2.b)$$

Et donc $\displaystyle\prod_{a=1}^{a=(2-1)} (2.b - a) + 1$ est divisible par le nombre premier 2.

Dans le cas où P_n est impaire :

P_n est impaire dans tous les autres cas. D'après le théorème de *WILSON* [1], $[(P_n - 1)! + 1]$ est divisible par P_n, ce qui peut être noté comme ceci :

$(P_n - 1)! + 1 = P_n.w_1$ (avec w_1 un nombre entier).

Ou encore

$(P_n - 1)! = P_n.w_1 - 1$

D'où nous déduisons :

$$\begin{aligned}\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) &= (b.P_n).f(b.P_n) + P_n.w_1 - 1 \\ &= P_n.[b.f(b.P_n) + w_1] - 1\end{aligned}$$

D'où

$$\left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a)\right] + 1 = P_n.[b.f(b.P_n) + w_1]$$

Et donc $$\left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a)\right] + 1 \qquad \text{est divisible par } P_n.$$

Pour conclure :

Nous avons donc pour tout $P_n \in \mathbb{P}$:

$$\left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a)\right] + 1 \qquad \text{divisible par } P_n.$$

- **Suite 3 de l'étude de $({P_n}^x - 1)!$:**

Poursuivons ce dernier raisonnement en notant (pour alléger la lecture) :

$$[b.f(b.P_n) + w_1] = w_{2,c}$$

Avec $w_{2,c}$ un nombre entier. Nous avons maintenant :

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a) = P_n.w_{2,c} - 1$$

Nous avons simplement :

$$\prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c)}} \left[\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a)\right] = \prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c)}} (P_n.w_{2,c} - 1)$$

Comme précédemment, nous pouvons développer ce produit et obtenir un résultat du type (ici aussi, nous distinguons 2 cas possibles) :

- Si P_n est paire (et pour $c \geq 1$, implicitement c est un nombre entier) :

$$\prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c)}} (P_n.w_{2,c} - 1) = (P_n.w_{2,c}).f(P_n.w_{2,c}) + 1$$

- Et si P_n est impaire (et pour tout $c \geq 0$, implicitement c est un nombre entier) :

$$\prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c)}} (P_n.w_{2,c} - 1) = (P_n.w_{2,c}).f(P_n.w_{2,c}) - 1$$

Avec $f(P_n.w_{2,c})$ un nombre entier polynômiale en fonction de P_n et de $w_{2,c}$. " 1 " apparaît suite à la multiplication entre eux de tous les " 1 " (à droite de la parenthèse) entre eux un nombre de fois qui vaut P_n puissance (c). "+1" apparaît si ce nombre de fois est paire et "−1" apparaît si ce nombre de fois est impaire. Evidemment, le reste du développement est forcément une somme de puissance de $(P_n.w_{2,c})$, chacune ayant un nombre entier pour coefficient.

Cas de P_n paire :

Nous avons déjà vu qu'un seul cas n'est concerné, c'est celui de $P_n = 2$:

$$\prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c)}} (P_n.w_{2,c} - 1) \quad = \quad \prod_{b=1}^{b=2^{(c)}} (2.w_{2,c} - 1)$$

Or, $2^{(c)}$ est toujours un nombre paire pour $c \geq 1$, et donc multiple de 2 (attendre la fin de ce raisonnement pour que le cas de $c = 0$ apparaisse naturellement). En développant ce produit, nous obtenons :

$$\prod_{b=1}^{b=2^{(c)}} (2.w_{2,c} - 1) = (2.w_{2,c}).f(2.w_{2,c}) + 1$$

Donc

$$\left[\prod_{b=1}^{b=2^{(c)}} (2.w_{2,c} - 1)\right] - 1 \qquad \text{est divisible par le nombre premier 2.}$$

Pour faire le lien avec le cas de P_n impaire, nous allons devoir poursuivre :

$$\begin{aligned}\prod_{b=1}^{b=2^{(c)}} (2.w_{2,c}-1) &= (2.w_{2,c}).f(2.w_{2,c})+1 \\ &= (2.w_{2,c}).f(2.w_{2,c})+2-1 \\ &= 2.[(w_{2,c}).f(2.w_{2,c})+1]-1\end{aligned}$$

Et donc, pour tout $c \geq 0$:

$$\left[\prod_{b=1}^{b=2^{(c)}} (2.w_{2,c}-1)\right]+1 \quad \text{est également divisible par le nombre premier 2.}$$

Cas de P_n impaire :

Comme nous l'avons déjà vu, ce cas concerne tous les autres nombres premiers (et pour $c \geq 0$).

$$\prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c)}} (P_n.w_{2,c}-1) = P_n.(w_{2,c}).f(P_n.w_{2,c})-1$$

$$\left[\prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c)}} (P_n.w_{2,c}-1)\right]+1 = P_n.(w_{2,c}).f(P_n.w_{2,c})$$

Donc $\left[\prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c)}} (P_n.w_{2,c}-1)\right]+1$ est divisible par P_n.

Pour conclure :

Nous avons donc pour tout $P_n \in \mathbb{P}$ et pour $c \geq 0$:

$$\left[\prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n-a)\right]+1 \text{ est divisible par } P_n.$$

- **Suite 4 de l'étude de $({P_n}^x - 1)!$:**

Avant de pouvoir donner une conclusion générale sur la divisibilité de $\varepsilon_{n,x}$, il nous faut encore traiter cette dernière étape. Rappelons que :

$$\varepsilon_{n,x} = \prod_{c=0}^{c=(x-1)} \prod_{b=1}^{b={P_n}^c} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} (b.P_n - a)$$

Nous avions noté

$$\prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c)}} (P_n.w_{2,c} - 1) = P_n.(w_{2,c}).f(P_n.w_{2,c}) - 1$$

Toujours pour alléger la lecture, notons :

$$(w_{2,c}).f(P_n.w_{2,c}) = w_{3,x} \qquad \text{(avec } w_{3,x} \text{ un nombre entier)}$$

Dans ce cas, nous avons :

$$\varepsilon_{n,x} = \prod_{c=0}^{c=(x-1)} (P_n.w_{3,x} - 1) = P_n.(w_{3,x}).f(P_n.w_{3,x}) - 1 \quad \text{si } x \text{ est impaire.}$$

Et

$$\varepsilon_{n,x} = P_n.(w_{3,x}).f(P_n.w_{3,x}) + 1 \quad \text{si } x \text{ est paire.}$$

Avec $f(P_n.w_{3,x})$ un nombre entier polynômiale en fonction de P_n et de $w_{3,x}$.

Et donc, pour tout $x \geq 1$:

$$\varepsilon_{n,x} = \prod_{c=0}^{c=(x-1)} (P_n.w_{3,x} - 1) = P_n.(w_{3,x}).f(P_n.w_{3,x}) + (-1)^x$$

D'où

$$\varepsilon_{n,x} - (-1)^x = P_n.[(w_{3,x}).f(P_n.w_{3,x})]$$

avec $[(w_{3,x}).f(P_n.w_{3,x})]$ un nombre entier.

Pour conclure :

Pour w_3 un nombre entier non fixé, nous avons toujours :

$\varepsilon_{n,x} = P_n.w_3 + (-1)^x$ pour tout $P_n \in \mathbb{P}$ et pour tout $x \geq 1$.

Rappelons que nous avions noté :

$$\varepsilon_{n,x} = \frac{({P_n}^x - 1)!}{{P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}}$$

Nous avons donc pour $x \geq 1$:

$$\frac{({P_n}^x - 1)!}{{P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}} - (-1)^x = P_n.w_3$$

De la même manière pour :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{M,x} &= \frac{(M^x - 1)!}{M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1} - x + 1\right)}} \\ &= \frac{(M^x - 1)!}{M.M^{\left(\frac{M^x - 1}{M - 1} - x\right)}} \end{aligned}$$

- Nous avons un premier cas si $M = P_n$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{M,x} &= \frac{({P_n}^x - 1)!}{P_n.{P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}} \\ &= \frac{\varepsilon_{n,x}}{P_n} \qquad \text{(autrement dit un nombre rationnel)} \end{aligned}$$

Et d'après ce que nous venons de voir :

pour $x = 1$, $\varepsilon_{n,x}$ équivaut au cas du théorème de *WILSON* [1] tel que $\varepsilon_{n,1} = P_n.w_1 - 1$ (avec w_1 un nombre entier)

Et de manière générale, si x est impaire :

$\varepsilon_{n,x} = P_n.w_3 - 1$ (avec w_3 un nombre entier)

$\Rightarrow \varepsilon_{M,x} = w_3 - 1/P_n$

Et si x est paire :

$\varepsilon_{n,x} = P_n.w_3 + 1$

$\Rightarrow \varepsilon_{M,x} = w_3 + 1/P_n$

Pour $M = P_n$, nous avons donc toujours :

$\Rightarrow \varepsilon_{M,x} = w_3 \pm 1/P_n$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned}
\sin(\pi.\varepsilon_{M,x}) &= \sin[\pi.(w_3 \pm 1/P_n)] \\
\sin(\pi.\varepsilon_{M,x}) &= \pm\sin(\pi/P_n) \\
\sin^2(\pi.\varepsilon_{M,x}) &= \sin^2(\pi/P_n)
\end{aligned}$$

Et donc, pour $M = P_n$:

$\dfrac{\sin^2(\pi.\varepsilon_{M,x})}{\sin^2(\pi/P_n)} = 1$

- Nous avons un second cas si M est un entier tel que $M \neq P_n$:

  Nous avons déjà vu que dans ce cas $\varepsilon_{M,x}$ valait un nombre entier. Autrement dit :

  $\sin(\pi.\varepsilon_{M,x}) = 0$

Et donc (avec la formule utilisée au cas précédent, c'est-à-dire le cas de $M = P_n$)

$$\frac{\sin^2(\pi.\varepsilon_{M,x})}{\sin^2(\pi/M)} = 0 \text{ (pour } M \neq P_n)$$

- En conclusion, nous sommes capables de construire la fonction Cc sur le constat de la divisibilité de $\varepsilon_{M,x}$. Rappelons que :

  $$Cc = \frac{1}{\sin^2(\pi/M)}$$

  Constatons que nous nous sommes rapprochés de la forme finale de la fonction F_p.

2.2.3 Construction de la fonction Fp

Pour accéder à la solution, nous allons devoir faire des rappels ou réécrire sous une autre forme ce qui peut se déduire de la construction d'un tableau comme le tableau de référence $T.R.2$. Tenons compte des remarques préalables faites en début de partie "**2.2 Démonstration Complète**" (page 54).

- **Rappels :**

⊸ **Règle n°1 :** Sur l'intervalle $[1; {P_n}^x - 1]$, pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq (x-1)$:

Il existe $({P_n}^{(x-k-1)} - 1)$ multiples de ${P_n}^{(k+1)}$,

dont la répartition de chaque multiples de ${P_n}^{(k+1)}$ est régulière

puisque l'écart entre 2 de ces multiples vaut ${P_n}^{(k+1)}$.

⊸ **Règle n°2 :** il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles du type :

$[(t-1).{P_n}^x + 1; t.{P_n}^x - 1]$ pour $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$,

Et il existe des symétries entre les intervalles :

$$\left[1; \frac{{P_n}^x}{2}\right] \text{ et } \left[\frac{{P_n}^x}{2}; {P_n}^x - 1\right]$$

⊸ **Règle n°3 :** Sur l'intervalle $[1 + r; {P_n}^x + r]$, pour $r \in \mathbb{N}$:

la quantité des nombres N pouvant être multiples de P_n vaut toujours

${P_n}^{(x-1)}$ pour un écart de $({P_n}^x - 1)$ entre les 2 bornes de l'intervalle.

• **Etude :**

Notons, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$:

$$\begin{aligned}
F_p &= \prod_{h=1}^{h=({P_n}^x-1)} (N-h) \\
&= (N-1).(N-2).(N-3). \quad ... \quad .[N-({P_n}^x-1)]
\end{aligned}$$

Nous pouvons mettre en valeur essentiellement 2 cas intéressants :

Le cas où $N \neq t.{P_n}^x$ et le cas où $N = t.{P_n}^x$ (pour $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$).

• **Résolution partielle :**

Pour $N < {P_n}^x$ (à inclure dans le cas où $N \neq t.{P_n}^x$), nous avons

$$2 \leq N \leq ({P_n}^x - 1)$$

(évidemment, cette inégalité est valable pour tout P_n sauf si $P_n = 2$ et $x = 1$ où nous avons $N = P_n = 2$, donc N multiple de P_n, et donc à exclure de notre cas de toutes façons)

nous avons donc $F_p = 0$, et donc

$$\frac{F_p}{{P_n}^{F_c}} = 0 \qquad \text{(un nombre entier)}$$

Pour $N = {P_n}^x$, nous avons :

(à inclure dans le cas où $N = t.{P_n}^x$ avec $t = 1$ et $r = 0$)

nous retrouvons $Fp = ({P_n}^x - 1)!$

Donc

$$\frac{F_p}{{P_n}^{F_c}} = \frac{\varepsilon_{n,x}}{P_n} \qquad \text{(avec toutes les propriétés de } \varepsilon_{n,x} \text{ vues précédemment)}$$

Or, $\varepsilon_{n,x} = P_n.w_3 \pm 1 \qquad$ (avec w_3 un nombre entier)

Et donc

$$\frac{F_p}{{P_n}^{F_c}} = w_3 \pm \frac{1}{P_n}$$

Pour poursuivre l'étude, il nous faudra réécrire les règles que nous venons de revoir (en "*Rappels*") afin de pouvoir traiter les données.

Pour traiter le cas où $N \neq t.{P_n}^x$ et le cas où $N = t.{P_n}^x$, nous allons devoir mener la suite de l'étude sur des intervalles afin de réduire les étapes. Nous allons devoir considérer comme précédemment que :

$$N = t.{P_n}^x + r \qquad \text{pour } r \geq 0$$

D'où

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=({P_n}^x-1)} (t.{P_n}^x + r - h) \\ &= (t.{P_n}^x + r - 1).(t.{P_n}^x + r - 2). \quad \ldots \quad .[t.{P_n}^x + r - ({P_n}^x - 1)] \\ &= (t.{P_n}^x + r - 1).(t.{P_n}^x + r - 2). \quad \ldots \quad .[(t-1).{P_n}^x + r + 1] \end{aligned}$$

Où nous observons clairement que le calcul sera à traiter pour un produit de nombres entiers consécutifs appartenant à l'intervalle :

$$[(t-1).{P_n}^x + r + 1; t.{P_n}^x + r - 1] \qquad \text{dont la longueur vaut } ({P_n}^x - 2).$$

De manière simple, pour $t = 1$ et $r = 1$ (à inclure dans le cas où $N \neq t.{P_n}^x$), nous avons :

$$\begin{aligned} Fp &= ({P_n}^x).({P_n}^x - 1).({P_n}^x - 2). \quad ... \quad .(3).(2) \\ &= ({P_n}^x).({P_n}^x - 1).({P_n}^x - 2). \quad ... \quad .(3).(2).(1) \\ &= ({P_n}^x)! \end{aligned}$$

Or,

$$({P_n}^x - 1)! = {P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}.\varepsilon_{n,x} \qquad \text{(avec } \varepsilon_{n,x} \text{ non divisible par } P_n\text{)}$$

D'où

$$\begin{aligned} ({P_n}^x)! &= ({P_n}^x - 1)!.({P_n}^x) \\ &= {P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1}\right)}.\varepsilon_{n,x} \end{aligned}$$

Donc, ici

$$\begin{aligned} \frac{F_p}{{P_n}^{F_c}} &= \frac{{P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1}\right)}}{{P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x + 1\right)}}.\varepsilon_{n,x} \\ &= {P_n}^{(x-1)}.\varepsilon_{n,x} \qquad \text{(qui est un nombre entier pour } x \geq 1 \text{ et pour } r = 1\text{)} \end{aligned}$$

• **Fin de la résolution partielle, suite du raisonnement :**

Afin d'étudier les 2 cas de $N \neq t.{P_n}^x$ et de $N = t.{P_n}^x$, notons donc de manière générale :

$N = t.{P_n}^x + r$ (avec $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 0$).

afin de traiter plus rapidement ces 2 cas, constatons simplement que :

$$\begin{array}{lcll} N & = & t.{P_n}^x & \text{si r} = 0 \\ N & \neq & t.{P_n}^x & \text{si } r \text{ est restreint à l'intervalle } [1; {P_n}^x - 1] \end{array}$$

En effet, dans ce dernier cas, toutes les valeurs de N non multiples de P_n sont atteintes pour :

$t = 1$ et r varie sur l'intervalle $[1; {P_n}^x - 1]$ donc $N \in [{P_n}^x + 1; 2.{P_n}^x - 1]$

$t = 2$ et r varie sur l'intervalle $[1; {P_n}^x - 1]$ donc $N \in [2.{P_n}^x + 1; 3.{P_n}^x - 1]$

$t = 3$ et r varie sur l'intervalle $[1; {P_n}^x - 1]$ donc $N \in [3.{P_n}^x + 1; 4.{P_n}^x - 1]$

$t = 4$ et r varie sur l'intervalle $[1; {P_n}^x - 1]$ donc $N \in [4.{P_n}^x + 1; 5.{P_n}^x - 1]$

...

etc, pour chaque valeur de $t \in \mathbb{N}$, $t \geq 1$ et r variant sur $[1; {P_n}^x - 1]$, il ne manque que le cas où $2 \leq N \leq ({P_n}^x - 1)$ qui a déjà été traité au début de la "résolution partielle".

Pour $F_p = (N - 1).(N - 2).(N - 3).\quad ...\quad .[N - ({P_n}^x - 1)]$

Et $N = t.{P_n}^x + r$ (avec $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 0$),

cela revient à traiter le problème sur des intervalles de type :

$[(t - 1).{P_n}^x + r + 1; t.{P_n}^x + r - 1]$

Nous garderons les mêmes notations pour le reste de la démonstration.

• **Cas où $N = t.{P_n}^x$ (et donc $r = 0$) :**

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=({P_n}^x-1)} (t.{P_n}^x - h) \\ &= (t.{P_n}^x - 1).(t.{P_n}^x - 2). \quad ... \quad .[(t-1).{P_n}^x + 1] \end{aligned}$$

Ce qui nous ramène à une étude sur les intervalles du type :

$$[(t-1).{P_n}^x + 1; t.{P_n}^x - 1]$$

D'après la Règle n°1, dans le cas de $t = 1$, et pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq (x-1)$:

Il existe $({P_n}^{(x-k-1)} - 1)$ multiples de ${P_n}^{(k+1)}$.

Or, d'après la Règle n°2, il existe autant de multiples de P_n sur les intervalles de ce type quelquesoit t. D'après la Règle n°2, nous avons des symétries entre les intervalles :

$$\left[1; \frac{{P_n}^x}{2}\right] \text{ et } \left[\frac{{P_n}^x}{2}; P_n - 1\right]$$

Ce qui revient à écrire que nous avons des symétries aussi entre les intervalles :

$$\left[1; \frac{{P_n}^{(x+1)}}{2}\right] \text{ et } \left[\frac{{P_n}^{(x+1)}}{2}; {P_n}^{(x+1)} - 1\right]$$

d'où nous déduisons que pour $k \in \mathbb{N}$, $k \leq (x-1)$ et sur les intervalles du type :

$$[(t-1).{P_n}^{(x+1)} + 1; t.{P_n}^{(x+1)} - 1]$$

il existe $({P_n}^{(x-k-1)} - 1)$ multiples de ${P_n}^{(k+1)}$,

c'est-à-dire autant que sur l'intervalle $[1; {P_n}^x - 1]$

Or, sur cet intervalle, nous avons $t = 1$, ce qui correspond à :

$$({P_n}^x - 1)! = {P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}.\varepsilon_{n,x} \qquad (\varepsilon_{n,x} \text{ non divisible par } P_n).$$

Donc, nous avons maintenant pour tout $t \geq 1$:

$$
\begin{aligned}
F_p &= \prod_{h=1}^{h=(P_n{}^x-1)} (t.P_n{}^x - h) \\
&= P_n{}^{\left(\frac{P_n{}^x-1}{P_n-1}-x\right)}.\varepsilon_{n,x,t} \qquad \text{(avec } \varepsilon_{n,x,t} \text{ un nombre entier non divisible par } P_n\text{)}
\end{aligned}
$$

Et donc

$$
\frac{F_P}{P_n{}^{F_c}} = \frac{\varepsilon_{n,x,t}}{P_n} \qquad \text{qui est un nombre rationnel.}
$$

Sur le modèle de la fin du paragraphe "*Suite 1 de l'étute de* $(P_n{}^x - 1)!$" pour $\varepsilon_{n,x}$, nous allons réécrire $\varepsilon_{n,x,t}$ sous une autre forme.

Pour retrouver $\varepsilon_{n,x,t}$, nous éliminons tous les facteurs P_n de chaque terme multiple de P_n. Ceci nous permet d'observer des "trous" à la place des multiples de P_n dont la valeur est un "reste" non divisible par P_n. Nous obtenons donc ce qui suit (produits étalés sur plusieurs pages, et ligne par ligne avec des séparations sous forme de tirets rouges correspondants à des groupes de termes identiques pour les égalités qui vont suivre) : *(voir page suivante)*

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{n,x,t} \;=\; & [t.{P_n}^x - {P_n}^x + 1]. \quad ... \quad .[t.{P_n}^x - {P_n}^x + P_n - 1] \\
& .[t.{P_n}^x - {P_n}^x + P_n + 1]. \quad ... \quad .[t.{P_n}^x - {P_n}^x + 2P_n - 1] \\
& .[t.{P_n}^x - {P_n}^x + 2P_n + 1]. \quad ... \quad .[t.{P_n}^x - {P_n}^x + 3P_n - 1] \\
& .[t.{P_n}^x - {P_n}^x + 3P_n + 1]. \quad ... \quad .(...). \quad ... \quad .[t.{P_n}^x - 1] \\
& - \\
& .[t.{P_n}^{(x-1)} - {P_n}^{(x-1)} + 1]. \quad ... \quad .[t.{P_n}^{(x-1)} - {P_n}^{(x-1)} + P_n - 1] \\
& .[t.{P_n}^{(x-1)} - {P_n}^{(x-1)} + P_n + 1]. \quad ... \quad .[t.{P_n}^{(x-1)} - {P_n}^{(x-1)} + 2P_n - 1] \\
& .[t.{P_n}^{(x-1)} - {P_n}^{(x-1)} + 2P_n + 1]. \quad ... \quad .[t.{P_n}^{(x-1)} - {P_n}^{(x-1)} + 3P_n - 1] \\
& .[t.{P_n}^{(x-1)} - {P_n}^{(x-1)} + 3P_n + 1]. \quad ... \quad .(...). \quad ... \quad .[t.{P_n}^{(x-1)} - 1] \\
& - \\
& .[t.{P_n}^{(x-2)} - {P_n}^{(x-2)} + 1]. \quad ... \quad .[t.{P_n}^{(x-2)} - {P_n}^{(x-2)} + P_n - 1] \\
& .[t.{P_n}^{(x-2)} - {P_n}^{(x-2)} + P_n + 1]. \quad ... \quad .[t.{P_n}^{(x-2)} - {P_n}^{(x-2)} + 2P_n - 1] \\
& .[t.{P_n}^{(x-2)} - {P_n}^{(x-2)} + 2P_n + 1]. \quad ... \quad .[t.{P_n}^{(x-2)} - {P_n}^{(x-2)} + 3P_n - 1] \\
& .[t.{P_n}^{(x-2)} - {P_n}^{(x-2)} + 3P_n + 1]. \quad ... \quad .(...). \quad ... \quad .[t.{P_n}^{(x-2)} - 1] \\
& - \\
& \\
& . \quad ... \\
& \\
& - \\
& .[t.{P_n}^3 - {P_n}^3 + 1]. \quad ... \quad .[t.{P_n}^3 - {P_n}^3 + P_n - 1] \\
& .[t.{P_n}^3 - {P_n}^3 + P_n + 1]. \quad ... \quad .[t.{P_n}^3 - {P_n}^3 + 2P_n - 1] \\
& .[t.{P_n}^3 - {P_n}^3 + 2P_n + 1]. \quad ... \quad .[t.{P_n}^3 - {P_n}^3 + 3P_n - 1] \\
& .[t.{P_n}^3 - {P_n}^3 + 3P_n + 1]. \quad ... \quad .(...). \quad ... \quad .[t.{P_n}^3 - 1] \\
& - \\
& .[t.{P_n}^2 - {P_n}^2 + 1]. \quad ... \quad .[t.{P_n}^2 - {P_n}^2 + P_n - 1] \\
& .[t.{P_n}^2 - {P_n}^2 + P_n + 1]. \quad ... \quad .[t.{P_n}^2 - {P_n}^2 + 2P_n - 1] \\
& .[t.{P_n}^2 - {P_n}^2 + 2P_n + 1]. \quad ... \quad .[t.{P_n}^2 - {P_n}^2 + 3P_n - 1] \\
& .[t.{P_n}^2 - {P_n}^2 + 3P_n + 1]. \quad ... \quad .(...). \quad ... \quad .[t.{P_n}^2 - 1] \\
& - \\
& .[t.{P_n}^1 - {P_n}^1 + 1]. \quad ... \quad .[t.{P_n}^1 - {P_n}^1 + P_n - 1]
\end{aligned}
$$

Ce qui peut aussi s'écrire : *(voir page suivante)*

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{n,x,t} \quad = \quad & \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^x + 1.P_n - a] \\
& .\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^x + 2.P_n - a] \\
& .\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^x + 3.P_n - a] \\
& . \quad \ldots \\
& .\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^x + ({P_n}^{(x-1)} - 2).P_n - a] \\
& .\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^x + ({P_n}^{(x-1)} - 1).P_n - a] \\
& .\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^x + {P_n}^{(x-1)}.P_n - a] \\
& - - - - - - - - - - - \\
& .\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(x-1)} + 1.P_n - a] \\
& .\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(x-1)} + 2.P_n - a] \\
& .\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(x-1)} + 3.P_n - a] \\
& . \quad \ldots \\
& .\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(x-1)} + ({P_n}^{(x-2)} - 2).P_n - a] \\
& .\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(x-1)} + ({P_n}^{(x-2)} - 1).P_n - a] \\
& .\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(x-1)} + {P_n}^{(x-2)}.P_n - a] \\
& - - - - - - - - - - -
\end{aligned}
$$

$$\cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(x-2)} + 1.P_n - a]$$

$$\cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(x-2)} + 2.P_n - a]$$

$$\cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(x-2)} + 3.P_n - a]$$

$\cdot \quad \ldots$

$$\cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(x-2)} + ({P_n}^{(x-3)} - 2).P_n - a]$$

$$\cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(x-2)} + ({P_n}^{(x-3)} - 1).P_n - a]$$

$$\cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(x-2)} + {P_n}^{(x-3)}.P_n - a]$$

— — — — — — — — — — —

$\cdot \quad \ldots$

— — — — — — — — — — —

$$\cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{3} + 1.P_n - a]$$

$$\cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{3} + 2.P_n - a]$$

$$\cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{3} + 3.P_n - a]$$

$\cdot \quad \ldots$

$$\cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{3} + ({P_n}^{2} - 2).P_n - a]$$

$$\cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{3} + ({P_n}^{2} - 1).P_n - a]$$

$$\cdot \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{3} + {P_n}^{2}.P_n - a]$$

— — — — — — — — — — —

$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^2 + 1.P_n - a]$

$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^2 + 2.P_n - a]$

$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^2 + 3.P_n - a]$

$. \quad ...$

$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^2 + ({P_n}^1 - 2).P_n - a]$

$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^2 + ({P_n}^1 - 1).P_n - a]$

$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^2 + {P_n}^1.P_n - a]$

$- - - - - - - - - - - -$

$. \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^1 + 1.P_n - a]$

Ce qui peut encore s'écrire ainsi :

$$\varepsilon_{n,x,t} = \prod_{b=1}^{b={P_n}^{(x-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{x} + b.P_n - a]$$

$$. \prod_{b=1}^{b={P_n}^{(x-2)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(x-1)} + b.P_n - a]$$

$$. \prod_{b=1}^{b={P_n}^{(x-3)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(x-2)} + b.P_n - a]$$

$$. \quad \ldots$$

$$. \prod_{b=1}^{b={P_n}^{2}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{3} + b.P_n - a]$$

$$. \prod_{b=1}^{b={P_n}^{1}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{2} + b.P_n - a]$$

$$. \prod_{b=1}^{b={P_n}^{0}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{1} + b.P_n - a]$$

Donc, pour finir, et pour $x \geq 1$, nous avons :

$$\varepsilon_{n,x,t} = \prod_{c=1}^{c=x} \prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(c)} + b.P_n - a]$$

Implicitement : a, b, c, t et x sont des nombres entiers ≥ 1. Il nous reste à exprimer la divisibilité de $\varepsilon_{n,x,t}$ par P_n.

Comme dans la partie "*Suite 2 de l'étute de* $({P_n}^x - 1)!$" (qui servira de modèle), ici aussi, nous allons simplifier les développements pour écourter les démonstrations. C'est-à-dire que nous n'écrirons pas les développements en polynôme comme nous le devrions, mais nous allons simplifier leur écriture en factorisant les termes les plus significatifs pour résoudre notre problème.

Rappelons que nous avions noté, d'après le théorème de *WILSON* [1] :

$(P_n - 1)! = P_n.w_1 - 1$ (avec w_1 un nombre entier).

Décomposons la suite de cette étude en plusieurs sous-parties.

$*$ **<u>Sous-Partie 1 :</u>**

Etudions $$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(c)} + b.P_n - a]$$

Nous observons encore ici principalement 2 cas : Le cas où P_n est paire et le cas où P_n est impaire.

<u>*Cas de P_n paire :*</u>

Le seul cas possible étant $P_n = 2$, nous avons

$$\begin{aligned}
\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(c)} + b.P_n - a] &= \prod_{a=1}^{a=(2-1)} [(t-1).2^{(c)} + 2.b - a] \\
&= (t-1).2^{(c)} + 2.b - 1 \\
&= 2.[(t-1).2^{(c-1)} + b] - 1
\end{aligned}$$

d'où $$\left\{ \prod_{a=1}^{a=(2-1)} [(t-1).2^{(c)} + 2.b - a] \right\} + 1 = 2.[(t-1).2^{(c-1)} + b]$$

Or, nous avons construit c de sorte qu'il soit un entier ≥ 1, donc $[(t-1).2^{(c-1)} + b]$ est un nombre entier, et donc

$$\left\{ \prod_{a=1}^{a=(2-1)} [(t-1).2^{(c)} + 2.b - a] \right\} + 1$$ est divisible par le nombre premier 2.

Cas de P_n impaire :

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(c)} + b.P_n - a]$$
$$= [(t-1).{P_n}^{(c)} + b.P_n].f[(t-1).{P_n}^{(c)} + b.P_n] + (P_n-1)!$$
$$= P_n.[(t-1).{P_n}^{(c-1)} + b].f[(t-1).{P_n}^{(c)} + b.P_n] + P_n.w_1 - 1$$
$$= P_n.\Big\{[(t-1).{P_n}^{(c-1)} + b].f[(t-1).{P_n}^{(c)} + b.P_n] + w_1\Big\} - 1$$

avec $f[(t-1).{P_n}^c + b.P_n]$ un nombre entier polynômiale en fonction de P_n (dont l'écriture a été ici aussi réduite pour alléger les développements).

Donc

$$\left\{\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(c)} + b.P_n - a]\right\} + 1 \qquad \text{est divisible par } P_n \text{ impaire.}$$

Pour conclure :

Nous avons donc pour tout $P_n \in \mathbb{P}$ (c'est-à-dire pour P_n paire et impaire) :

$$\left\{\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(c)} + b.P_n - a]\right\} + 1 \qquad \text{divisible par } P_n.$$

$*$ **Sous-Partie 2 :**

Notons (pour simplifier) :

$$\Big\{[(t-1).{P_n}^{(c-1)} + b].f[(t-1).{P_n}^{(c)} + b.P_n] + w_1\Big\} = w_{4,c}$$

(avec $w_{4,c}$ un nombre entier)

Nous avons :

$$\prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(c)} + b.P_n - a] = P_n.w_{4,c} - 1$$

Etudions :

$$\prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(c)} + b.P_n - a]$$

Ici aussi, nous pouvons distinguer les cas de P_n paire et de P_n impaire.

<u>*Cas de P_n paire :*</u>

Le seul cas étant $P_n = 2$, nous avons

$$\prod_{b=1}^{b=2^{(c-1)}} \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(c)} + b.P_n - a] = \prod_{b=1}^{b=2^{(c-1)}} (2.w_{4,c} - 1)$$

Or, $2^{(c-1)}$ est un nombre impaire pour $c = 1$, et un nombre paire pour $c > 1$. En développant ce produit, nous obtenons :

Pour $c = 1$

$$\prod_{b=1}^{b=2^{(c-1)}} (2.w_{4,c} - 1) = 2.w_{4,c} - 1$$

Et pour $c > 1$

$$\begin{aligned}
\prod_{b=1}^{b=2^{(c-1)}} (2.w_{4,c} - 1) &= (2.w_{4,c}).f(2.w_{4,c}) + 1 \\
&= (2.w_{4,c}).f(2.w_{4,c}) + 2 - 1 \\
&= 2.[(w_{4,c}).f(2.w_{4,c}) + 1] - 1
\end{aligned}$$

Ce qui fera le lien avec le cas de P_n impaire (avec $f(2.w_{4,c})$ un nombre entier en fonction de 2 et de $w_{4,c}$).

Nous avons donc pour tout $c \geq 1$:

$$\left[\prod_{b=1}^{b=2^{(c-1)}} (2.w_{4,c} - 1)\right] + 1 \qquad \text{divisible par le nombre premier 2.}$$

Cas de P_n impaire :

Ce cas concerne tous les autres nombres premiers (et pour $c \geq 1$).

$$\begin{aligned}\prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c-1)}} \quad \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(c)} + b.P_n - a] &= \prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c-1)}} (P_n.w_{4,c} - 1) \\ &= P_n.(w_{4,c}).f(P_n.w_{4,c}) - 1\end{aligned}$$

(avec $f(P_n.w_{4,c})$ un nombre entier en fonction de P_n et de $w_{4,c}$)

Donc

$$\left[\prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c-1)}} (P_n.w_{4,c} - 1)\right] + 1 \qquad \text{est divisible par } P_n \text{ impaire.}$$

Pour conclure :

Nous avons donc pour tout $P_n \in \mathbb{P}$ et pour $c \geq 1$:

$$\left\{\prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c-1)}} \quad \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(c)} + b.P_n - a]\right\} + 1 \qquad \text{est divisible par } P_n.$$

$*$ **Sous-Partie 3 :**

Voici la dernière étape. Etudions ce qui suit :

$$\varepsilon_{n,x,t} = \prod_{c=1}^{c=x} \quad \prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c-1)}} \quad \prod_{a=1}^{a=(P_n-1)} [(t-1).{P_n}^{(c)} + b.P_n - a]$$

Nous avions noté

$$\prod_{b=1}^{b={P_n}^{(c-1)}} (P_n.w_{4,c} - 1) = P_n.(w_{4,c}).f(P_n.w_{4,c}) - 1$$

Toujours pour alléger la lecture, notons :

$(w_{4,c}).f(P_n.w_{4,c}) = w_{5,x}$ (avec $w_{5,x}$ un nombre entier)

Nous avons :

$$\varepsilon_{n,x,t} = \prod_{c=1}^{c=x}(P_n.w_{5,x} - 1) = P_n.(w_{5,x}).f(P_n.w_{5,x}) - 1 \qquad \text{si } x \text{ est impaire,}$$

Et

$$\varepsilon_{n,x,t} = \prod_{c=1}^{c=x}(P_n.w_{5,x} - 1) = P_n.(w_{5,x}).f(P_n.w_{5,x}) + 1 \qquad \text{si } x \text{ est paire,}$$

avec $f(P_n.w_{5,x})$ un nombre entier (en fonction de P_n et de $w_{5,x}$).

Et donc, pour tout $x \geq 1$:

$$\varepsilon_{n,x,t} = \prod_{c=1}^{c=x}(P_n.w_{5,x} - 1) = P_n.(w_{5,x}).f(P_n.w_{5,x}) + (-1)^{(x)}$$

D'où

$\varepsilon_{n,x,t} - (-1)^{(x)} = P_n.(w_{5,x}).f(P_n.w_{5,x})$

avec $[(w_{5,x}).f(P_n.w_{5,x})]$ un nombre entier.

Pour conclure :

Pour w_6 un nombre entier non fixé, pour tout $P_n \in \mathbb{P}$ et pour tout x et $t \in \mathbb{N}$, tel que $x \geq 1$ et $t \geq 1$, nous avons toujours :

$\varepsilon_{n,x,t} = P_n.w_6 + (-1)^{(x)}$

En arithmétique modulaire, cela s'écrit ainsi :

$\varepsilon_{n,x,t} - (-1)^{(x)} \equiv 0 \pmod{P_n}$

Rappelons que nous avions noté :

$$\frac{F_P}{{P_n}^{F_c}} = \frac{\varepsilon_{n,x,t}}{P_n} \qquad \text{qui est un nombre rationnel } (\varepsilon_{n,x,t} \text{ non divisible par } P_n)$$

En remplaçant $\varepsilon_{n,x,t}$ convenablement dans cette dernière expression, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{F_P}{{P_n}^{F_c}} &= \frac{P_n.w_6 + (-1)^{(x)}}{P_n} \\ &= w_6 + \frac{(-1)^{(x)}}{P_n} \end{aligned}$$

Donc, de manière générale, si x est impaire :

$$\frac{F_P}{{P_n}^{F_c}} = w_6 - \frac{1}{P_n}$$

Et si x est paire :

$$\frac{F_P}{{P_n}^{F_c}} = w_6 + \frac{1}{P_n}$$

Pour le cas où $N = t.{P_n}^x$, Nous avons donc toujours :

$$\frac{F_P}{{P_n}^{F_c}} = w_6 \pm \frac{1}{P_n}$$

Ce qui peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi.F_P}{{P_n}^{F_c}}\right) &= \sin\left[\pi.\left(w_6 \pm \frac{1}{P_n}\right)\right] \\ &= \pm\sin\left(\frac{\pi}{P_n}\right) \\ \Rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi.F_P}{{P_n}^{F_c}}\right) &= \sin^2\left(\frac{\pi}{P_n}\right) \end{aligned}$$

Et donc

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi.F_P}{{P_n}^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{P_n}\right)} = 1$$

- **<u>Cas où $N \neq t.{P_n}^x$:</u>**

Nous avions noté $N = t.{P_n}^x + r$ pour $t \geq 1$ et $r \geq 0$. Rappelons que le cas de $r = 0$ pour tout t , et celui de $r = 1$ pour $t = 1$ ont déjà été traités en début de partie "**2.2.3 Construction de la fonction F_p**" (page 100).

Et nous avions noté :

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=({P_n}^x-1)} (t.{P_n}^x + r - h) \qquad \text{pour } r \text{ variant sur } [1; {P_n}^x - 1] \\ &= (t.{P_n}^x + r - 1).(t.{P_n}^x + r - 2). \quad \ldots \quad .[(t-1).{P_n}^x + r + 1] \end{aligned}$$

Sur les intervalles de type $[(t-1).{P_n}^x + r + 1 \quad ; \quad t.{P_n}^x + r - 1]$, le nombre de multiples de P_n est variable en fonction de r. Sur ces intervalles et selon r, nous recontrerons des cas où le nombre de multiples de P_n est minimum et des cas où il est maximum. Nous allons d'abord traiter les cas où le nombre de multiples de P_n est minimum pour simplifier la suite de l'étude.

Pour r variant sur $[1; {P_n}^x - 1]$, le nombre de multiples de P_n est minimum lorsque la différence entre la borne inférieure et le premier multiple de P_n de l'intervalle, et la différence entre la borne supérieure et le dernier multiple de P_n de l'intervalle sont toutes les 2 maximums. Recherchons quand ces différences sont maximums en plusieurs sous-parties, toujours à propos du cas où $N \neq t.{P_n}^x$.

Notons d et $d' \in \mathbb{N}$,tel que $d \geq 1$ et $d' \geq 1$.

$*$ **Sous-partie pour les multiples de P_n :**

A propos des bornes des intervalles de type $[(t-1).{P_n}^x+r+1 \quad ; \quad t.{P_n}^x+r-1]$ et des différences évoquées dans les quelques lignes précédentes pour ce cas $(N \neq t.{P_n}^x)$.

Relation entre la borne inférieure et le premier multiple de P_n des intervalles de ce type :

$$(t-1).{P_n}^x + r + 1 < (t-1).{P_n}^x + d.P_n$$

Relation entre la borne supérieure et le dernier multiple de P_n des intervalles de ce type :

$$t.{P_n}^x - d'.P_n < t.{P_n}^x + r - 1$$

Or, en notant Δ_1 cette différence, nous avons la plus grande différence possible pour $\Delta_1 = P_n - 1$, puisque cette différence est le nombre entier le plus grand ne contenant pas de multiple de P_n. Nous avons :

$$\begin{array}{rrcl} & \Delta_1 & = & [(t-1).{P_n}^x + d.P_n] - [(t-1).{P_n}^x + r + 1] \\ & & = & d.P_n - r - 1 \\ & & = & P_n - 1 \\ \text{Donc} & r & = & (d-1).P_n \end{array}$$

et pour la seconde borne

$$\begin{array}{rrcl} & \Delta_1 & = & [t.{P_n}^x + r - 1] - [t.{P_n}^x - d'.P_n] \\ & & = & d'.P_n + r - 1 \\ & & = & P_n - 1 \\ \text{Donc} & r & = & (1-d').P_n \end{array}$$

Et donc

$$\begin{array}{rrcl} & r & = & (d-1).P_n \\ & & = & (1-d').P_n \\ \text{D'où} & d' & = & 2-d \end{array}$$

Finalement, si $r = (d-1).P_n$,

le premier multiple de P_n vaut $(t-1).{P_n}^x + d.P_n$

et le dernier multiple de P_n vaut $t.{P_n}^x + (d-2).P_n$

Or, le nombre de multiples de P_n se trouvant sur les intervalles de type $[(t-1).{P_n}^x + d.P_n \quad ; \quad t.{P_n}^x + (d-2).P_n]$ étant constant, il suffit de choisir $t = 1$ et $d = 1$ (par exemple) pour simplifier l'écriture, ce qui revient à dénombrer la quantité de ces multiples sur l'intervalle :

$[P_n \quad ; \quad P_n.({P_n}^{(x-1)} - 1)]$

Et donc le nombre de multiples de P_n vaut $({P_n}^{(x-1)} - 1)$, dont ${P_n}^x$ est un multiple appartenant à ces intervalles car pour r variant sur $[1; {P_n}^x - 1]$ dans les intervalles de type $[(t-1).{P_n}^x + r + 1 \quad ; \quad t.{P_n}^x + r - 1]$, nous avons :

$$(t-1).{P_n}^x + r + 1 \leq t.{P_n}^x \leq t.{P_n}^x + r - 1$$

En effet, puisque pour $r = 1$, l'inégalité devient :

$$(t-1).{P_n}^x + 2 \leq t.{P_n}^x \leq t.{P_n}^x$$

Et pour $r = {P_n}^x - 1$, l'inégalité devient :

$$t.{P_n}^x \leq t.{P_n}^x \leq (t+1).{P_n}^x - 2$$

$*$ **Sous-partie pour les multiples de ${P_n}^2$:**

Même raisonnement que précédemment appliqué aux multiples de ${P_n}^2$.

$$(t-1).{P_n}^x + r + 1 < (t-1).{P_n}^x + d.{P_n}^2$$

Et

$$t.{P_n}^x - d'.{P_n}^2 < t.{P_n}^x + r - 1$$

Or, $\Delta_2 = {P_n}^2 - 1$ ne contient pas de multiple de ${P_n}^2$ et est la plus grande différence possible. Nous avons :

$$\begin{array}{rrcl} & \Delta_2 & = & [(t-1).{P_n}^x + d.{P_n}^2] - [(t-1).{P_n}^x + r + 1] \\ & & = & d.{P_n}^2 - r - 1 \\ & & = & {P_n}^2 - 1 \\ \text{Donc} & r & = & (d-1).{P_n}^2 \end{array}$$

Et

$$\begin{array}{rrcl} & \Delta_2 & = & [t.{P_n}^x + r - 1] - [t.{P_n}^x - d'.{P_n}^2] \\ & & = & d'.{P_n}^2 + r - 1 \\ & & = & {P_n}^2 - 1 \\ \text{Donc} & r & = & (1-d').{P_n}^2 \end{array}$$

Et donc

$$\begin{array}{rrcl} & r & = & (d-1).{P_n}^2 \\ & & = & (1-d').{P_n}^2 \\ \text{D'où} & d' & = & 2-d \end{array}$$

Finalement, si $r = (d-1).{P_n}^2$,

le premier multiple de P_n vaut $(t-1).{P_n}^x + d.{P_n}^2$

et le dernier multiple de P_n vaut $t.{P_n}^x + (d-2).{P_n}^2$

Or, le nombre de multiples de ${P_n}^2$ se trouvant sur les intervalles de type $[(t-1).{P_n}^x + d.{P_n}^2 \quad ; \quad t.{P_n}^x + (d-2).{P_n}^2]$ étant constant, il suffit de choisir $t = 1$ et $d = 1$ (par exemple) pour simplifier l'écriture, ce qui revient à dénombrer la quantité de ces multiples sur l'intervalle :

$[{P_n}^2 \quad ; \quad {P_n}^2.({P_n}^{(x-2)} - 1)]$

Et donc le nombre de multiples de ${P_n}^2$ vaut $({P_n}^{(x-2)} - 1)$, dont ${P_n}^x$ fait partie (pour les mêmes raisons que la Sous-partie précédente concernant les multiples de P_n).

...

(même raisonnement pour les multiples des puissances de P_n intermermédiaires)

...

$*$ **<u>Sous-partie pour les multiples de ${P_n}^{(x-1)}$:</u>**

Même raisonnement que précédemment appliqué aux multiples de ${P_n}^{(x-1)}$.

$$(t-1).{P_n}^x + r + 1 < (t-1).{P_n}^x + d.{P_n}^{(x-1)}$$

Et

$$t.{P_n}^x - d'.{P_n}^{(x-1)} < t.{P_n}^x + r - 1$$

Or, $\Delta_{(x-1)} = {P_n}^{(x-1)} - 1$ ne contient pas de multiple de ${P_n}^{(x-1)}$ et est la plus grande différence possible. Nous avons :

$$\begin{array}{rrcl} & \Delta_{(x-1)} & = & [(t-1).{P_n}^x + d.{P_n}^{(x-1)}] - [(t-1).{P_n}^x + r + 1] \\ & & = & d.{P_n}^{(x-1)} - r - 1 \\ & & = & {P_n}^{(x-1)} - 1 \\ \text{Donc} & r & = & (d-1).{P_n}^{(x-1)} \end{array}$$

Et

$$\begin{array}{rrcl} & \Delta_{(x-1)} & = & [t.{P_n}^x + r - 1] - [t.{P_n}^x - d'.{P_n}^{(x-1)}] \\ & & = & d'.{P_n}^{(x-1)} + r - 1 \\ & & = & {P_n}^{(x-1)} - 1 \\ \text{Donc} & r & = & (1-d').{P_n}^{(x-1)} \end{array}$$

Et donc

$$\begin{array}{rrcl} & r & = & (d-1).{P_n}^{(x-1)} \\ & & = & (1-d').{P_n}^{(x-1)} \\ \text{D'où} & d' & = & 2 - d \end{array}$$

Finalement, si $r = (d-1).{P_n}^{(x-1)}$,

le premier multiple de P_n vaut $(t-1).{P_n}^x + d.{P_n}^{(x-1)}$

et le dernier multiple de P_n vaut $t.{P_n}^x + (d-2).{P_n}^{(x-1)}$

Or, le nombre de multiples de ${P_n}^{(x-1)}$ se trouvant sur les intervalles de type $[(t-1).{P_n}^x + d.{P_n}^{(x-1)} \quad ; \quad t.{P_n}^x + (d-2).{P_n}^{(x-1)}]$ étant constant, il suffit de choisir $t = 1$ et $d = 1$ (par exemple) pour simplifier l'écriture, ce qui revient à dénombrer la quantité de ces multiples sur l'intervalle :

$[{P_n}^{(x-1)} \quad ; \quad {P_n}^{(x-1)}.(P_n - 1)]$

Et donc le nombre de multiples de ${P_n}^{(x-1)}$ vaut $(P_n - 1)$, dont ${P_n}^x$ fait partie (pour les mêmes raisons que la Sous-partie précédente concernant les multiples de P_n).

$*$ **Sous-partie pour les multiples de $P_n{}^x$:**

Nous avons déjà vu que pour r variant sur $[1; P_n{}^x - 1]$ dans les intervalles de type $[(t-1).P_n{}^x + r + 1 \quad ; \quad t.P_n{}^x + r - 1]$, nous avons :

$$(t-1).P_n{}^x + r + 1 \leq t.P_n{}^x \leq t.P_n{}^x + r - 1$$

En effet, si $r = 1$:

$$(t-1).P_n{}^x + 2 \leq t.P_n{}^x \leq t.P_n{}^x$$

Et si $r = P_n{}^x - 1$:

$$t.P_n{}^x \leq t.P_n{}^x \leq (t+1).P_n{}^x - 2$$

Et donc $t.P_n{}^x$ se situe toujours dans les intervalles de type :

$[(t-1).P_n{}^x + r + 1 \quad ; \quad t.P_n{}^x + r - 1]$

$*$ **Synthèse :**

Pour $N = t.{P_n}^x + r$ et r variant sur l'intervalle $[1; {P_n}^x - 1]$, sur les intervalles de type $[(t-1).{P_n}^x + r + 1 \quad ; \quad t.{P_n}^x + r - 1]$:

nous avons donc 1 seul multiple de ${P_n}^x$;

Et pour $k \in \mathbb{N}$ sur l'intervalle $[1; x-1]$:

au moins $({P_n}^{(x-k)} - 1)$ multiples de ${P_n}^k$, dont ${P_n}^x$ fait partie.

(l'intervalle peut même être étendu à $k \in [0; x-1]$ car l'ensemble reste cohérent, même si $k = 0$ ne présente a priori pas d'intérêt).

Nous pouvons donc regrouper chacun de ces nombres minimum de multiples des puissance de P_n à partir de ce que nous venons de voir (en notant E un nombre entier non divisible par P_n) :

$$\begin{aligned}
F_p &= \prod_{h=1}^{h=({P_n}^x - 1)} (t.{P_n}^x + r - h) \\
&= {P_n}^{({P_n}^{(x-1)}-1)}.{P_n}^{({P_n}^{(x-2)}-1)}. \quad ... \quad .{P_n}^{({P_n}^2-1)}.{P_n}^{(P_n-1)}.{P_n}^{(1)}.E \\
&= {P_n}^{[{P_n}^{(x-1)}-1+{P_n}^{(x-2)}-1+ \quad ... \quad +{P_n}^2-1+P_n-1+1]}.E \\
&= {P_n}^{[{P_n}^{(x-1)}+{P_n}^{(x-2)}+ \quad ... \quad +{P_n}^2+P_n-(x-1)+1]}.E \\
&= {P_n}^{[{P_n}^{(x-1)}+{P_n}^{(x-2)}+ \quad ... \quad +{P_n}^2+P_n+1-(x-1)]}.E
\end{aligned}$$

Or,

$${P_n}^{(x-1)} + {P_n}^{(x-2)} + \quad ... \quad + {P_n}^2 + P_n + 1 = \frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1}$$

Donc, dans notre cas :

$$\begin{aligned}
F_p &= {P_n}^{\left[\frac{{P_n}^x-1}{P_n-1}-(x-1)\right]}.E \\
&= {P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x-1}{P_n-1}-x+1\right)}.E
\end{aligned}$$

Et comme nous avons :

$$P_n{}^{F_c} = P_n{}^{\left(\frac{P_n{}^x - 1}{P_n - 1} - x + 1\right)}$$

Nous pouvons effectuer

$$\frac{F_p}{P_n{}^{F_c}} = E$$

$\dfrac{F_p}{P_n{}^{F_c}}$ est donc toujours un nombre entier pour $x \geq 1$, nous avons donc ici :

$$\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{P_n{}^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{P_n}\right)} = 0$$

REMARQUE IMPORTANTE :

Le fait d'avoir chercher à regrouper ces nombres minimum de multiples des puissance de P_n dans la formule de F_p nous permet d'abréger ici l'étude les concernant. En effet, les autres cas de r faisant intervenir un nombre plus important de multiples des puissance de P_n dans la formule de F_p, nous aurons forcément :

$$\frac{F_p}{P_n{}^{F_c}} = E'$$

c'est-à-dire un nombre entier E' divisible par une puissance de P_n, une puissance obligatoirement ≥ 1.

Et donc, nous retrouvons ici aussi :

$$\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{P_n{}^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{P_n}\right)} = 0$$

Ce qui permet de conclure de manière générale à propos du cas où $N \neq t.{P_n}^x$ ainsi :

$$\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{{P_n}^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{P_n}\right)} = 0$$

Conclusion et synthèse :

$$\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{{P_n}^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{P_n}\right)} = 1 \text{ si } N \text{ est un multiple de } {P_n}^x.$$

$$\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{{P_n}^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{P_n}\right)} = 0 \text{ si } N \text{ n'est pas un multiple de } {P_n}^x.$$

2.2.4 Supposons Pn non connu (construction de Fp, suite)

Supposons que nous ne connaissions pas les nombres premiers P_n. Comme $P_n \in \mathbb{P}$, remplaçons P_n dans la formule de F_p par une autre variable M, définie telle que $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$. Nous verrons pourquoi $M \geq 2$ en cours d'étude. Reprenons brièvement les points essentiels des études précédentes en se concentrant uniquement sur les cas où M n'est pas un nombre premier (car les cas où $M = P_n$ ont tous été traité dans les études précédentes).

Nous avions noté :

$$
\begin{aligned}
F_p &= \prod_{h=1}^{h=({P_n}^x-1)} (N-h) \\
&= (N-1).(N-2). \quad ... \quad .(N-{P_n}^x+2).(N-{P_n}^x+1) \\
&= {P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x-1}{P_n-1}-x\right)}.\varepsilon_{n,x,t} \quad \text{(avec } \varepsilon_{n,x,t} \text{ un nombre entier non divisible par } P_n\text{)}
\end{aligned}
$$

Et

$$
{P_n}^{F_c} = {P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x-1}{P_n-1}-x+1\right)}
$$

En remplaçant P_n par M nous obtenons :

$$
F_p = \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)
$$

Et

$$
M^{F_c} = M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}
$$

Et donc $\dfrac{F_p}{{P_n}^{F_c}}$ devient $\dfrac{F_p}{M^{F_c}}$, pour finalement obtenir :

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = \frac{\prod\limits_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}}$$

A partir de cette égalité, reprenons l'étude en 3 nouvelles sous-parties.

• <u>**Etude :**</u>

$*$ <u>**Sous-Partie 1 :**</u>

$1 < N < M^x$

C'est un cas simple . En effet, nous avons ici :

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h) \\ &= (N-1).(N-2).....(N-M^x+2).(N-M^x+1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc ici

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = 0$$

Et donc (la formule suivante implique que $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$)

$$\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{M^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)} = 0$$

∗ **Sous-Partie 2 :**

$N = M^x$

C'est aussi un cas simple . En effet, puisque nous retrouvons ici :

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h) \\ &= \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (M^x-h) \\ &= (M^x-1)! \end{aligned}$$

dont la démonstration a déjà été faite, rappelons donc que nous avions :

$$\varepsilon_{M,x} = \frac{(M^x-1)!}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}}$$

avec $\varepsilon_{M,x}$ un nombre entier pour tout M étant un nombre entier et n'étant pas un nombre premier, sauf pour le seul cas de $M = 4$ et $x = 1$.

Donc, ici

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = \varepsilon_{M,x} \qquad (\varepsilon_{M,x} \text{ entier sauf pour le seul cas de } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

Et donc (la formule suivante implique que $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$)

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi.F_p}{M^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} = 0 \qquad (\text{sauf pour } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

Nous pourrons corriger cela en donnant une formule valable pour tous les cas (et donc pour $M = 4$ et $x = 1$ inclus). Nous chercherons alors une formule qui soit nulle pour ce seul cas (ou au moins pour les multiples de 4) et qui prenne pour valeur 1 sinon (ou au moins lorsque $M = P_n$), ceci afin de ne pas perturber le fonctionnement général de la formule finale. Nous donnerons une étude plus détaillée de la cette fonction de correction “ A ” plus loin dans le paragraphe le signalant.

$*$ **Sous-Partie 3 :**

$N > M^x$

C'es le cas le moins simple. Raisonnement :

$$\begin{aligned} F_p &= \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h) \\ &= (N-1).(N-2).....(N-M^x+2).(N-M^x+1) \end{aligned}$$

Remarquons que dans ce cas il existe une différence non nulle entre N et M^x, notons cette différence Λ telle que :

$\Lambda = N - M^x$ (et donc non nulle, c'est-à-dire $\Lambda \geq 1$)

D'où

$N = M^x + \Lambda$

Donc

$$\begin{aligned} F_p &= (N-1).(N-2). \quad ... \quad .(N-M^x+2).(N-M^x+1) \\ &= (N-1).(N-2). \quad ... \quad .(\Lambda+2).(\Lambda+1) \\ &= [(N-1).(N-2). \quad ... \quad .(\Lambda+2).(\Lambda+1)].\frac{\Lambda!}{\Lambda!} \\ &= \frac{(N-1)!}{\Lambda!} \\ &= \frac{(M^x+\Lambda-1)!}{\Lambda!} \\ &= \frac{[(M^x+\Lambda-1).(M^x+\Lambda-2). \quad ... \quad .(M^x+1).(M^x)] \quad . \quad [(M^x-1)!]}{\Lambda!} \\ &= [(M^x-1)!] \quad . \quad \frac{[(M^x+\Lambda-1).(M^x+\Lambda-2). \quad ... \quad .(M^x+1).(M^x)]}{\Lambda!} \\ &= (M^x-1)!.\frac{\left[\displaystyle\prod_{\Lambda'=0}^{\Lambda'=(\Lambda-1)} (M^x+\Lambda')\right]}{\Lambda!} \end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\left[\displaystyle\prod_{\Lambda'=0}^{\Lambda'=(\Lambda-1)} (M^x + \Lambda')\right]}{\Lambda!}$ est toujours un nombre entier.

Explications :

Notons $G = \displaystyle\prod_{\Lambda'=0}^{\Lambda'=(\Lambda-1)} (M^x + \Lambda')$

Donc

$$\frac{G}{\Lambda!} = \frac{\left[\displaystyle\prod_{\Lambda'=0}^{\Lambda'=(\Lambda-1)} (M^x + \Lambda')\right]}{\Lambda!}$$

Si $\Lambda = 1$, alors $G = M^x$ divisible par $(\Lambda!) = 1! = 1$. Et donc $\dfrac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

Si $\Lambda = 2$, alors $G = (M^x).(M^x + 1)$ divisible par $(\Lambda!) = 2!$ puisque sur 2 nombre entiers consécutifs, au moins l'un des 2 est divisible par 2 (et forcément l'autre est divisible par 1). Et donc $\dfrac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

Si $\Lambda = 3$, alors $G = (M^x).(M^x + 1).(M^x + 2)$ divisible par $(\Lambda!) = 3!$ puisque sur 3 nombre entiers consécutifs, au moins l'un des 3 est divisible par 3, et au moins un autre est divisible par 2. Et donc $\dfrac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

Si $\Lambda = 4$, alors $G = (M^x).(M^x+1).(M^x+2).(M^x+3)$ divisible par $(\Lambda!) = 4!$ puisque sur 4 nombres entiers consécutifs, au moins l'un des 4 est divisible par 4, au moins un des 4 est divisible par 3, et au moins un autre est divisible par 2. Et donc $\dfrac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

Si $\Lambda = 5$, alors $G = (M^x).(M^x + 1).(M^x + 2).(M^x + 3).(M^x + 4)$ divisible par $(\Lambda!) = 5!$ puisque sur 5 nombres entiers consécutifs, au moins l'un des 5 est divisible par 5, au moins un des 5 est divisible par 4, au moins un des 5 est divisible par 3, et au moins un autre est divisible par 2. Et donc $\dfrac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

...

(nous pouvons poursuivre ce raisonnement à l'infini pour chaque valeur de Λ)

...

Pour $\Lambda \geq 1$, nous avons $G = (M^x).(M^x+1). \quad ... \quad .(M^x+\Lambda-2).(M^x+\Lambda-1)$ divisible par $(\Lambda!)$ puisque sur Λ nombres entiers consécutifs, au moins l'un des Λ nombres est divisible par Λ, au moins un des Λ nombres est divisible par $(\Lambda - 1)$, au moins un des Λ nombres est divisible par $(\Lambda - 2)$, ... , au moins un des Λ nombres est divisible par 3 et au moins un autre parmi ces Λ nombres est divisible par 2 (et forcément l'ensemble de ces Λ nombres est divisible par 1). Et donc $\dfrac{G}{\Lambda!}$ est un nombre entier.

En notant $\dfrac{G}{\Lambda!} = G'$ un nombre entier quelquesoit $\Lambda \geq 1$, nous avons donc maintenant :

$$\begin{aligned} F_p &= (M^x-1)!.\frac{\left[\displaystyle\prod_{\Lambda'=0}^{\Lambda'=(\Lambda-1)} (M^x+\Lambda')\right]}{\Lambda!} \\ &= (M^x-1)!.G' \end{aligned}$$

En rappelant que

$$\begin{aligned} (M^x-1)! &= M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}.\varepsilon_{M,x} \\ &= M^{F_c}.\varepsilon_{M,x} \end{aligned}$$

Nous déduisons

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = G'.\varepsilon_{M,x} \qquad (\varepsilon_{M,x} \text{ entier sauf pour le seul cas de } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

Et donc (la formule suivante implique que $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$)

$$\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{M^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)} = 0 \qquad (\text{sauf pour } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

∗ **Synthèse de ces 3 sous-parties :**

Nous avons donc pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ avec tout $M \notin \mathbb{P}$ et quelquesoit $N \geq 1$:

$$\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{M^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)} = 0 \qquad \text{(sauf pour } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

• **Conclusion et synthèse :**

Nous avons pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ tel que $M \notin \mathbb{P}$ et quelquesoit $N \geq 1$:

$$\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{M^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)} = 0 \qquad \text{(sauf pour } M = 4 \text{ et } x = 1)$$

Et nous avons pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ tel que $M \in \mathbb{P}$ (c'est-à-dire finalement pour $M = P_n$) :

$$\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{M^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)} = 1 \qquad \text{si } N \text{ est un multiple de } {P_n}^x = M^x.$$

$$\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{M^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)} = 0 \qquad \text{si } N \text{ n'est pas multiple de } M^x.$$

• **Construction de la "fonction" de Correction " A " :**

Nous voulons obtenir une "fonction" de correction " A " pour le cas où $M = 4$ et $x = 1$ telle que :

pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$

$$A.\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{M^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)} = 0$$

et pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$

$$A.\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{M^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)} = 1$$

Nous voulons donc

$A = 0$ si $M = 4$ et $x = 1$ (ou si "M est multiple de 4" est aussi acceptable)
$A = 1$ sinon (ce qui inclu les cas où $M = P_n$)

En effet, en partant de :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{M,x} &= \frac{F_p}{M^{F_c}} \\ &= \frac{(M^x - 1)!}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1} - x + 1\right)}} \end{aligned}$$

(avec $\varepsilon_{M,x}$ un nombre entier si $M \notin \mathbb{P}$ sauf dans le cas de $M = 4$ et $x = 1$)

pour $N = M^x$, lorsque $M = 4$ et $x = 1$, nous obtenions :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{M,x} &= \frac{(4-1)!}{4} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Dans ce cas seulement, $\varepsilon_{M,x}$ est rationnel alors que $M \notin \mathbb{P}$.

Etudions maintenant ce qui suit :

$$\frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4} = \frac{M^3 - 6.M^2 + 11.M - 6}{4}$$

Si M est un multiple de 4, notons $M = 4.t'$ avec $t' \in \mathbb{N}$, $t' \geq 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4} &= \frac{(4t'-1).(4t'-2).(4t'-3)}{4} \\
&= \frac{(4t')^3 - 6.(4t')^2 + 11.(4t') - 6}{4} \\
&= 16.(t')^3 - 24.(t')^2 + 11.(t') - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Or, $[16.(t')^3 - 24.(t')^2 + 11.(t')]$ est un nombre entier pour $t' \in \mathbb{N}$, $t' \geq 0$.

Donc

$$\begin{aligned}
\sin^2\left[\frac{\pi.(M-1).(M-2).(M-3)}{4}\right] &= \sin^2\left[\frac{\pi.(4t'-1).(4t'-2).(4t'-3)}{4}\right] \\
&= \sin^2\left\{\pi.\left[16.(t')^3 - 24.(t')^2 + 11.(t') - \frac{3}{2}\right]\right\} \\
&= \sin^2\left(\frac{3.\pi}{2}\right) \\
&= 1 \qquad \text{si } M \text{ est un multiple de 4.}
\end{aligned}$$

Si M n'est pas un multiple de 4, notons $M = 4t' + r'$ avec $t' \in \mathbb{N}$, $t' \geq 0$ et $r' \in \mathbb{N}$, nous pouvons restreindre r' à l'intervalle $[1;3]$ (en effet, toutes les valeurs non multiple de 4 sont présente avec $r' \in [1;3]$ et pour chaque valeur de t'), nous avons :

$$\begin{aligned}
& \frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4} \\
= \; & \frac{(4t'+r'-1).(4t'+r'-2).(4t'+r'-3)}{4} \\
= \; & \frac{(4t'+r')^3 - 6.(4t'+r')^2 + 11.(4t'+r') - 6}{4} \\
= \; & \frac{64.(t')^3 + 52.(t')^2.r' + 12.t'.(r')^3 + (r')^3 - 96.(t')^2 - 48.t'.r' - 6.(r')^2 + 44.t' + 11.r' - 6}{4} \\
= \; & 16.(t')^3 + 13.(t')^2.r' + 3.t'.(r')^2 - 24.(t')^2 - 12.t'.r' + 11.t' + \frac{(r')^3 - 6.(r')^2 + 11.r' - 6}{4} \\
= \; & 16.(t')^3 + 13.(t')^2.r' + 3.t'.(r')^2 - 24.(t')^2 - 12.t'.r' + 11.t' + \frac{(r'-1).(r'-2).(r'-3)}{4}
\end{aligned}$$

Or, pour la partie suivante de cette dernière formule :

$[16.(t')^3+13.(t')^2.r'+3.t'.(r')^2-24.(t')^2-12.t'.r'+11.t']$ vaut un nombre entier

Et de plus, nous avons :

$\dfrac{(r'-1).(r'-2).(r'-3)}{4} = 0$ pour $r' \in \mathbb{N}$ et restreint à l'intervalle $[1;3]$

Donc

$$\begin{aligned}
\sin^2\left[\pi.\frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4}\right] &= \sin^2\left[\pi.\frac{(4t'+r'-1).(4t'+r'-2).(4t'+r'-3)}{4}\right] \\
&= 0 \qquad \text{si } M \text{ n'est pas un multiple de 4.}
\end{aligned}$$

Pour faire la synthèse, nous avons donc :

$$\sin^2\left[\pi.\frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4}\right] = 1 \text{ si } M \text{ est multiple de } 4,$$
$$\sin^2\left[\pi.\frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4}\right] = 0 \text{ si } M \text{ n'est pas multiple de } 4.$$

Or, nous sommes en train de rechercher une fonction qui est exactement complémentaire à celle-ci puisque nous voulons :

$A = 0$ si M est multiple de 4
$A = 1$ si M n'est pas multiple de 4

Nous avons donc simplement :

$$\begin{aligned} A &= 1 - \sin^2\left[\pi.\frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4}\right] \\ &= \cos^2\left[\pi.\frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4}\right] \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de généraliser :

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$:

$$\cos^2\left[\pi.\frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4}\right].\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{M^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)} = 0$$

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est un multiple de M^x :

$$\cos^2\left[\pi.\frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4}\right].\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{M^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)} = 1$$

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N n'est pas un multiple de M^x :

$$\cos^2\left[\pi.\frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4}\right].\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{M^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)} = 0$$

2.2.5 Construction de la fonction α_M

Toutes ces données vont nous permettre de construire une mécanique pour les puissances des nombres premiers. En effet, pour simplifier les données principales, notons :

$$f(M;x) = \cos^2\left[\pi.\frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4}\right].\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{M^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)}$$

Et notons à nouveau ces généralisations précédentes, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$:

$f(M;x) = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x.

$f(M;x) = 0$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x.

$f(M;x) = 0$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$.

Ceci signifie encore que :

$M^{f(M;x)} = M$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x.

$M^{f(M;x)} = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x.

$M^{f(M;x)} = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$.

Poursuivons avec le cas le plus intéressant pour la suite de l'étude, c'est-à-dire avec le cas où :

$f(M;x) = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x.

Dissociation de variables :

Afin de dissocier un nombre N d'un nombre M^x, nous allons devoir adopter d'autres variables : α_M et g. En effet, nous devons adopter une notation pour N qui le distingue du reste de la formule recherchée. Notons :

$N = g.M^{(\alpha_M)}$ avec $g \in \mathbb{N}$, $g \geq 1$ et $\alpha_M \in \mathbb{N}$.

Ainsi, N peut représenter tous les nombres entiers supérieur ou égale à 1 ($N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$). Effectivement :

- si N est multiple de $M^{(\alpha_M)}$, le coefficient multiplicateur est représenté par g.

- si N n'est pas multiple de $M^{(\alpha_M)}$, alors $\alpha_M = 0$ et donc $N = g$.

En réalité, cette écriture va nous permettre de dissocier α_M et x, afin de constater que le nombre $N = g.M^{(\alpha_M)}$ étant donné et fixé, N est multiple de M^x si $x \leq \alpha_M$, mais aussi N est multiple de M élevé à toutes les puissances inférieures à x ($x \in \mathbb{N}$, $x \geq 1$).

Nous avons donc

N est multiple de M (pour $x = 1$),
N est multiple de M^2 (pour $x = 2$),
N est multiple de M^3 (pour $x = 3$),
...
Jusqu'au cas où N est multiple de M^x (pour $x = \alpha_M$),

N n'est plus multiple de M^x dès que $x > \alpha_M$.

Tout ceci signifie que dans tous ces cas :

$f(M; 1) = 1$ (pour $x = 1$)
$f(M; 2) = 1$ (pour $x = 2$)
$f(M; 3) = 1$ (pour $x = 3$)
...
Jusqu'à $f(M; \alpha_M) = 1$ (pour $x = \alpha_M$)

Et $f(M; x) = 0$ pour $x > \alpha_M$.

Ce qui nous permet de retrouver la puissance α_M puisque nous avons :

$$\begin{aligned} f(M;1) + f(M;2) + f(M;3) + ... + f(M;\alpha_M) &= \sum_{x=1}^{x=\alpha_M} (1) \\ &= \alpha_M \end{aligned}$$

Ce qui peut encore être écrit :

$\alpha_M = f(M;1) + f(M;2) + ... + f(M;\alpha_M) + f(M;\alpha_M+1) + f(M;\alpha_M+2) + ...$

puisque dès que $x > \alpha_M$ et jusqu'à l'infini (pour x), nous avons $f(M;x) = 0$.

Donc

$$\begin{aligned} \alpha_M &= \sum_{x=1}^{x=\alpha_M} (1) \\ &= \sum_{x=1}^{x\to+\infty} f(M;x) \end{aligned}$$

Or, $f(M;x)$ est connue car elle a déjà été formulée. Nous avons finalement une formule de "mécanique des puissances" pour les nombres premiers.

Pour tout nombre $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$, nous pouvons déduire α_M la puissance maximum de M (lorsque M est un nombre premier) qui le compose. Ainsi :

$$N = g.M^{(\alpha_M)} \qquad \text{avec} \qquad \alpha_M = \sum_{x=1}^{x\to+\infty} f(M;x)$$

Pour retrouver tous les nombres premiers qui compose N (par exemple en notant q_1 , q_2 , q_3 , q_4 , ... , q_n des nombres premiers quelconques mais distincts les uns des autres et en supposant que N soit composé du produit de ces nombres), il suffit alors de faire varier M sur l'ensemble des nombres premiers (ainsi, M prend forcément pour valeur q_1 , puis q_2 , puis q_3 , puis q_4 , ... , puis q_n) , ce qui permettrait d'obtenir par exemple :

$$N = {q_1}^{(\alpha_{q_1})}.{q_2}^{(\alpha_{q_2})}.{q_3}^{(\alpha_{q_3})}.{q_4}^{(\alpha_{q_4})}. \quad ... \quad .{q_n}^{(\alpha_{q_n})}.$$

Concentrons nous maintenant sur les cas suivant, rappelons que :

Si N n'est pas multiples d'un de ces nombres premiers (d'après l'exemple précédent : q_1 , q_2 , q_3 , q_4 , ... , q_n), alors $f(M;x) = 0$

donc, dans ce cas,

$$\begin{aligned} \alpha_M &= \sum_{x=1}^{x \to +\infty} f(M;x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc $M^{(\alpha_M)} = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N n'est pas un multiple de M^x.

Et rappelons d'autre part que :

$f(M;x) = 0$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$.

Donc, dans ces 2 derniers cas,

$$\begin{aligned} \alpha_M &= \sum_{x=1}^{x \to +\infty} f(M;x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et donc $M^{(\alpha_M)} = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$.

Or, dans un produit, 1 est l'élément neutre. Ce qui va nous permettre de construire une formule "plus générale" sur la décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs de nombres premiers. En tenant compte de toutes ces données, nous pouvons alors conclure finalement :

$$N = \prod_{M=2}^{M \to +\infty} M^{\alpha_M}$$

Nous pouvons borner ce produit par 2 pour la borne inférieure puisqu'il s'agit également de la borne inférieure pour le domaine de définition de M (nous avons $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$). Compte tenu qu'il n'est pas nécessaire de faire varier M jusqu'à l'infini puisque N ne peut pas être composé de facteur premier qui soit supérieur à lui-même. Au maximum, si N est lui-même un nombre premier, nous pouvons faire varier M jusqu'au plus grand nombre premier possible, c'est-à-dire jusqu'à N lui-même. ce qui impose alors de restreindre le domaine de définition de N à celui de M, c'est-à-dire pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Et si nous voulons faire apparaître tous les travaux de l'étude en une seule formule, nous pouvons mettre en facteur les formules de "fonction coefficient correcteur" Cc et de "fonction élimination du défaut" A (lorsque $M = 4$ et $x = 1$) que l'on retrouve dans chaque formule de $f(M;x)$.

Pour $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$, nous pouvons alors noter :

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M=N} M^{\left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}.\prod_{v=1}^{v=3}(M-v)\right)}{\sin^2(\pi/M)}.\sum_{x=1}^{x\to+\infty}\sin^2\left(\frac{\pi.\prod_{h=1}^{h=(M^x-1)}(N-h)}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}}\right)\right]}$$

Ce que je me suis efforcé de démontrer (attention, il s'agit bien de crochets dans ces formules, et non des symboles des "valeurs absolues" , ni de ceux des "parties entières" : ils ont donc la même fonction que de simples parenthèses, ils contiennent α_M, c'est-à-dire la puissance de M). Ceci servira de synthèse générale de la démonstration de l'étude sur la factorisation d'un nombre entier en produits de facteurs premiers. Notons simplement ce processus de "décomposition" (ou de factorisation d'un nombre entier en produit de facteurs premiers) $D(N)$, et appelons cette formule $D(N)$ la "Décomposée" de N telle que :

$$\begin{aligned} N &= D(N) \\ &= \prod_{M=2}^{M\to+\infty} M^{\alpha_M} \\ &= \prod_{M=2}^{M=N} M^{\alpha_M} \end{aligned}$$

Il existe donc une règle permettant la décomposition d'un nombre entier supérieur ou égale à 2 en produit de facteurs premiers. Nous pouvons maintenant considérer que le tableau de référence $T.R.1$ (voir le début de la partie "**1 Factorisation et mécanique des puissances**" page 21), dont le nombre de colonnes est infini et dont le nombre de lignes est également infini, peut être donné par la formule $D(N)$ pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$.

Remarque 1 :

Lorsque nous notons que nous devons avoir $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, il faut comprendre que tout nombre N est décomposable en produit de facteurs premiers seulement si N est supérieur ou égale à 2. En d'autres termes, les nombres 0 et 1 (les seuls entiers positifs à être inférieurs à 2) ne sont pas décomposables de manière explicite en produit de facteurs premiers, la formule de décomposition $D(N)$ ne peut logiquement pas les concerner.

Autrement dit, la raison pour laquelle les nombres entiers 0 et 1 ne peuvent pas être concernés par cette formule est que cette formule ne traite que la propriété de "primalité" de chaque nombre entier consécutif (par le produit des $(N - h)$), et pour tout $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, l'entier N ne peut être que premier ou composé (ce qui n'est pas le cas des nombre 0 et 1).

Remarque 2 :

A l'aide des congruences, le lien entre la fonction *SINUS* et le cercle doit pouvoir permettre une interprétation géométrique équivalente.

Remarque 3 :

Il existe une formule "plus générale" de $D(N)$ dont la démonstration et la formule qui en résulte sont données en partie "**3.8.6 Formule f(M;x), puissance et divisibilité : Formule $D(N)$ généralisée**" (page 225).

2.3 Théorème de décomposition d'un nombre entier N en produit de facteurs premiers

D'après les démonstrations effectuées précédemment à propos de la formule $D(N)$ de décomposition d'un nombre entier N en produit de facteurs premiers, pour $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$, la formule $D(N)$ étant donnée par :

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M=N} M^{\left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}.\prod_{v=1}^{v=3}(M-v)\right)}{\sin^2(\pi/M)} . \sum_{x=1}^{x \to +\infty} \sin^2\left(\frac{\pi . \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}} \right) \right]}$$

- Soit N le nombre d'éléments d'un ensemble.
- Soit un ***ensemble fondamental*** un ensemble dont le nombre d'éléments contenu est $N \in \mathbb{P}$.
- Soit un ***ensemble composé*** un ensemble dont le nombre d'éléments contenu est $N \notin \mathbb{P}$.

Le domaine de définition de $D(N)$ étant $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$, si nous voulons diviser un ensemble composé de N éléments en sous-ensembles fondamentaux, nous devons concevoir :

- qu'il existe une unité de mesure indivisible (évidemment la valeur 1),
- que les éléments (qui permettent de former un ensemble) soient indivisibles,
- qu'il existe une limite minimum pour un sous-ensemble fondamental (ce minimum étant $N = 2$ éléments),
- qu'il n'existe pas de limite maximum pour un sous-ensemble fondamental (sinon, cela sous-entendrait qu'il existe un nombre premier maximum, ce qui est faux),
- que nos mesures à propos du nombre d'éléments (formant un ensemble) ne puissent être que discontinues (correspondant au domaine de définition des nombres entiers $\mathbb{N}$).

3

Formules courtes

Certaines lettres qui vont être utlisées seront les mêmes que précédemment, mais elles n'auront pas de lien entre elles (exemple pour les variables comme a, comme b, comme m, comme B ou comme X ...). Nous préciserons ce changement par une redéfinition des variables concernées.

3.1 Formule simplifiée s(M)

- D'après les démonstrations déjà effectuées, nous pouvons construire une formule légèrement différente et plus simple. Par exemple, la formule de α_n nous permet de connaître la divisibilité de N par un nombre premier P_n, ce qui nous amène à connaître $D(N)$. D'une autre manière, nous pouvons savoir par une formule plus "courte" si un nombre entier est premier ou non (c'est-à-dire si $N = P_n$ ou pas). Cette formule courte (ou encore "Simplifiée" de $f(M;x)$) permettra simplement de savoir si le nombre N est divisible ou non par un nombre premier P_n, son expression est basée sur celle de $\alpha_{n,1}$ mais sans certains termes non utiles à cette fin, elle est plus légère que α_n. Quelques rappels de ce que nous avions noté :

$$\alpha_n = A.Cc. \sum_{x=1}^{x=R_n} \sin^2 \left(\frac{\pi.F_p}{{P_n}^{F_c}} \right)$$

* Avec $F_p = \prod_{h=1}^{h=({P_n}^x-1)} (N-h)$

* Avec $F_c = \dfrac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x + 1$

* Avec $Cc = \dfrac{1}{\sin^2(\pi/P_n)}$

* Avec $A = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}.\prod_{v=1}^{v=3}(P_n - v)\right)$

* Avec R_n la fonction de Restriction permettant de limiter les calculs aux nombres premiers $P_n \leq N$.

Il suffit de ramener cette étude à celle de $x = 1$ (et donc à celle de $\alpha_{n,1}$) :

$$S(N) = \frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}.\displaystyle\prod_{v=1}^{v=3}(P_n - v)\right)}{\sin^2(\pi/P_n)}.\sin^2\left(\frac{\pi}{P_n}.\prod_{h=1}^{h=(P_n-1)}(N-h)\right)$$

(Cette formule nous permet de savoir si N est multiple de P_n)

Ou encore, si nous désirons remplacer P_n par M comme dans la partie précédente (ce qui sous-entend que P_n n'est pas connu) :

$$S(N) = \frac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}.\displaystyle\prod_{v=1}^{v=3}(M - v)\right)}{\sin^2(\pi/M)}.\sin^2\left(\frac{\pi}{M}.\prod_{h=1}^{h=(M-1)}(N-h)\right)$$

- Rappelons également que nous avions noté :

$$\alpha_M = \sum_{x=1}^{x\to\to+\infty} f(M;x)$$

Avec

$$f(M;x) = \cos^2\left[\pi.\frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4}\right].\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{M^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)}$$

Poursuivons le raisonnement de simplification par une remarque utile : dans le cas particulier où $N = M$ (et $x = 1$), nous saurons directement si N (ou M) est premier ou pas.

Dans le cas où $N = M$ (et $x = 1$), nous avons :

$$\prod_{h=1}^{h=M-1} (N-h) = (M-1)!$$

Dans le cas particulier de $N = M$ et $x = 1$, la formule $f(M;x)$ est simplifiée. Notons $s(M)$ cette formule simplifiée de $f(M;x)$ dans le cas particulier de $N = M$ et $x = 1$. Par la suite, nous appellerons la formule $s(M)$ "la simplifiée de variable M". Nous obtenons alors :

$$S(M) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}.\prod_{v=1}^{v=3}(M-v)\right).\frac{\sin^2\left((M-1)!.\dfrac{\pi}{M}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)}$$

Ainsi,

$s(M) = 1$ si $M \in \mathbb{P}$ (la réciproque est vraie)
$s(M) = 0$ si $M \notin \mathbb{P}$ (la réciproque est vraie)

Et $s(M)$ est définie pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$.

Le complément de $s(M)$ vaut $1 - s(M)$, notons le comme ceci :

$$\overline{s(M)} = 1 - s(M)$$

Remarque 1 :

Nous voyons donc que $s(M)$, la simplifiée de variable M, n'est qu'un cas particulier de la fonction α_M. En effet, la fonction $s(M)$ n'est autre que la fonction α_M dans le cas où $M = N$ et $x = 1$.

Remarque 2 :

La fonction $s(M)$ ne possédant que 2 "états", c'est-à-dire 0 ou 1, et étant donné qu'élever à la puissance m (pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$) ces 2 nombres revient à effectuer une "opération neutre", on peut donc conclure que :

$$s(M)^m = s(M)$$

Remarque 3 :

La fonction primorielle P_n (qui est le produit de tous les nombres premiers jusqu'à $P_n \in \mathbb{P}$) s'écrit :

$$\#P_n = \prod_{M=2}^{M=P_n} (M^{s(M)})$$

Ou encore :

$$\#P_n = \prod_{M=2}^{M=P_n} [1 + (M-1).s(M)]$$

Complément de réflexion :

Nous allons ici faire porter nos observations sur les nombres entiers consécutifs et leur "propriété de primalité" (c'est-à-dire que chacun de ces nombres entiers supérieur ou égale à 2 ne peut être que premier ou composé). Notons $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $D \in \mathbb{N}$, et prenons en considération le produit suivant :

$$\prod_{E=0}^{E=D} s(M+E)$$

En faisant varier D sur $\mathbb{N}$, nous observons que cette formule peut être exprimée principalement par 3 cas :

* Le cas où $D = 0$:

$$\prod_{E=0}^{E=D} s(M+E) = s(M)$$

* Le cas où $D = 1$:

$$\prod_{E=0}^{E=D} s(M+E) = s(M).s(M+1)$$

Or, les nombres premiers 2 et 3 étant les seuls nombres entiers consécutifs, il ne peut exister qu'un seul cas pour lequel $s(M).s(M+1)$ vaut 1. Nous avons donc :

Si $M = 2$ (ce qui permet $M + 1 = 3$),
alors $s(M).s(M + 1) = 1$

Si$M \geq 3$ (lorsque M est premier, $M + 1$ ne l'est pas et inversement),
alors $s(M).s(M + 1) = 0$

* Le cas où $D \geq 2$:

$$\prod_{E=0}^{E=D} s(M+E) = s(M).s(M+1).\prod_{E=2}^{E=D} s(M+E) = 0$$

Comme cela implique un produit d'au moins 3 formules simplifiées dont chaque variable est M, $M+1$ et $M+2$ (c'est-à-dire au moins 3 nombres entiers consécutifs), et comme il n'existe pas plus de 2 nombres entiers consécutifs qui soient premiers, ce produit ne peut valoir que 0.

De manière équivalente, nous pouvons établir d'autres égalités à partir des ces remarques à propos de la propriété de primalité des nombres entiers consécutifs.

D'après le complément de $s(M)$, nous avons :

$1 - s(M) = 0 \qquad$ si $M \in \mathbb{P}$
$1 - s(M) = 1 \qquad$ si $M \notin \mathbb{P}$

Evidemment, nous pouvons alors noter, pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et pour $D \in \mathbb{N}$, $N \geq 4$:

$$\prod_{M=2}^{M=D} s(M) = \prod_{M=2}^{M=D} [1 - s(M)] = 0$$

Ou encore :

$$\prod_{M=2}^{M \geq 4} s(M) = \prod_{M=2}^{M \geq 4} [1 - s(M)] = 0$$

3.2 Formule d'identité I(M)

Nous pouvons construire une formule "d'identité" $I(M)$ aux nombres premiers, une formule qui vaut ce nombre premier lorsque $M \in \mathbb{P}$:

$$I(M) = M.s(M)$$

Ainsi,

$$\begin{array}{ll} I(M) = M & \text{si } M \in \mathbb{P} \\ I(M) = 0 & \text{si } M \notin \mathbb{P} \end{array}$$

donc

$$P_n = P_n.s(P_n)$$

3.3 Formule de comptage C(M)

Nous pouvons aussi construire une formule de "comptage" $C(M)$ des nombres premiers sur un intervalle, c'est-à-dire entre un nombre entier $N_1 \geq 2$ et un autre $N_2 \geq 2$, tel que $N_2 \geq N_1$, puisque $s(M) = 1$ pour chaque valeur de M étant un nombre premier. Notons :

$$\mathrm{C}_{N_1}^{N_2}(M) = \sum_{M=N_1}^{M=N_2} s(M)$$

3.4 Formule d'Impulsion Première $\mathfrak{I}(M)$

Partant du constat qu'il n'existe que deux nombres premiers qui soient des entiers consécutifs (il s'agit de 2 et de 3), nous pouvons construire une nouvelle formule que nous appelerons Impulsion Première de variable M (impulsion à cause de la forme de son graphique) basée sur cette propriété.

Partant de la formule de $s(M)$, si nous apportons des modifications dans ses parenthèse (en substituant la variable M à une modification), nous pouvons élaborer une formule différente mais qui reste vraie.

La formule $s(M)$ définie pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ est une formule qui vaut :

$s(M) = 1$ si $M \in \mathbb{P}$ (la réciproque est vraie)
$s(M) = 0$ si $M \notin \mathbb{P}$ (la réciproque est vraie)

La formule $s(2.M)$ définie pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$ est une formule qui vaut :

$s(2.M) = 1$ si $M = 1$ (la réciproque est vraie)
$s(2.M) = 0$ si $M > 1$ (la réciproque est vraie)

Nous pouvons modifier cette formule de manière à ce qu'elle soit définie pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$ en effectuant un "décalage" (de M vers $M + 1$) :

$s(2.M + 2) = 1$ si $M = 0$ (la réciproque est vraie)
$s(2.M + 2) = 0$ si $M > 0$ (la réciproque est vraie)

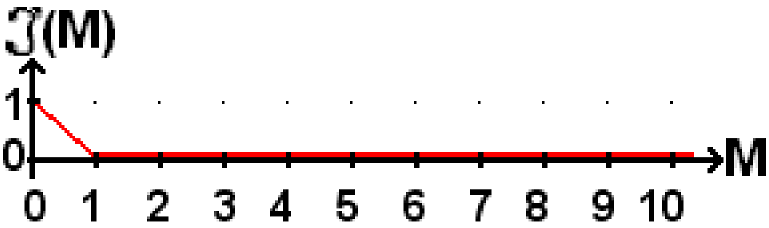
Notons $\mathfrak{I}(M)$ la fonction d'Impulsion Première de M telle que :

$$\mathfrak{I}(M) = s(2.M + 2)$$

Nous avons donc

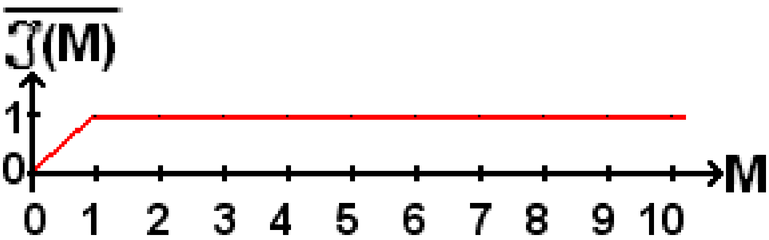
$\mathfrak{I}(M) = 1$ si $M = 0$ (la réciproque est vraie)
$\mathfrak{I}(M) = 0$ si $M > 0$ (la réciproque est vraie)

Graphiques :



Avec son complément (une fonction "carrée") :

$$\overline{\mathfrak{I}(M)} = 1 - \mathfrak{I}(M)$$



Remarque 1 :

Comme pour la fonction $s(M)$, la fonction Impulsion Première de variable M ne possède que 2 états. Donc, pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$:

$$\mathfrak{I}(M)^m = \mathfrak{I}(M)$$

nous pouvons même étendre le domaine de définition de m jusqu'à $m = 0$ si et seulement si $\mathfrak{I}(M) = 1$.

De plus :

$$\mathfrak{I}(M) = \mathfrak{I}(M^a) \qquad \text{pour tout } M \in \mathbb{N},\ M \geq 0 \text{ et pour tout } a \in \mathbb{N},\ a \geq 1.$$

On peut étendre le domaine de définition de M aux entiers négatifs pour les puissances de M paires. Ce qui peut encore être noté :

$\mathfrak{I}(M^{2a})$ est définie pour tout $M \in \mathbb{Z}$ et pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$.

Remarque 2 :

Nous pouvons jouer sur les propriétés des nombres paires ou impaires lorsqu'on les multiplie entre eux ou lorsqu'on les additionne pour obtenir d'autres formules intéressantes :

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M) &= s(2.M+2)\\ &= s[M+2+s(M+2)]\\ \ldots\end{aligned}$$

En effet, grâce aux propriétés des nombres paires et grâce au fait que $M = 2$ soit le seul nombre premier paire, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M) &= s(2.M+2)\\ &= s(4.M+2)\\ &= s(6.M+2)\\ &= s(8.M+2)\\ \ldots\\ &= s(2.d.M+2) \qquad (\text{avec } d \in \mathbb{N},\ d \geq 0)\end{aligned}$$

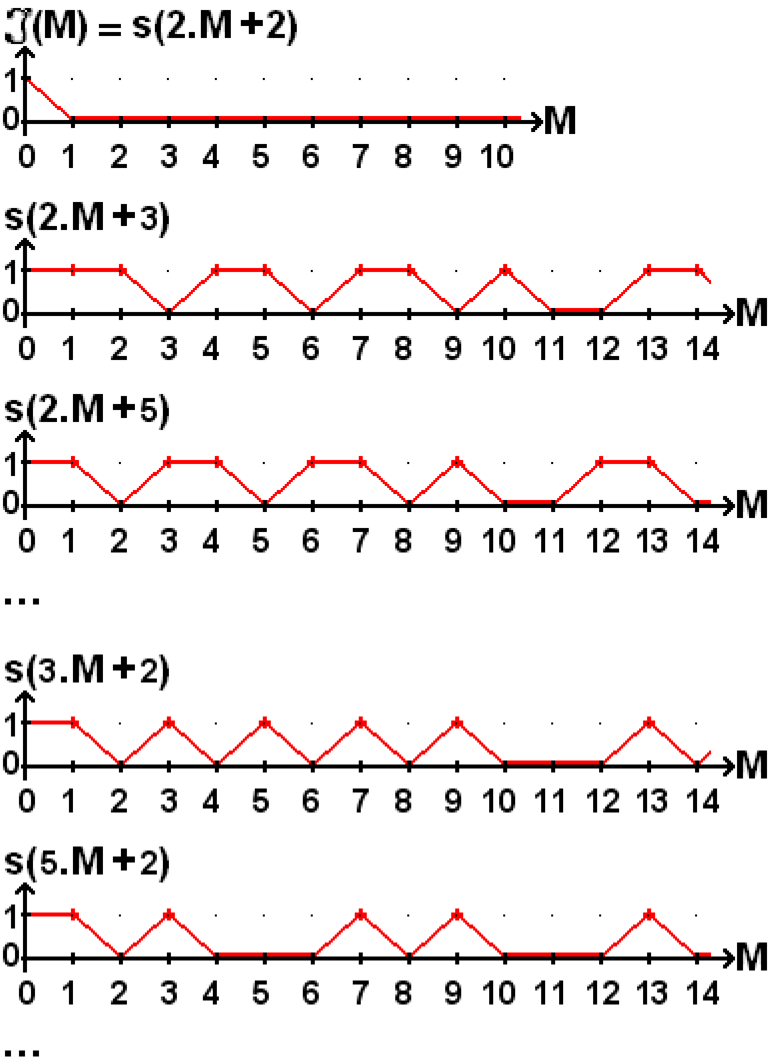
Et donc

$$\mathfrak{I}(M) = \mathfrak{I}(2.M) = \mathfrak{I}(4.M) = \mathfrak{I}(6.M) = \mathfrak{I}(8.M) = \ldots = \mathfrak{I}(2.d.M)$$

dont chaque graphique correspondant est le même que celui de $\mathfrak{I}(M)$. Remarque identique concernant les multiples de nombres premiers notés ainsi :

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}(M) &= s(2.M+2)\\ &= s(3.M+3)\\ &= s(5.M+5)\\ &= s(7.M+7)\\ &= s(11.M+11)\\ \ldots\\ &= s(P_n.M+P_n) \qquad (\text{avec } P_n \in \mathbb{P})\\ \ldots\\ &= s(P_n.d.M+P_n)\\ &= s[P_n.(d.M+1)]\end{aligned}$$

Ce qui ne serait plus le cas si nous changions quelque peu les paramètres dans les parenthèses. En effet, voici quelques exemples de graphiques avec des fonctions sensiblement différentes :



Où l'on observe comme des “raies spectrales” (rappelons que les segments entre chaque point ne représente pas une continuité, ils sont tracés seulement pour aider à la lecture des graphiques).

Remarque 3 :

Comme nous avions établi (dans le paragraphe concernant la formule $s(M)$) que nous avions :

$s(M).s(M+1) = 1$ si $M = 2$
$s(M).s(M+1) = 0$ si $M \geq 3$

Nous sommes en mesure de donner une nouvelle égalité grâce aux remarques précédentes pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$:

$$s(M).s(M+1) = s(2.M-2)$$

Ou encore, en effectuant un décalage (de M vers $M+2$), afin que les formules simplifiées soient définies pour une variable M telle que $M \in \mathbb{N}$:

$$s(2.M+2) = s(M+2).s(M+3)$$

Et comme :

$$\mathfrak{I}(M) = s(2.M+2)$$

Nous avons donc aussi (en reprenant $P_n \in \mathbb{P}$ et $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 0$) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(M) &= s(2.M+2) \\ &= s[Pn.(d.M+1)] \\ &= s(M+2).s(M+3) \end{aligned}$$

Remarque 4 :

Etant donné les égalités suivantes :

$\mathfrak{I}(M) = 1 \qquad \text{si } M = 0$
$\mathfrak{I}(M) = 0 \qquad \text{si } M \in \mathbb{N},\ M \geq 1$

Donc

$\mathfrak{I}(M) - 1 = 0 \qquad \text{si } M = 0$
$\mathfrak{I}(M) - 1 = -1 \qquad \text{si } M \in \mathbb{N},\ M \geq 1$

Mais également

$1 - \mathfrak{I}(M) = 0 \qquad \text{si } M = 0$
$1 - \mathfrak{I}(M) = 1 \qquad \text{si } M \in \mathbb{N},\ M \geq 1$

D'où

$\mathfrak{I}(M) - 1 = 1 - \mathfrak{I}(M) = 0 \qquad \text{si } M = 0$

Et donc

$\mathfrak{I}(M).[\mathfrak{I}(M) - 1] = 0 \qquad \text{si } M = 0$
$\mathfrak{I}(M).[\mathfrak{I}(M) - 1] = 0 \qquad \text{si } M \in \mathbb{N},\ M \geq 1$

Mais également

$\mathfrak{I}(M).[1 - \mathfrak{I}(M)] = 0 \qquad \text{si } M = 0$
$\mathfrak{I}(M).[1 - \mathfrak{I}(M)] = 0 \qquad \text{si } M \in \mathbb{N},\ M \geq 1$

Finalement, nous avons donc toujours :

$\mathfrak{I}(M).[1 - \mathfrak{I}(M)] = 0$
$\mathfrak{I}(M).[\mathfrak{I}(M) - 1] = 0$

Ce qui nous laisse un choix entre 2 possiblilités d'écrire cette égalité.

Ceci permet d'établir une autre égalité :

$$\mathfrak{I}(M).[1-\mathfrak{I}(M)] = \mathfrak{I}(M).[\mathfrak{I}(M)-1] = 0$$

D'où

$$\frac{\mathfrak{I}(M)}{[\mathfrak{I}(M)-1]} = \frac{\mathfrak{I}(M)}{[1-\mathfrak{I}(M)]}$$

D'où nous déduisons :

$$\frac{1}{1-\frac{1}{\mathfrak{I}(M)}} = \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{I}(M)}-1}$$

Ce qui nous donne 2 possibilités d'écriture symétriques. Cette formule sera intéressante pour la suite (voir formule d'Impulsion Seconde $\mathfrak{I}_2(M)$).

Remarque 5 :

- De plus, il est encore possible de construire "l'Impusion Première de la simplifiée de variable M", que l'on notera $\mathfrak{I}[s(M)]$, où nous avons :

$\mathfrak{I}[s(M)] = 0$ si $s(M) = 1$
$\mathfrak{I}[s(M)] = 1$ si $s(M) = 0$

Ce qui correspond au "complément" de $s(M)$, et donc :

$$\mathfrak{I}[s(M)] = 1 - s(M)$$

- De même, il est possible de construire "l'Impusion Première de l'Impulsion Première de variable M" aussi, que l'on notera $\mathfrak{I}[\mathfrak{I}(M)]$, où nous avons :

$\mathfrak{I}[\mathfrak{I}(M)] = 0$ si $\mathfrak{I}(M) = 1$
$\mathfrak{I}[\mathfrak{I}(M)] = 1$ si $\mathfrak{I}(M) = 0$

Ce qui correspond au "complément" de $\mathfrak{I}(M)$, et donc :

$$\mathfrak{I}[\mathfrak{I}(M)] = 1 - \mathfrak{I}(M)$$

- Et de manière générale, pour toutes variables B (ou formules) ne pouvant prendre que des valeurs “binaires” (0 ou 1), nous avons :

$\mathfrak{I}(B) = 0 \qquad$ si $B = 1$
$\mathfrak{I}(B) = 1 \qquad$ si $B = 0$

Ce qui correspond au “complément” de B, et donc :

$$\mathfrak{I}(B) = 1 - B$$

Remarque 6 :

Cette formule $\mathfrak{I}(M)$ sera utile pour la recherche d'une formule de restriction R_n (voir la suite des travaux), mais son utilité apparaîtra encore dans le **Chapitre II** et dans le **Chapitre III (Répartition exacte de nombre premiers)**.

3.5 Formule d'Impulsion Seconde $\mathfrak{I}_2(M)$

Partant de la formule $\mathfrak{I}(M)$, nous constatons aisément que lorsque nous la multiplions par un nombre quelconque, le résultat est ce même nombre pour $M = 0$ et le résultat est 0 pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$.

Ainsi, si nous désirons construire une formule qui tend vers $+\infty$ pour $M = 0$ et qui vaut 0 partout ailleurs (c'est-à-dire pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$), il nous suffit de multiplier $\mathfrak{I}(M)$ par une fonction qui tend vers $+\infty$ pour $M = 0$ et qui vaut un nombre quelconque partout ailleurs (c'est-à-dire qui est définie pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$).

Les fonctions qui peuvent convenir pour cette fonction recherchée peuvent être par exemple :

$$\frac{1}{M}\ ;\ \frac{1}{M^2}\ ;\ \frac{1}{M^3}\ ;\ \ldots\ ;\ \frac{1}{M^m} \qquad (\text{avec } m \in \mathbb{N},\ m \geq 1)$$

(et, de manière générale, pour tout polynôme de variable M qui s'annulle pour $M = 0$ et qui est défini pour $M \geq 1$, l'inverse de ce polynôme)

et encore :

$$-lnM$$

...

et aussi :

$$\frac{1}{[1 - \mathfrak{I}(M)]}$$

Ainsi, nous pouvons construire la formule d'Impulsion Seconde $\mathfrak{I}_2(M)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_2(M) &= \frac{\mathfrak{I}(M)}{M} = \frac{\mathfrak{I}(M)}{M^2} = \ldots \\ \mathfrak{I}_2(M) &= -\mathfrak{I}(M).lnM = \mathfrak{I}(M).ln\left(\frac{1}{M}\right) \end{aligned}$$

et aussi :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{I}_2(M) &= \frac{\mathfrak{I}(M)}{[1-\mathfrak{I}(M)]} \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{\mathfrak{I}(M)}}
\end{aligned}$$

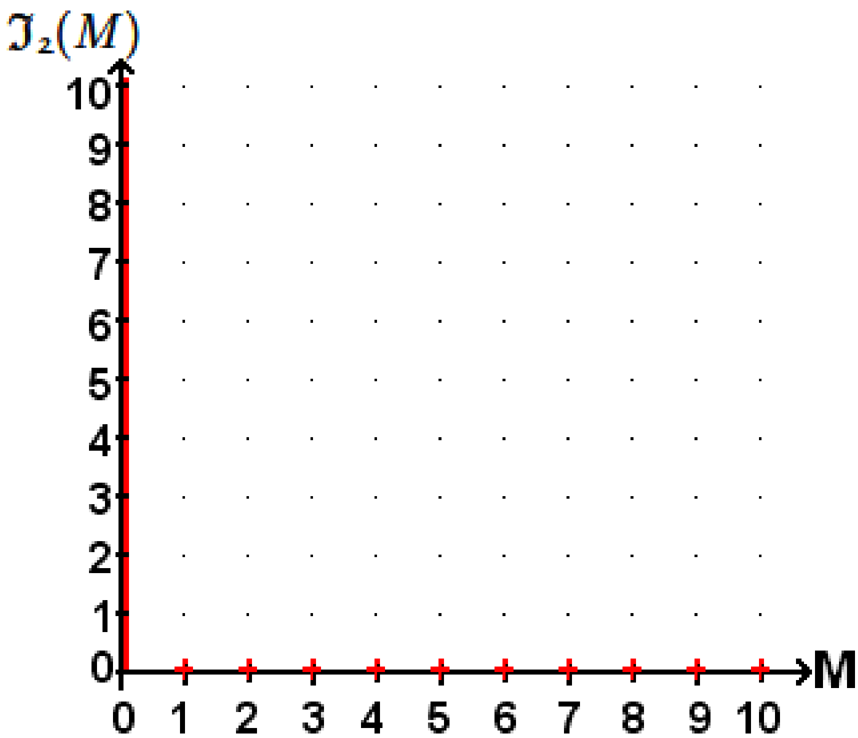
La formule $\mathfrak{I}_2(M)$ est donc définie pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$. Le passage à la limite est nécessaire lorsque M tend vers 0 :

$\mathfrak{I}_2(M) = 0 \qquad$ pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 1$

$\lim\limits_{M \to 0} \mathfrak{I}_2(M) = +\infty$

La formule $\mathfrak{I}_2(M)$ est donc équivalente à la fonction δ de *DIRAC* [2] si l'on considère que le domaine de définition de M peut être étendu à $M \in \mathbb{N}$.

Représentation graphique (tracée en rouge) :



La représentation graphique de $\mathfrak{I}_2(M)$ peut être assimilée au demi-axe des abcisses (les valeurs des *entiers* positifs) et au demi-axe des ordonnées (les valeurs des *réels* positifs).

Ici aussi nous pouvons construire la fonction complémentaire à $\mathfrak{I}_2(M)$, que nous noterons ainsi :

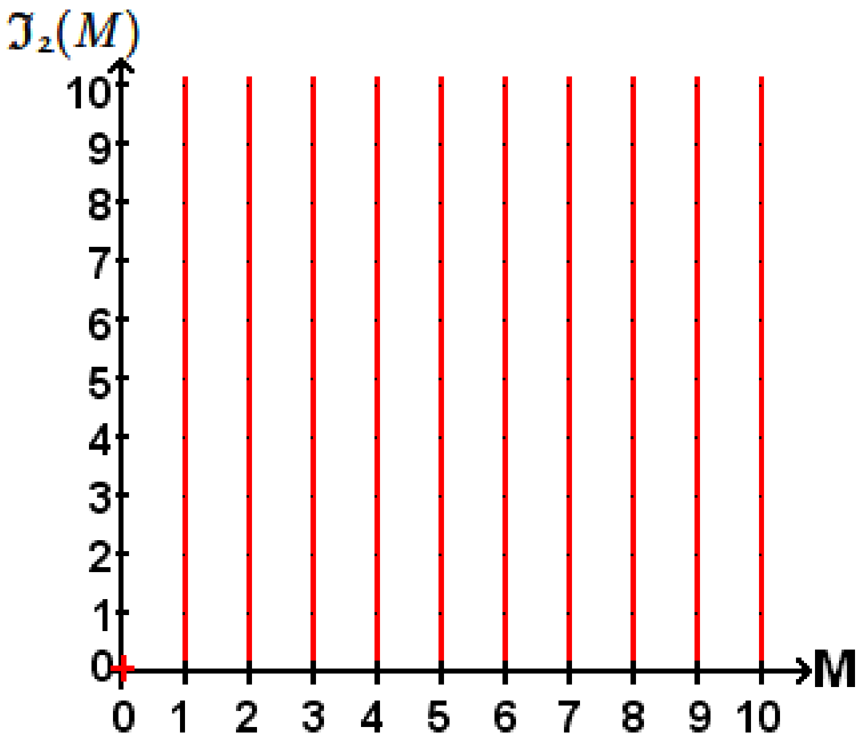
$$\overline{\mathfrak{I}_2(M)} = \frac{1}{\mathfrak{I}_2(M)}$$

Nous voyons bien qu'une représentation graphique serait difficile car cette fonction complémentaire vaudrait :

$$\overline{\mathfrak{I}_2(M)} = 0 \qquad \text{pour } M = 0,$$

$$\lim_{M \to L} \overline{\mathfrak{I}_2(M)} = +\infty \qquad \text{pour } L \in \mathbb{N},\ L \geq 1$$

Donnons une idée approximative seulement grâce à ce graphique (tracé en rouge) :



Remarque 1 :

Rappelons que que les dérivées de δ de *DIRAC* [2] apparaissent dans la transfor-mation de Fourier des polynômes. Rappelons également que la fonction δ de *DIRAC* est utile à l'analyse harmonique. Ceci implique qu'il doit exister aussi un lien (mais seulement pour $M \in \mathbb{N}$) entre les nombres entiers associés à la fonction $\mathfrak{I}_2(M)$, certains types de polynômes (certains cas doivent pouvoir être généralisés, notamment par la mise en évidence des racines de ces polynômes par factorisation) et des cas particuliers correspondant en analyse harmonique.

Remarque 2 :

Comme nous l'avons vu dans la partie concernant la formule simplifiée $s(M)$, il existe une symétrie intéressante dans l'écriture de cette formule puisque nous avons :

$$\mathfrak{I}_2(M) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{I}(M)}}$$

Et de manière équivalente :

$$\mathfrak{I}_2(M) = \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{I}(M)} - 1}$$

En effet :

$$\lim_{\mathfrak{I}(M)\to 1} \quad \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{I}(M)} - 1} = \lim_{\mathfrak{I}(M)\to 1} \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{I}(M)}} = +\infty$$

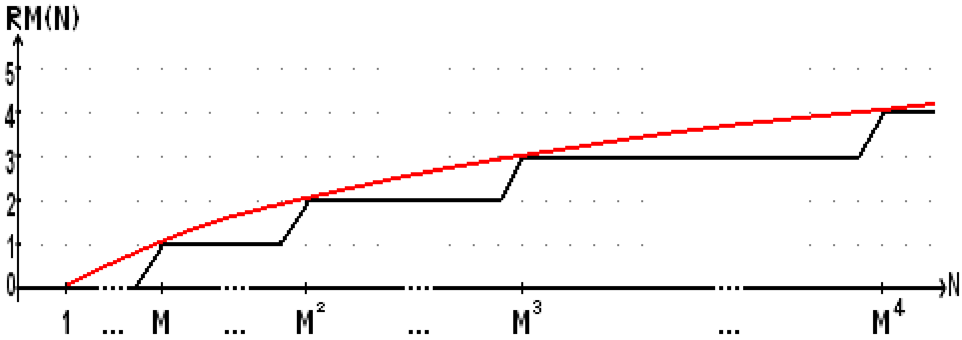
Et

$$\lim_{\mathfrak{I}(M)\to 0} \quad \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{I}(M)} - 1} = \lim_{\mathfrak{I}(M)\to 0} \quad \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{I}(M)}} = +\infty$$

3.6 Formule de restriction RM(N)

Grâce aux propriétés de la fonction $\mathfrak{I}(X)$ (la fonction Impulsion Première de variable X), nous pouvons établir de nouvelles égalités et construire ainsi de nouvelles fonctions utiles, comme nous le verrons d'ailleurs plus en détail dans le **Chapitre II**.

Dans la première partie, nous recherchions une fonction de Restriction R_n (que nous ramènerons à $RM(N)$) définie ainsi :



Or, nous connaissons les propriétés de $\mathfrak{I}(X)$ pour $X \in \mathbb{N}$:

$\mathfrak{I}(X) = 1 \qquad$ si $X = 0$
$\mathfrak{I}(X) = 0 \qquad$ si $X > 0$

Et son complément :

$$\overline{\mathfrak{I}(X)} = 1 - \mathfrak{I}(X)$$

Si nous remplaçons X par un polynôme qui peut s'annuller aux valeurs qui nous intéressent, nous pourrons construire $RM(N)$. En effet, pour des polynômes de variable N ne donnant pour résultats que des valeurs entières positives, l'Impulsion Première de ce polynôme vaut 1 lorsqu'il s'annule et vaut 0 sinon. Ainsi, nous pouvons orienter nos recherches et construire la fonction Impulsion Première d'un polynôme telle que :

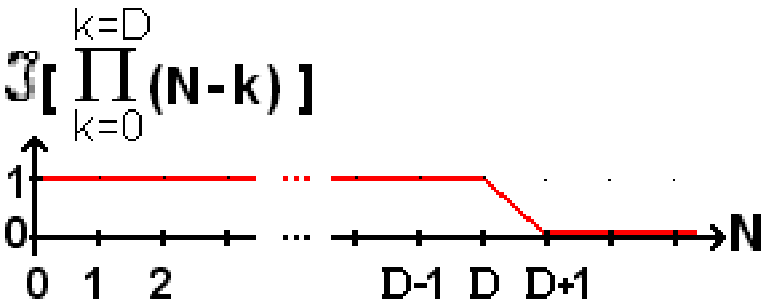
$$\mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=D}(N-k)\right] \qquad \text{avec } D \in \mathbb{N}$$

dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$\Im\left[\prod_{k=0}^{k=D}(N-k)\right]=1 \qquad \text{pour } 0\leq N\leq D$$

$$\Im\left[\prod_{k=0}^{k=D}(N-k)\right]=0 \qquad \text{pour } N>D$$

et dont la représentation graphique est celle-ci :



La fonction "complémentaire" correspondante est équivalente à :

$$1-\Im\left[\prod_{k=0}^{k=D}(N-k)\right] \qquad \text{avec } D\in\mathbb{N}$$

où nous avons :

$$1-\Im\left[\prod_{k=0}^{k=D}(N-k)\right]=0 \qquad \text{pour } 0\leq N\leq D$$

$$1-\Im\left[\prod_{k=0}^{k=D}(N-k)\right]=1 \qquad \text{pour } N>D$$

D'ailleurs, la fonction d'Implusion n'étant définie que pour des valeurs entières positives, en élevant $(N-k)$ au carré, nous pouvons même ajouter que :

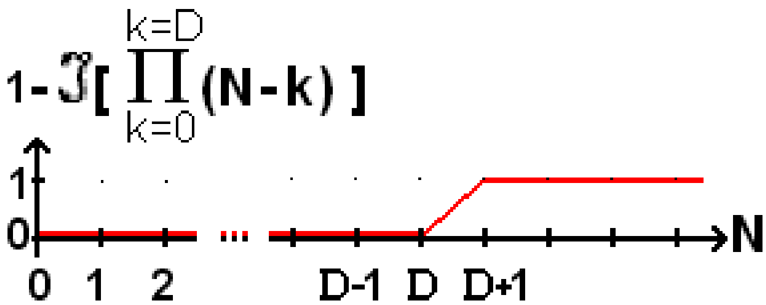
$$\mathfrak{I}\left[\prod_{k=D+1}^{k\to+\infty}(N-k)^2\right]=0 \qquad \text{pour } 0\leq N\leq D$$

$$\mathfrak{I}\left[\prod_{k=D+1}^{k\to+\infty}(N-k)^2\right]=1 \qquad \text{pour } N>D$$

Et donc

$$\mathfrak{I}\left[\prod_{k=D+1}^{k\to+\infty}(N-k)^2\right]=1-\mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=D}(N-k)\right]$$

La représentation graphique est celle-ci :



C'est cette dernière fonction qui va nous permettre de construire $RM(N)$. En effet, d'après le graphique du début de cette étude, nous constatons que la fonction $RM(N)$ peut être considérée comme étant la somme de fonctions plus simples et du même type que la fonction que nous venons de donner. Nous constatons que $RM(N)$ s'obtient en ajoutant les unes aux autres les fonctions suivantes (en étalant la somme sur plusieurs lignes) :

(voir page suivante)

Avec $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$:

$$\begin{aligned}
RM(N) \quad &= \quad 1 - \Im\left[\prod_{k=0}^{k=M-1}(N-k)\right] \\
&\quad\; +1 - \Im\left[\prod_{k=0}^{k=M^2-1}(N-k)\right] \\
&\quad\; +1 - \Im\left[\prod_{k=0}^{k=M^3-1}(N-k)\right] \\
&\quad\; +1 - \Im\left[\prod_{k=0}^{k=M^4-1}(N-k)\right] \\
&\quad\; + \quad ... \\
&\quad\; +1 - \Im\left[\prod_{k=0}^{k=M^a-1}(N-k)\right]
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
RM(N) \quad &= \quad \sum_{b=1}^{b=a}\left\{1 - \Im\left[\prod_{k=0}^{k=M^b-1}(N-k)\right]\right\} \\
&= \quad \left(\sum_{b=1}^{b=a} 1\right) - \sum_{b=1}^{b=a}\left\{\Im\left[\prod_{k=0}^{k=M^b-1}(N-k)\right]\right\}
\end{aligned}$$

Et donc

$$RM(N) = a - \sum_{b=1}^{b=a}\Im\left[\prod_{k=0}^{k=M^b-1}(N-k)\right]$$

De même, d'après l'égalité que nous avions établi juste avant, nous avons :

$$\begin{aligned} RM(N) &= \Im\left[\prod_{k=M}^{k\to+\infty}(N-k)^2\right] \\ &\quad +\Im\left[\prod_{k=M^2}^{k\to+\infty}(N-k)^2\right] \\ &\quad +\Im\left[\prod_{k=M^3}^{k\to+\infty}(N-k)^2\right] \\ &\quad +\Im\left[\prod_{k=M^4}^{k\to+\infty}(N-k)^2\right] \\ &\quad +\ldots \\ &\quad +\Im\left[\prod_{k=M^a}^{k\to+\infty}(N-k)^2\right] \end{aligned}$$

Et donc, nous avons aussi :

$$RM(N) = \sum_{b=1}^{b=a}\Im\left[\prod_{k=M^b}^{k\to+\infty}(N-k)^2\right]$$

Remarque :

Théoriquement, nous aurions pu faire tendre a vers l'infini positif, afin d'obtenir une fonction de restriction idéale en fonction de toutes les puissances de M supérieures ou égales à 1 et valable pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Poursuivons le raisonnement. D'après les démonstrations effectuées en fin de partie "**2.2.5 Construction de la fonction** α_M" (page 140) : pour la fonction α_M, les calculs ne sont plus nécessaires lorsque $x > \alpha_M$ car $f(M;x) = 0$. Ce qui signifie que pour la fonction $RM(N)$ que les calculs ne sont plus nécessaires lorsque :

$$1 - \Im\left[\prod_{k=0}^{k=M^a-1}(N-k)\right] = 0$$

C'est-à-dire, et pour des valeurs de a croissantes, dès que :

$$\Im\left[\prod_{k=0}^{k=M^a-1}(N-k)\right]=1$$

Cela signifie encore que les calculs ne sont plus nécessaires dès que :

$$\prod_{k=0}^{k=M^a-1}(N-k)=0$$

Ce qui sous-entend finalement que les calculs ne sont plus nécessaires dès que :

N est une des valeurs entières de l'intervalle $[0; M^a-1]$.

3.7 Equivalences de formules

Rappelons que

$$\begin{array}{ll} s(M) = 1 & \text{si } M \in \mathbb{P} \\ s(M) = 0 & \text{si } M \notin \mathbb{P} \end{array}$$

$s(M)$ n'étant définie que pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$.

Donc

$$\begin{array}{ll} M^{s(M)} = M & \text{si } M \in \mathbb{P} \\ M^{s(M)} = 1 & \text{si } M \notin \mathbb{P} \end{array}$$

Et donc

$$\begin{array}{lll} M^{s(M)} - 1 = (M-1) & = (M-1).s(M) & \text{si } M \in \mathbb{P} \\ M^{s(M)} - 1 = 0 & = s(M) & \text{si } M \notin \mathbb{P} \end{array}$$

Or lorsque $s(M)$ vaut 0, multiplier n'importe quelle fonction par $s(M)$ donne 0 pour résultat. Pour conclure :

$$M^{s(M)} - 1 = (M-1).s(M)$$

$$s(M) = \frac{M^{s(M)} - 1}{M-1}$$

De la même manière, nous avons :

$$s(M) = \frac{1 - (1-M)^{s(M)}}{M}$$

$\Longrightarrow$ Ces dernières formules sont intéressantes dans le sens où elles peuvent s'exprimer en fonction d'elles-mêmes, c'est-à-dire en faisant référence à elles-mêmes.

En appliquant le même raisonnement à la fonction $\Im(M)$, et pour une variable "indépendante" de $\Im(M)$, que nous noterons X, et telle que X soit un nombre entier (remarquons que ce raisonnement est aussi valable si X est un polynôme ne donnant que des valeurs entières).

Nous avons :

$$X^{\mathfrak{I}(M)} - 1 = (X - 1).\mathfrak{I}(M)$$

valable pour tout $X \in \mathbb{N}$, mais avec condition sur M pour un cas de X :

Si $X = 0$, on doit avoir $M = 0$ (pour que $\mathfrak{I}(M) \neq 0$)

Cette dernière formule me paraît plus intéressante que la précédente car :

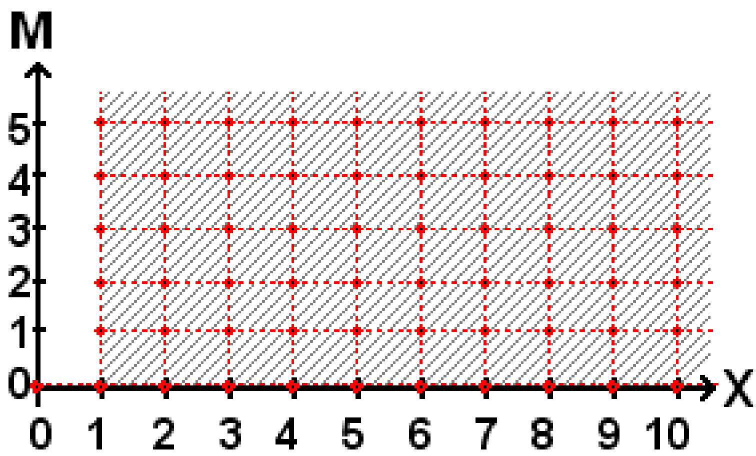
Si $X = 0$, on doit avoir $\mathfrak{I}(M) = 1$ (donc $M = 0$) pour que l'égalité soit respectée.
Si $X = 1$, la valeur de $\mathfrak{I}(M)$ (et donc de M) n'a pas d'importance dans le calcul.
Si $X > 1$, l'égalité est respectée quelquesoit la valeur de $\mathfrak{I}(M)$ (donc tout M).

Ou encore, en regroupant les conditions :

$$X^{\mathfrak{I}(M)} - 1 = (X - 1).\mathfrak{I}(M) \qquad \text{avec } \mathfrak{I}(M) = s(2.M + 2)$$

Pour $X = 0$ et pour $M = 0$ seulement
Ou
Pour tout $X \in \mathbb{N}$, $X \geq 1$ et pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$

Donnons une représentation graphique du domaine de définition de cette égalité pour une meilleure compréhension :



Cette égalité est respectée pour tout M et X étant repérés par des points rouges.

Nous pouvons encore écrire :

Si $M > 0$, on a $X > 0$
Si $M = 0$, on a $X \geq 0$

$\Longrightarrow$ Ici aussi, cette formule peut être écrite de manière "auto-référentielle" (c'est-à-dire que cette formule peut s'exprimer en fonction d'elle-même), avec auto-référencement sur $\mathfrak{I}(M)$:

$$\mathfrak{I}(M) = \frac{X^{\mathfrak{I}(M)} - 1}{X - 1}$$

Remarque : nous pouvons étendre le domaine de définition sur X à l'ensemble des nombres réels avec la même condition sur M (c'est-à-dire $M = 0$) lorsque $X = 0$. Dans ce cas, l'axe des ordonnées est aussi l'axe de symétrie de cette nouvelle représentation graphique. De plus, nous pourrions remplacer la variable X par une fonction, avec la même condition sur M (c'est-à-dire lorsque $M = 0$) si la fonction s'annule.

Nous pouvons remarquer aussi aussi qu'en remplaçant $\mathfrak{I}(M)$ à droite de l'égalité par la formule complète, nous pouvons procéder ainsi de manière à obtenir une formule qui "s'étend à l'infini" :

$$\mathfrak{I}(M) = \frac{X^{\mathfrak{I}(M)} - 1}{X - 1} = \frac{X^{\left(\frac{X^{\mathfrak{I}(M)} - 1}{X - 1}\right)} - 1}{X - 1} = \quad \ldots$$

Même remarque sur la fonction complémentaire de $\mathfrak{I}(M)$:

$$1 - \mathfrak{I}(M) = \frac{X^{[1 - \mathfrak{I}(M)]} - 1}{X - 1}$$

D'où

$$\mathfrak{I}(M) = \frac{1 - \frac{1}{X^{\mathfrak{I}(M)}}}{1 - \frac{1}{X}}$$

Et comme :

$$\mathfrak{I}(M) = \frac{1 - \frac{1}{X^{\mathfrak{I}(M)}}}{1 - \frac{1}{X}} = \frac{X^{\mathfrak{I}(M)} - 1}{X - 1}$$

Nous déduisons également :

$$\mathfrak{I}(M) = \frac{\ln[1 + X - X^{[1-\mathfrak{I}(M)]}]}{\ln X}$$

Ou encore :

$$\mathfrak{I}(M) = 1 - \frac{\ln[1 + X - X^{\mathfrak{I}(M)}]}{\ln X}$$

L'égalité étant conservée dans le cas où $X = M$ et sans condition sur M (et forcément sans condition sur X), nous avons pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$:

$$\mathfrak{I}(M) = \frac{M^{\mathfrak{I}(M)} - 1}{M - 1}$$

Remarque 1 :

Pour l'égalité que nous avions noté :

$$\mathfrak{I}(M) = \frac{X^{\mathfrak{I}(M)} - 1}{X - 1}$$

Avec les condition suivantes :

Pour $X = 0$ et pour $M = 0$ seulement
Ou
Pour tout $X \in \mathbb{N}$, $X \geq 1$ et pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$

Nous pouvons contourner ce problème des conditions en interdisant par exemple à X de valoir 0 (d'autres exemples peuvent être trouvés, avec des polynômes n'ayant pas de racines entières). Partons de ce constat :

$X + \mathfrak{I}(X) = 1$ si $X = 0$
$X + \mathfrak{I}(X) = X$ si $X > 0$

Où nous devons restreindre X tel que $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$.

Si nous reprenons la formule en la modifiant quelque peu avec ces nouvelles données, nous avons :

$$\mathfrak{I}(M) = \frac{[X + \mathfrak{I}(X)]^{\mathfrak{I}(M)} - 1}{[X + \mathfrak{I}(X)] - 1}$$

Où désormais, X a été remplacé dans la formule par l'ensemble $[X + \mathfrak{I}(X)]$ qui ne peut jamais être égale à 0, mais son domaine de définition doit être restreint.

D'autre part et plus largement :

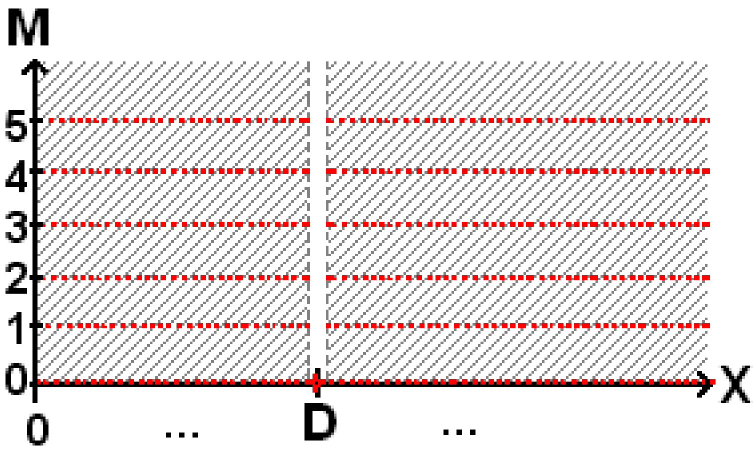
Revenons à $X \in \mathbb{R}$. En effectuant un "décalage de symétrie", c'est-à-dire en faisant passer l'axe de symétrie par un autre point sur l'axe des abcisses, nous obtenons des graphiques du même type. En effet, en notant D une constante telle que $D \in \mathbb{R}$ et en modifiant légèrement les notations ainsi :

$$\mathfrak{I}(M) = \frac{(X - D)^{\mathfrak{I}(M)} - 1}{X - D - 1}$$

Nous pouvons écrire :

Si $X = D$, on doit avoir la condition que $M = 0$ seulement.
Si $X \neq D$, toutes les valeurs de $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$ sont possibles.

Graphiquement, le domaine de définition de cette égalité se représente comme ceci :



Où l'axe vertical passant par le point D en abcisse est l'axe de symétrie du domaine de définition.

Cas particulier de $X = 2$ et $D = 0$:

$$\mathfrak{I}(M) = 2^{\mathfrak{I}(M)} - 1$$

Même remarque sur la fonction complémentaire de $\mathfrak{I}(M)$:

$$1 - \mathfrak{I}(M) = 2^{[}1 - \mathfrak{I}(M)] - 1$$

$$\mathfrak{I}(M) = 2.\left(1 - \frac{1}{2^{\mathfrak{I}(M)}}\right)$$

Et même remarque pour $s(M)$ (et pour sa fonction complémentaire) :

$$s(M) = 2^{s(M)} - 1$$

<u>*Remarque 2 :*</u>

Nous aurions pu aussi noter :

$$(1 - X)^{\mathfrak{I}(M)} = 1 - X.\mathfrak{I}(M) \qquad \text{définie pour } X \in \mathbb{R} - \{1\}$$

(à cause de la condition à respecter telle que $(1 - X) \neq 0$ lorsque $\mathfrak{I}(M) = 0$)

<u>*Remarque 3 :*</u>

De manière moins pertinente, nous avons :

$M + \mathfrak{I}(M) = 1$ si $M = 0$
$M + \mathfrak{I}(M) = M$ si $M > 0$

Donc

$[M + \mathfrak{I}(M)]^{\mathfrak{I}(M)} = [0 + 1]^1 = 1$ si $M = 0$
$[M + \mathfrak{I}(M)]^{\mathfrak{I}(M)} = [M + 0]^0 = 1$ si $M > 0$

Et donc

$$[M + \mathfrak{I}(M)]^{\mathfrak{I}(M)} = 1$$

Même raisonnement et même conclusion pour :

$$M^{\mathfrak{I}(M)} + \mathfrak{I}(M)$$

En effet,

$M^{\mathfrak{I}(M)} + \mathfrak{I}(M) = 0^1 + 1 = 1 \qquad$ si $M = 0$
$M^{\mathfrak{I}(M)} + \mathfrak{I}(M) = M^0 + 0 = 1 \qquad$ si $M > 0$

Donc

$$M^{\mathfrak{I}(M)} + \mathfrak{I}(M) = 1$$

D'où

$$\mathfrak{I}(M) = 1 - M^{\mathfrak{I}(M)}$$

Ou encore :

$$M^{\mathfrak{I}(M)} = 1 - \mathfrak{I}(M) = \overline{\mathfrak{I}(M)}$$

Et donc, pour finir :

$$\mathfrak{I}(M) + M^{\mathfrak{I}(M)} = [\mathfrak{I}(M) + M]^{\mathfrak{I}(M)} = 1$$

Remarque 4 :

Comme précédemment :

$M - \mathfrak{I}(M) = -1 \qquad$ si $M = 0$
$M - \mathfrak{I}(M) = M \qquad$ si $M > 0$

Et donc

$[M - \mathfrak{I}(M)]^{\mathfrak{I}(M)} = -1 \qquad$ si $M = 0$
$[M - \mathfrak{I}(M)]^{\mathfrak{I}(M)} = 1 \qquad$ si $M > 0$

Or,

$(-1)^{\Im(M)} = -1 \qquad \text{si } M = 0$
$(-1)^{\Im(M)} = 1 \qquad \text{si } M > 0$

D'où l'on déduit :

$$[M - \Im(M)]^{\Im(M)} = (-1)^{\Im(M)}$$

Remarque 5 :

De manière identique, nous avons :

$[M \pm \Im(M)]^{[1-\Im(M)]} = 1 \qquad \text{si } M = 0$
$[M \pm \Im(M)]^{[1-\Im(M)]} = M \qquad \text{si } M > 0$

Or,

$M + \Im(M) = 1 \qquad \text{si } M = 0$
$M + \Im(M) = M \qquad \text{si } M > 0$

Et donc

$$[M \pm \Im(M)]^{[1-\Im(M)]} = M + \Im(M)$$

Ou encore, de manière équivalente :

$$[M + \Im(M)]^{[1-\Im(M)]} = [M - \Im(M)]^{[1-\Im(M)]}$$

D'où

$$[1 - \Im(M)]. \ln[M + \Im(M)] = [1 - \Im(M)]. \ln[M - \Im(M)]$$

Ce qui constitue une nouvelle possibilité de donner 2 écritures “symétriques”.

Remarque 6 :

De même :

$$[1-\mathfrak{I}(M)]^{\mathfrak{I}(M)} = 1-\mathfrak{I}(M)$$

Ou encore :

$$\mathfrak{I}(M)^{[1-\mathfrak{I}(M)]} = \mathfrak{I}(M)$$

Développement d'une formule :

Ce petit paragraphe va simplement nous servir à donner un moyen de développer une formule du type :

$$(a-b)^{\mathfrak{I}(M)}$$

avec a et $b \in \mathbb{R}$, et avec la condition que $(a-b) \neq 0$ si $\mathfrak{I}(M) = 0$.

En notant :

$$(a-b) = X$$

Nous avons :

$$(a-b)^{\mathfrak{I}(M)} = X^{\mathfrak{I}(M)}$$

Or, nous avions noté au début de cette partie :

$$X^{\mathfrak{I}(M)} - 1 = (X-1).\mathfrak{I}(M)$$

Donc

$$X^{\mathfrak{I}(M)} = (X-1).\mathfrak{I}(M) + 1$$

Et donc

$$(a-b)^{\mathfrak{I}(M)} = (a-b-1).\mathfrak{I}(M) + 1$$

Ou encore

$$(a-b)^{\mathfrak{I}(M)} = (a-b).\mathfrak{I}(M) + [1-\mathfrak{I}(M)]$$

Mais il existe d'autres égalités possibles si nous admettons des conditions supplémentaires :

$$(a-b)^{\mathfrak{I}(M)} = a.\mathfrak{I}(M) + (-b)^{\mathfrak{I}(M)} \qquad \text{avec } b \neq 0 \text{ si } \mathfrak{I}(M) = 0$$

Ou encore :

$$(a-b)^{\mathfrak{I}(M)} = (-1)^{\mathfrak{I}(M)}.[(-a)^{\mathfrak{I}(M)} + b.\mathfrak{I}(M)] \qquad \text{avec } a \neq 0 \text{ si } \mathfrak{I}(M) = 0$$

Remarque 7 :

Dans cette partie de l'étude, nous aurions pu quelquefois raisonner de la même manière que pour $\mathfrak{I}(M)$ mais avec $s(M)$. En effet, nous pouvons observer que la cohérence est respectée lorsqu'on remplace $\mathfrak{I}(M)$ par $s(M)$ dans les formules de la "***Remarque 2***", de la "***Remarque 6***", et du paragraphe précédent "***Développement d'une formule***" en respectant les conditions préconisées à propos du domaine de définition des variables.

De plus, nous pouvons donner rapidement une autre équivalence permise par la formule $s(M)$:

$$s(M) = (1+M)^{s(M)} - M^{s(M)}$$

Remarque 8 :

Pour poursuivre avec la formule $s(M)$ et d'après ce que nous savons :

$$M^{s(M)} + M^{[1-s(M)]} = M + 1$$

Et donc

$$M = M^{s(M)} + M^{[1-s(M)]} - 1$$

De même que (en substituant $(M-1)$ à M, sauf dans les puissances) :

$$M = (M-1)^{s(M)} + (M-1)^{[1-s(M)]}$$

Plus généralement, pour $X \in \mathbb{R}^*$:

$$X = X^{s(M)} + X^{[1-s(M)]} - 1$$

Ou, pour $X \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$$X = (X-1)^{s(M)} + (X-1)^{[1-s(M)]}$$

Finalement, pour X et $Y \in \mathbb{R}^*$:

$$X^{s(M)} + Y^{[1-s(M)]} - 1 = X.s(M) + Y.[1-s(M)]$$

Ou, pour X et $Y \in \mathbb{R} - \{0;1\}$:

$$X^{s(M)} + Y^{[1-s(M)]} - 1 = (X-1)^{s(M)} + (Y-1)^{[1-s(M)]}$$

Ce qui permet aussi d'écrire de manière presque équivalente (le domaine de définition est différent) que, pour X et $Y \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$$X.s(M) + Y.[1-s(M)] = (X-1)^{s(M)} + (Y-1)^{[1-s(M)]}$$

De manière encore plus générale, nous avons aussi :

- Pour $d \in \mathbb{R}$ et pour X et $Y \in \mathbb{R}^*$:

$$\begin{aligned} X^{s(M)} + Y^{[1-s(M)]} - d &= (X-d+1).s(M) + (Y-d+1).[1-s(M)] \\ &= s(M).(X-Y) + (Y-d+1) \end{aligned}$$

- Pour $d \in \mathbb{R}$ et pour X et $Y \in \mathbb{R} - \{0;d\}$:

$$X^{s(M)} + Y^{[1-s(M)]} - d = (X-d)^{s(M)} + (Y-d)^{[1-s(M)]}$$

- Ce qui permet aussi d'écrire de manière presque équivalente (le domaine de définition est différent) que, pour $d \in \mathbb{R}$, pour X et $Y \in \mathbb{R} - \{d\}$:

$$\begin{aligned}(X-d)^{s(M)} + (Y-d)^{[1-s(M)]} &= (X-d+1).s(M) + (Y-d+1).[1-s(M)] \\ &= s(M).(X-Y) + (Y-d+1)\end{aligned}$$

Remarque :

Ces types de formules trouveront leur intérêt dans les paragraphes qui suivent directement celui-ci.

Autres équivalences de formules 1 :

Prenons en considération les formules qui suivent en notant M une variable telle que $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et P_n un nombre premier constant supposé connu tel que $P_n \in \mathbb{P}$.

- 1ier cas :

  $M.s(M) = M$ si $M \in \mathbb{P}$
  $M.s(M) = 0$ si $M \notin \mathbb{P}$

  Et

  $P_n.[1-s(M)] = 0$ si $M \in \mathbb{P}$
  $P_n.[1-s(M)] = P_n$ si $M \notin \mathbb{P}$

  Donc

  $P_n.[1-s(M)] + M.s(M) = M$ si $M \in \mathbb{P}$
  $P_n.[1-s(M)] + M.s(M) = P_n$ si $M \notin \mathbb{P}$

  Et donc

  $P_n.[1-s(M)] + M.s(M)$ vaut toujours un nombre premier.

- 2ième cas :

$M^{s(M)} = M \qquad$ si $M \in \mathbb{P}$
$M^{s(M)} = 1 \qquad$ si $M \notin \mathbb{P}$

Et

$[P_n - 1].[1 - s(M)] = 0 \qquad$ si $M \in \mathbb{P}$
$[P_n - 1].[1 - s(M)] = (P_n - 1) \qquad$ si $M \notin \mathbb{P}$

Donc

$[P_n - 1].[1 - s(M)] + M^{s(M)} = M \qquad$ si $M \in \mathbb{P}$
$[P_n - 1].[1 - s(M)] + M^{s(M)} = P_n \qquad$ si $M \notin \mathbb{P}$

Et donc

$[P_n - 1].[1 - s(M)] + M^{s(M)}$ vaut toujours un nombre premier.

Cette formule étant strictement équivalente à celle du 1ier cas.

- Exemple :

Pour $P_n = 2$, nous avons :

$P_n.[1 - s(M)] + M.s(M) = 2 + (M - 2).s(M)$

Ou, de manière strictement équivalente :

$[P_n - 1].[1 - s(M)] + M^{s(M)} = 1 - s(M) + M^{s(M)}$

Ce qui est encore équivalent à :

$(M - 1)^{s(M)} + 1$

Où nous pouvons même choisir de restreindre M à $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 3$ pour obtenir tous les nombres premiers possibles puisque :

$(M-1)^{s(M)} + 1 = M \qquad \text{si } M \in \mathbb{P}$

Or, si $M \in \mathbb{P}$ avec $M \geq 3$, cela signifie que "la formule vaut tous les nombres premiers supérieurs ou égale à 3, c'est-à-dire tous sauf le nombre 2".

Et

$(M-1)^{s(M)} + 1 = 2 \qquad \text{si } M \notin \mathbb{P}$

Or, si $M \notin \mathbb{P}$ avec $M \geq 3$, cela signifie que "la formule vaut seulement le nombre 2", c'est-à-dire le seul nombre premier qui manque au domaine de définition de M. Ce qui nous permet de faire la synthèse :

$(M-1)^{s(M)} + 1$ vaut toujours un nombre premier pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 3$.

De plus cette formule peut valoir n'importe quel nombre premier possible.

Autres équivalences de formules 2 :

Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$, soit $d \in \mathbb{N}$. Il est possible de déduire que :

$s(M) = 0 \qquad \text{si } M \notin \mathbb{P}$
$s(M+d) = 0 \qquad \text{si } (M+d) \notin \mathbb{P}$

Et

$s(M) = 1 \qquad \text{si } M \in \mathbb{P}$
$s(M+d) = 1 \qquad \text{si } (M+d) \in \mathbb{P}$

Et donc, d'une part :

$s(M) + s(M+d) = 0$ si $M \notin \mathbb{P}$ et si $(M+d) \notin \mathbb{P}$
$s(M) + s(M+d) = 1$ si $M \notin \mathbb{P}$ et si $(M+d) \in \mathbb{P}$
$s(M) + s(M+d) = 1$ si $M \in \mathbb{P}$ et si $(M+d) \notin \mathbb{P}$
$s(M) + s(M+d) = 2$ si $M \in \mathbb{P}$ et si $(M+d) \in \mathbb{P}$

Et donc, d'autre part :

$s(M).s(M+d) = 0$ si $M \notin \mathbb{P}$ et si $(M+d) \notin \mathbb{P}$
$s(M).s(M+d) = 0$ si $M \notin \mathbb{P}$ et si $(M+d) \in \mathbb{P}$
$s(M).s(M+d) = 0$ si $M \in \mathbb{P}$ et si $(M+d) \notin \mathbb{P}$
$s(M).s(M+d) = 1$ si $M \in \mathbb{P}$ et si $(M+d) \in \mathbb{P}$

* *Par exemple :*

Pour les nombres premiers jumeaux, nous avons $M \in \mathbb{P}$ et $(M+d) \in \mathbb{P}$ lorsque $d = 2$. Nous avons dans ce cas :

$$s(M).s(M+2) = 1$$

Ou

$$s(M) + s(M+2) = 2$$

Autres équivalences de formules 3 :

- Dans le même ordre d'idée que les 2 paragraphes précédents, notons M une variable telle que $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et soit d la différence entre 2 nombres premiers. Si $M \in \mathbb{P}$ et si M est le plus petit de ces 2 nombres premiers, alors d'après l'énoncé, nous avons aussi $(M+d) \in \mathbb{P}$.

Nous pouvons alors écrire :

$s(M) = s(M+d) = 1$ si $M \in \mathbb{P}$ et si $(M+d) \in \mathbb{P}$

Et

$s(M) = 0$ si $M \notin \mathbb{P}$
$s(M+d) = 0$ si $(M+d) \notin \mathbb{P}$

Soit P_n un nombre premier constant supposé connu tel que $P_n \in \mathbb{P}$ et tel que $(Pn + d) \in \mathbb{P}$. Nous pouvons affirmer que la formule suivante :

$$s(M).s(M + d).[M - P_n] + P_n$$

donne toujours un nombre premier qui se trouve être le plus petit sur 2 nombres premiers dont la différence vaut d. En effet, puisque :

$$s(M).s(M + d).[M - Pn] + Pn = M \qquad \text{si } s(M) = s(M + d) = 1$$

Et

$$s(M).s(M + d).[M - P_n] + P_n = P_n \qquad \text{si } s(M) = 0 \text{ ou si } s(M + d) = 0.$$

* Exemple 1 :

  Pour $d = 1$, nous avons 2 nombres premiers connus dont la différence vaut 1, il s'agit de $P_n = 2$ et $(P_n + 1) = 3$. Nous pouvons alors noter que :

  $$s(M).s(M + 1).[M - 2] + 2$$

  donne toujours un nombre premier qui se trouve être le plus petit sur 2 nombres premiers dont la différence vaut 1. Comme 2 et 3 sont les seuls nombres premiers à avoir cette différence, nous pouvons même ajouter que :

  $$s(M).s(M + 1).[M - 2] + 2 = 2 \qquad \text{quelquesoit } M \in \mathbb{N},\ M \geq 2$$

  Ceci revient encore à écrire :

  $$s(M).s(M + 1).[M - 2] = 0 \qquad \text{quelquesoit } M \in \mathbb{N},\ M \geq 2$$

* Exemple 2 :

  Pour $d = 2$, nous sommes dans le cas des nombres premiers jumeaux. Nous pouvons choisir 2 nombres premiers jumeaux connus, prenons $P_n = 3$ et $(P_n + 2) = 5$. Nous pouvons alors noter que :

  $$s(M).s(M+2).[M-3]+3$$

  donne toujours un nombre premier qui se trouve être le plus petit sur 2 nombres premiers jumeaux.

- De même, nous pourrions encore étendre le raisonnement en considérant des triplets de nombres premiers dont la différence entre le plus grand et l'intermédiaire vaut d, et la différence entre l'intermédiaire et le plus petit vaut aussi d. Avec P_n un nombre premier constant supposé connu tel que $P_n \in \mathbb{P}$, tel que $(Pn + d) \in \mathbb{P}$ et tel que $(Pn + 2d) \in \mathbb{P}$. D'après les même notations, nous avons :

$$s(M).s(M+d).s(M+2d).[M-P_n]+P_n$$

donne toujours un nombre premier qui se trouve être le plus petit de ces 3 nombres premiers correspondant à l'énoncé.

Nous pouvons donner comme exemple 3 nombres premiers connus pour lesquels $d = 2$: il s'agit de $P_n = 3$, de $(P_n + 2) = 5$ et de $(P_n + 4) = 7$. Cela nous permettant d'établir que :

$$s(M).s(M+d).s(M+2d).[M-3]+3$$

donne toujours un nombre premier qui se trouve être le plus petit de ce triplet de nombres premiers et dont $d = 2$.

- Pour finir, nous pourrions encore étendre le raisonnement au-delà des triplets de nombres premiers.

Autres équivalences de formules 4 :

D'après la même fonction $s(M)$ que précédemment (définie pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$) et pour D une variable définie pour $D \in \mathbb{N}$, $D \geq 2$, et au même titre que pour M, la fonction $s(D)$ est la simplifiée de variable D (dont les propriétés sont similaires à celles de la fonction $s(M)$, mais pour la variable D indépendamment de la variable M) :

$$M.s(M) = M \qquad \text{si } M \in \mathbb{P}$$
$$M.s(M) = 0 \qquad \text{si } M \notin \mathbb{P}$$

D'où

$$D - M.s(M) = D - M \qquad \text{si } M \in \mathbb{P}$$
$$D - M.s(M) = D \qquad \text{si } M \notin \mathbb{P}$$

Donc

$$[D - M.s(M)]^{s(D)} = D - M.s(M) \qquad \text{si } D \in \mathbb{P}$$
$$[D - M.s(M)]^{s(D)} = 1 \qquad \text{si } D \notin \mathbb{P}$$

Donc

$$\prod_{M=2}^{M\to+\infty} [D - M.s(M)]^{s(D)}$$
$$= [D-2]^{s(D)}.[D-3]^{s(D)}.[D]^{s(D)}.[D-5]^{s(D)}.[D]^{s(D)}.[D-7]^{s(D)}.[D]^{s(D)} \quad ...$$
$$= \left\{ \prod_{M=2}^{M\to+\infty} [D - M.s(M)] \right\}^{s(D)}$$

Et donc

$$\prod_{M=2}^{M\to+\infty} [D - M.s(M)]^{s(D)} = 0 \qquad \text{si } D \in \mathbb{P}$$
$$\prod_{M=2}^{M\to+\infty} [D - M.s(M)]^{s(D)} = 1 \qquad \text{si } D \notin \mathbb{P}$$

Et finalement, nous remarquons que ces égalités correspondent au contraire de la fonction $s(D)$:

$s(D) = 1 \qquad \text{si } D \in \mathbb{P}$
$s(D) = 0 \qquad \text{si } D \notin \mathbb{P}$

D'où

$$\prod_{M=2}^{M\to+\infty} [D - M.s(M)]^{s(D)} = 1 - s(D)$$

Et donc

$$s(D) = 1 - \prod_{M=2}^{M\to+\infty} [D - M.s(M)]^{s(D)}$$

Parallèlement à ceci, nous avons aussi le "polynôme" :

$$\begin{aligned} \left[\prod_{p\in\mathbb{P}}(D-p)\right]^{s(D)} &= 0 \qquad \text{si } D \in \mathbb{P} \\ \left[\prod_{p\in\mathbb{P}}(D-p)\right]^{s(D)} &= 1 \qquad \text{si } D \notin \mathbb{P} \end{aligned}$$

Et donc, nous pouvons également noter :

$$\begin{aligned} s(D) &= 1 - \prod_{M=2}^{M\to+\infty} [D - M.s(M)]^{s(D)} \\ &= 1 - \left[\prod_{p\in\mathbb{P}}(D-p)\right]^{s(D)} \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer qu'il n'est pas nécessaire de borner M de 2 à l'infini positif si l'on considère qu'il existe toujours au moins un nombre premier entre N et $2N$.

Afin que $s(M)$ soit toujours définie, notons $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. En effet, nous pouvons constater que :

Pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, il existe toujours un nombre premier entre N et $(2N-1)$ (puisque $2N$ ne peut pas être un nombre premier).

$$\prod_{M=N}^{M=2N-1} [D - M.s(M)]^{s(D)} \quad = \quad 0 \quad \text{si } D \in \mathbb{P} \text{ sur l'intervalle } [N; (2N-1)]$$

$$\prod_{M=N}^{M=2N-1} [D - M.s(M)]^{s(D)} \quad = \quad 1 \quad \text{si } D \notin \mathbb{P}$$

Ce qui correspond ici aussi au contraire de la fonction $s(D)$ pour $D \in [N; (2N-1)]$.

Nous pouvons donc écrire, pour $D \in [N; (2N-1)]$:

$$\prod_{M=N}^{M=2N-1} [D - M.s(M)]^{s(D)} = 1 - s(D)$$

Autres cas intéressant, un cas "binaire" :

"Simulation" de $s(M)$ avec une variable B plus restreinte.

Soit B une variable ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1 et $\mathfrak{I}(B)$ la fonction d'Impulsion Première (définie tel que précédemment) associée à la variable B (précédemment, elle était associée à la variable M) , nous obtenons pour $\mathfrak{I}(B)$ toutes les valeurs possibles qui sont respectivement 1 et 0. Nous avons ceci :

$\mathfrak{I}(0) = 1$
$\mathfrak{I}(1) = 0$

D'où

$$\mathfrak{I}(B) = 1 - B$$

(Ou $\mathfrak{I}[\mathfrak{I}(B)] = B$, ou encore $\mathfrak{I}(1 - B) = B$)

Avec la variable B, "toutes" les valeurs possibles de $s(M)$ (1 ou 0) sont atteintes. Or, pour $X \in \mathbb{R} - \{1\}$:

$$\mathfrak{I}(B) = \frac{X^{\mathfrak{I}(B)} - 1}{X - 1}$$

Donc

$$\begin{aligned}
1 - B &= \frac{X^{(1-B)} - 1}{X - 1} \\
\Rightarrow B &= \frac{1 - X^{(1-B)} + (X - 1)}{X - 1} \\
\Rightarrow B &= \frac{X - X^{(1-B)}}{X - 1} \\
\Rightarrow B &= \frac{1 - \frac{1}{X^B}}{1 - \frac{1}{X}}
\end{aligned}$$

Avec toujours un auto-référencement de cette fonction sur B.

Pour compléter, $\mathfrak{I}(B)$ et B ne possédant que 2 "états" binaires, ces 2 variables peuvent être échangées dans la formule suivante :

$$\mathfrak{I}(B) = \frac{X^{\mathfrak{I}(B)} - 1}{X - 1}$$

nous pouvons alors écrire de manière équivalente :

$$B = \frac{X^B - 1}{X - 1} \qquad \text{(avec } B = 1 \text{ si } X = 0\text{)}$$

Et en utilisant la formule précédente :

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1 - \frac{1}{X^B}}{1 - \frac{1}{X}} \\
\Rightarrow \frac{1 - \frac{1}{X^B}}{1 - \frac{1}{X}} &= \frac{X^B - 1}{X - 1} \\
\Rightarrow X^B &= 1 + X.\left(1 - \frac{1}{X^B}\right)
\end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $X = 1 - B$, nous avons :

$$\begin{aligned}
B &= \frac{X^B - 1}{X - 1} \qquad \text{(ici, l'égalité est bien respectée même lorsque } X = 0\text{)} \\
&= \frac{(1 - B)^B - 1}{(1 - B) - 1} \\
\Rightarrow -B^2 &= (1 - B)^B - 1 \\
\Rightarrow -B &= (1 - B)^B - 1 \\
\Rightarrow B &= 1 - (1 - B)^B
\end{aligned}$$

De manière moins pertinente, pour X et $d \in \mathbb{N}^*$ et pour $X \neq d$, une autre formule est possible :

$$B = \frac{B.(X - d)}{B.X - d}$$

Remarque sur le cas "binaire" :

Nous pouvons reconstruire toutes les tables de vérités définies par l'algèbre de *BOOLE* [3] grâce à la formule de $\Im(M)$. Par exemple en prenant 2 fois cette formule de $\Im(M)$ et en les dissociant comme si elles étaient de simples variables. Notons ces 2 nouvelles variables $\Im(M_1)$ et $\Im(M_2)$, et notons L une "porte logique" à 2 entrées $\Im(M_1)$ et $\Im(M_2)$.

** Exemple 1 :*

$L = \Im(M_1).\Im(M_2)$ (symbole " . " : *ET* de l'algèbre de *BOOLE*)

dont la table de vérité est la suivante :

$\Im(M_1)$	$\Im(M_2)$	L
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ce qui correspond à une porte logique "*ET*" en algèbre de *BOOLE*. D'un point de vue strictement mathématique (c'est-à-dire, maintenant, en écriture mathématique), nous pouvons écrire :

$$L = \Im(M_1).\Im(M_2)$$

** Exemple 2 :*

$L = \Im(M_1) + \Im(M_2)$ (symbole " + " : *OU* de l'algèbre de *BOOLE*)

dont la table de vérité est la suivante :

$\Im(M_1)$	$\Im(M_2)$	L
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ce qui correspond à une porte logique "*OU*" en algèbre de *BOOLE*. D'un point de vue strictement mathématique (c'est-à-dire, maintenant, en écriture mathématique), nous pouvons écrire :

$$L = \Im(M_1) + \Im(M_2) - [\Im(M_1).\Im(M_2)]$$

Ce qui revient également à écrire :

$$L = [\Im(M_1) - \Im(M_2)]^2 + \Im(M_1).\Im(M_2)$$

En effet, puisque nous avons :

$$[\Im(M_1) - \Im(M_2)]^2 + \Im(M_1).\Im(M_2) = \Im(M_1)^2 + \Im(M_2)^2 - \Im(M_1).\Im(M_2)$$

Or,

$$\Im(M)^m = \Im(M) \qquad \text{pour } m \in \mathbb{N},\, m \geq 1.$$

D'où

$$[\Im(M_1) - \Im(M_2)]^2 + \Im(M_1).\Im(M_2) = \Im(M_1) + \Im(M_2) - \Im(M_1).\Im(M_2)$$

Nous pouvons remarquer que nous aurions pu prendre d'autres "variables". Par exemple, il en aurait été de même pour les variables $s(M_1)$ et $s(M_2)$ (possédant les mêmes propriétés que $s(M)$) à la place des variables $\Im(M_1)$ et $\Im(M_2)$ (respectivement). Ce qui permet de constater un lien possible entre les tables de vérité de l'algèbre de *BOOLE* et la formule $s(M)$ ou la formule $\Im(M)$, et donc un lien avec les propriétés des nombres entiers. Une interprétation entre l'algèbre de *BOOLE* et les propriétés des nombres entiers (propriété de de primalité ou autres propriétés) est donc possible.

Remarque : Une interprétation entre l'algèbre de *BOOLE* et les propriétés d'autres nombres est aussi possible grâce à toutes fonctions dont les résultats ne peuvent être que 0 ou 1.

* Sur le même principe, poursuivons les correspondances avec d'autres exemples. Soient B_1 et B_2 deux variables binaires (ne pouvant prendre pour état que 0 ou 1).

* *Exemple 3 :*

$L = \mathfrak{I}(M) \qquad \text{avec } M = B_1.$

Comme nous l'avons déjà vu au cours de ce paragraphe :

$$\mathfrak{I}(B) = 1 - B$$

Donc

$$\mathfrak{I}(B_1) = 1 - B_1$$

Ce qui correspond à une porte logique "*COMPLEMENT*" en algèbre de *BOOLE* (c'est-à-dire que la variable binaire de sortie est complémentaire à la variable binaire d'entrée).

* *Exemple 4 :*

$L = \mathfrak{I}(M)$ avec $M = B_1.B_2$ (symbole " . " : multiplication en mathématiques)

dont la table de vérité est la suivante :

B_1	B_2	$L = \mathfrak{I}(B_1.B_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ce qui correspond à une porte logique "*NAND*" (c'est-à-dire *NON ET*) en algèbre de *BOOLE*. D'un point de vue strictement mathématique, nous pouvons écrire :

$$\mathfrak{I}(B_1.B_2) = 1 - (B_1.B_2)$$

Remarquons que nous avons aussi (d'autres exemples sont possibles) :

$$\mathfrak{I}(B_1.B_2) = s(2 + B_1 + B_2)$$

Il est possible de généraliser cela en changeant de variable. A la place de B_1 et de B_2, prenons respectivement $M_1 \in \mathbb{N}$, $M_1 \geq 0$ et $M_2 \in \mathbb{N}$, $M_2 \geq 0$. Nous pouvons noter que :

$\mathfrak{I}(M_1) = 1$ pour $M_1 = 0$
$\mathfrak{I}(M_1) = 0$ pour $M_1 \geq 1$

$\mathfrak{I}(M_2) = 1$ pour $M_2 = 0$
$\mathfrak{I}(M_2) = 0$ pour $M_2 \geq 1$

Donc

$\mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) = 1$ pour $M_1 = 0$ et pour $M_2 = 0$
$\mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) = 1$ pour $M_1 = 0$ et pour $M_2 \geq 1$
$\mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) = 1$ pour $M_1 \geq 1$ et pour $M_2 = 0$
$\mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) = 0$ pour $M_1 \geq 1$ et pour $M_2 \geq 1$

Or,

$\mathfrak{I}(M_1.M_2) = 1$ pour $M_1 = 0$ et pour $M_2 = 0$
$\mathfrak{I}(M_1.M_2) = 1$ pour $M_1 = 0$ et pour $M_2 \geq 1$
$\mathfrak{I}(M_1.M_2) = 1$ pour $M_1 \geq 1$ et pour $M_2 = 0$
$\mathfrak{I}(M_1.M_2) = 0$ pour $M_1 \geq 1$ et pour $M_2 \geq 1$

D'où nous déduisons la formule générale :

$$\mathfrak{I}(M_1.M_2) = \mathfrak{I}(M_1) + \mathfrak{I}(M_2) - \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2)$$

De plus, à partir de l'équivalence $\mathfrak{I}(B_1.B_2) = 1 - (B_1.B_2)$, nous pouvons donner une dernière écriture généralisée :

$$\mathfrak{I}(M_1.M_2) = 1 - (M_1)^{\mathfrak{I}(M1)}.(M_2)^{\mathfrak{I}(M2)}$$

* *Exemple 5 :*

$L = \Im(M)$ avec $M = B_1 + B_2$ (symbole " + " : addition en mathématiques)

dont la table de vérité est la suivante :

B_1	B_2	$L = \Im(B_1 + B_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Ce qui correspond à une porte logique "*NOR*" (c'est-à-dire *NON OU*) en algèbre de *BOOLE*. D'un point de vue strictement mathématique, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\Im(B_1 + B_2) &= 2^{(B_1.B_2)} - (B_1 + B_2) \\ &= 1 - (B_1 + B_2) + (B_1.B_2)\end{aligned}$$

Or, nous pouvons également remarquer que (en algèbre de *BOOLE*) :

$\Im(B_1)$	$\Im(B_2)$	$L = \Im(B_1 + B_2)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

D'un point de vue strictement mathématique, nous pouvons déduire :

$$\Im(B_1 + B_2) = \Im(B_1).\Im(B_2)$$

Remarquons que nous avons aussi (d'autres exemples sont possibles) :

$$\Im(B_1 + B_2) = s(7 + B_1 + B_2)$$

Il est possible de généraliser cela en changeant de variable. A la place de B_1 et de B_2, prenons respectivement $M_1 \in \mathbb{N}$, $M_1 \geq 0$ et $M_2 \in \mathbb{N}$, $M_2 \geq 0$. Nous pouvons noter que :

$\mathfrak{I}(M_1) = 1$ pour $M_1 = 0$
$\mathfrak{I}(M_1) = 0$ pour $M_1 \geq 1$

$\mathfrak{I}(M_2) = 1$ pour $M_2 = 0$
$\mathfrak{I}(M_2) = 0$ pour $M_2 \geq 1$

Donc

$\mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) = 1$ pour $M_1 = 0$ et pour $M_2 = 0$
$\mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) = 0$ pour $M_1 = 0$ et pour $M_2 \geq 1$
$\mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) = 0$ pour $M_1 \geq 1$ et pour $M_2 = 0$
$\mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2) = 0$ pour $M_1 \geq 1$ et pour $M_2 \geq 1$

Or,

$\mathfrak{I}(M_1 + M_2) = 1$ pour $M_1 = 0$ et pour $M_2 = 0$
$\mathfrak{I}(M_1 + M_2) = 0$ pour $M_1 = 0$ et pour $M_2 \geq 1$
$\mathfrak{I}(M_1 + M_2) = 0$ pour $M_1 \geq 1$ et pour $M_2 = 0$
$\mathfrak{I}(M_1 + M_2) = 0$ pour $M_1 \geq 1$ et pour $M_2 \geq 1$

D'où nous déduisons la formule générale :

$$\mathfrak{I}(M_1 + M_2) = \mathfrak{I}(M_1).\mathfrak{I}(M_2)$$

De plus, à partir de l'équivalence $\mathfrak{I}(B_1 + B_2) = 1 - (B_1 + B_2) + (B_1.B_2)$, nous pouvons donner une dernière écriture généralisée :

$$\mathfrak{I}(M_1 + M_2) = 1 - (M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)} - (M_2)^{\mathfrak{I}(M_2)} + (M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)}.(M_2)^{\mathfrak{I}(M_2)}$$

Ce qui revient également à écrire :

$$\mathfrak{I}(M_1 + M_2) = 1 - [(M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)} - (M_2)^{\mathfrak{I}(M_2)}]^2 - (M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)}.(M_2)^{\mathfrak{I}(M_2)}$$

En effet puisqu'en développant les crochets élevés au carré, nous avons à traiter (pour M_1, le principe étant le même pour M_2) :

$$(M_1)^{2.\mathfrak{I}(M_1)}$$

Or,

$$\begin{array}{ll} \mathfrak{I}(M_1) = 1 & \text{pour } M_1 = 0 \\ \mathfrak{I}(M_1) = 0 & \text{pour } M_1 \geq 1 \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{ll} (M_1)^{2.\mathfrak{I}(M_1)} = (M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)} = 0 & \text{pour } M_1 = 0 \\ (M_1)^{2.\mathfrak{I}(M_1)} = (M_1)^{\mathfrak{I}(M_1)} = 1 & \text{pour } M_1 \geq 1 \end{array}$$

Ce qui permet d'expliquer l'égalité donnée sous les 2 formes précédentes.

Remarque importante :

D'après le calcul propositionnel "classique", il est possible de former toutes les propositions à partir d'une unique porte logique tel que la porte logique *NOR*, ou bien à partir d'une unique porte logique tel que la porte logique *NAND*. Ainsi, le calcul propositionnel classique devient interprétable par $\mathfrak{I}(M)$ (ou par une formule similaire à $s(M)$) et les propiétés des nombres représentées par la variable M. Cela signifie que toutes les propositions du calcul propositionnel classique peuvent être formées à partir de la formule $\mathfrak{I}(M)$ tel que $M = B_1 + B_2$ ou tel que $M = B_1.B_2$.

Des correspondances peuvent être établies entre des formules ne pouvant prendre comme valeur que 0 ou 1, et des énoncés (en attribuant des valeurs de vérité tel que 0 et 1). Quelques cas sont développés dans la $1^{ière}$ **partie** du **Chapitre V**.

<u>*Dernière remarque sur des cas particuliers :*</u>

Rapidement, dans le cadre de l'utilisation du nombre imaginaire" i " d'*EULER* (rappelons que " $i = \sqrt{(-1)}$ ") :

$$\begin{aligned} e^{i.\pi.\Im(M)} &= (-1)^{\Im(M)} \\ &= 1 - 2.\Im(M) \\ &= \sin\left[(-1)^{\Im(M)}.\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

Avec

$(-1)^{\Im(M)} = -1$ si $M = 0$
$(-1)^{\Im(M)} = 1$ si $M > 0$ et $M \in \mathbb{N}$

Ou bien,

$$\begin{aligned} e^{i.\pi.s(M)} &= (-1)^{s(M)} \\ &= 1 - 2.s(M) \\ &= \sin\left[(-1)^{s(M)}.\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

Avec

$(-1)^{s(M)} = -1$ si $M \in \mathbb{P}$
$(-1)^{s(M)} = 1$ si $M \notin \mathbb{P}$ et $M \in \mathbb{N}$, $M > 2$

Ou encore :

$e^{i.\pi.s(M)/2} = (-1)^{s(M)/2} = i$ (un imaginaire pur) si $M \in \mathbb{P}$
$e^{i.\pi.s(M)/2} = (-1)^{s(M)/2} = 1$ (un réel pur) si $M \notin \mathbb{P}$ et $M \in \mathbb{N}$, $M > 2$

Nous pouvons ainsi "séparer" les nombres entiers sur 2 axes : les nombres premiers sur l'axe des nombres imaginaires, et les nombres entiers non premiers sur l'axe des réels.

3.8 Autres formules intéressantes

Voici encore, exposées dans cette sous-partie, quelques formules liées aux nombres premiers qu'il est encore possible d'établir. Certaines pouvant permettre de réduire la longueur des calculs dûs à la factorielle ou dûs à un produit de nombres entiers consécutifs sur un intervalle donné.

La sous-partie "**3.8.5 Nombres factoriels, formule simplifiée** $s(M)$ **et divisibilité**" (page 220) montre qu'il est possible de simplifier les calculs de formules telles que $s(M)$.

La sous-partie "**3.8.6 Formule** $f(M;x)$**, puissance et divisibilité : Formule** $D(N)$ **généralisée**" (page 225) donne même une généralisation de la formule $D(N)$.

3.8.1 Nombres factoriels et divisibilité par Pn

Sachant que $P_n \in \mathbb{P}$ et que (d'après les notations de la partie "**2 Démonstration complète**" page 52) :

$$(P_n - 1)! + 1 = P_n.w_1$$

(Avec w_1 un nombre entier, cela signifie $[(P_n - 1)! + 1]$ divisible par P_n).

D'où :

$$\begin{aligned}(P_n - 1)! + 1 - P_n &= P_n.w_1 - P_n \\ &= P_n.(w_1 - 1) \qquad \text{(c'est-à-dire encore divisible par } P_n\text{)}\end{aligned}$$

Mais nous avons aussi :

$$\begin{aligned}(P_n - 1)! + 1 - P_n &= (P_n - 1)! - (P_n - 1) \\ &= (P_n - 1).[(P_n - 2)!] - (P_n - 1) \\ &= (P_n - 1).[(P_n - 2)! - 1]\end{aligned}$$

Donc

$$(P_n - 1).[(P_n - 2)! - 1] = P_n.(w_1 - 1)$$

Et donc

$$(P_n - 1).[(P_n - 2)! - 1] \text{ est divisible par } P_n \text{ puisque } P_n.(w_1 - 1) \text{ l'est aussi.}$$

Or, dans un produit de 2 termes (en l'occurence $(P_n - 1)$ et $[(P_n - 2)! - 1]$ sont ici ces 2 termes), l'ensemble est divisible par un nombre si au moins l'un des 2 est divisible par ce nombre. Comme $(P_n - 1)$ n'est pas divisible par P_n, $[(P_n - 2)! - 1]$ l'est forcément.

$1^{ière}$ conclusion :

$$[(P_n - 2)! - 1] = P_n.w_2$$

(Avec w_2 un nombre entier tel que $w_2 = \dfrac{(w_1 - 1)}{(P_n - 1)}$)

Et donc $[(P_n - 2)! - 1]$ est divisible par P_n.

En arithmétique modulaire, cela s'écrit :

$$[(P_n - 2)! - 1] \equiv 0 \pmod{P_n}$$

Poursuivons le raisonnement :

Soit $m \in \mathbb{N}$, et d'après les notations précédentes, développons la formule suivante :

$$[(P_n-2)!+1].[(P_n-2)!^{(m-1)}-1] = (P_n-2)!^{(m)}-(Pn-2)!+(Pn-2)!^{(m-1)}-1$$

D'où

$$(P_n-2)!^{(m)}-1 = [(P_n-2)!+1].[(P_n-2)!^{(m-1)}-1]+(P_n-2)!-(P_n-2)!^{(m-1)}$$

Donc

$$(P_n-2)!^{(m)}-1$$
$$=[(P_n-2)!+1].[(P_n-2)!^{(m-1)}-1]-(P_n-2)!.[(P_n-2)!^{(m-2)}-1]$$

Or, pour $m=2$, nous retrouvons notre expression de départ à droite de l'égalité :

$$[(P_n-2)!-1] \qquad \text{qui est divisible par } P_n,$$

ce qui implique ensuite tous les cas suivants pour m (le fait que la formule soit valable pour un cas la rend valable pour le cas suivant, et ainsi de suite pour chaque cas suivant). En effet, il faut observer $(P_n-2)!^{(m-1)}$ et $(P_n-2)!^{(m-2)}$, qui permet d'étendre le raisonnement à tous les autres cas de m (en incrémentant d'une unité successivement et à l'infini la puissance de $(P_n-2)!$). Le premier membre de l'égalité étant divisible par P_n implique que le second le soit aussi.

$2^{ième}$ *conclusion :*

Le cas $m=1$ venant d'être traité dans la "$1^{ière}$ *conclusion*", nous pouvons maintenant conclure que :

$$(P_n-2)!^m-1=P_n.w_{2'} \qquad \text{(Avec } w_{2'} \text{ un nombre entier)}$$

Et donc $[(P_n-2)!^m-1]$ est divisible par P_n.

En arithmétique modulaire, cela s'écrit :

$$[(P_n-2)!^m-1]\equiv 0 \pmod{P_n}$$

Si nous considérons que 0 fait partie des multiples de P_n, nous pouvons alors étendre le domaine de définition de m à $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 0$. En effet, puisque pour $m=0$ (et donc $w_{2'}=0$), l'égalité est bien respectée.

Tout ceci sous-entend que, pour les congruences, il est possible de réduire les calculs utilisant les nombres premiers dans les factoriels (nous sommes passés de $(P_n-1)!$ à $(P_n-2)!$).

Complément :

En supposant que P_n ne soit pas connu, en notant M une variable qui représente ce nombre inconnu, en remplaçant P_n par M dans la formule, pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$, nous avons :

- Si $M \in \mathbb{P}$, le même résultat que précédemment, c'est-à-dire :

$$\frac{(M-2)!^m}{M} = W_{2'} + \frac{1}{M} \qquad \text{(Avec } w_{2'} \text{ un nombre entier)}$$

Donc

$$\sin^2\left(\pi.\frac{(M-2)!^m}{M}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)$$

Et donc :

$$\frac{\sin^2\left(\pi.\frac{(M-2)!^m}{M}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} = 1$$

- Si $M \notin \mathbb{P}$, cela signifie que M est un nombre composé, notons :

Avec P_1, P_2 , P_3, ... et $P_n \in \mathbb{P}$, avec $P_1 < P_2 < P_3 < ... < P_n$ et avec au moins 2 des termes $\alpha_n \geq 1$ (en rappelant que pour M défini ainsi, nous avons nécessairement $P_n < M$) :

$$M = {P_1}^{\alpha_1}.{P_2}^{\alpha_2}.{P_3}^{\alpha_3}...{P_n}^{\alpha_n}$$

En développant, et comme $(M-1)$ ne peut pas être un de ces nombres premiers, nous retrouvons forcément tous les facteurs premiers de M dans cette formule :

$$\frac{(M-2)!^m}{M} = \frac{[({P_1}^{\alpha_1}.{P_2}^{\alpha_2}.{P_3}^{\alpha_3}...{P_n}^{\alpha_n}).k_0]^m}{M}$$

Où k_0 est un nombre entier qui représente les nombres que l'on ne retrouve pas dans la décomposition de M en produit de facteurs premiers. Le résultat de cette formule ne peut donc être qu'un nombre entier puisque le numérateur contient l'intégralité des facteurs premiers de M et de leur puissance respectives, ce qui est égale à M, c'est-à-dire le numérateur.

<u>ATTENTION :</u>

Ceci n'est pas valable dans un seul cas, c'est le cas de $M = 4$, le défaut évoqué dans la partie démonstration, pour les mêmes raisons, nous devons donc restreindre m tel que $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$.

Revenons en au cas de $M \notin \mathbb{P}$, cela signifie donc que :

$$\frac{(M-2)!^m}{M} = k_1 \qquad \text{(avec } k_1 \text{ un nombre entier)}$$

D'où

$$\sin^2\left(\pi.\frac{(M-2)!^m}{M}\right) = 0$$

Et donc :

$$\frac{\sin^2\left(\pi.\frac{(M-2)!^m}{M}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} = 0$$

Ce qui est strictement équivalent à la formule $s(M)$, pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$:

$$s(M) = \frac{\sin^2\left(\pi.\frac{(M-2)!^m}{M}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}$$

Ce qui ne permet de réduire les calculs que sensiblement.

<u>Remarque :</u>

D'après les démonstrations du complément, nous aurions pu nous servir des résultats concerant cette formule pour élaborer la formule $D(N)$ de décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers.

3.8.2 Produit de nombres factoriels et divisibilité par Pn

Soit $P_n \in \mathbb{P}$ et $a \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq a \leq P_n$, nous pouvons écrire ceci :

$$\begin{aligned}
0!.(P_n-1)! &= 0!.P_n.(P_n-2)! - 1!.(P_n-2)! \\
1!.(P_n-2)! &= 1!.P_n.(P_n-3)! - 2!.(P_n-3)! \\
2!.(P_n-3)! &= 2!.P_n.(P_n-4)! - 3!.(P_n-4)! \\
3!.(P_n-4)! &= 3!.P_n.(P_n-5)! - 4!.(P_n-5)! \\
4!.(P_n-5)! &= 4!.P_n.(P_n-6)! - 5!.(P_n-6)! \\
...
\end{aligned}$$

Et de manière générale, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
(a-1)!.(P_n-a)! &= (a-1)!.(P_n-a).(P_n-a-1)! \\
&= (a-1)!.P_n.(P_n-a-1)! - a!.(P_n-a-1)!
\end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$a!.(P_n-a-1)! = (a-1)!.P_n.(P_n-a-1)! - (a-1)!.(P_n-a)!$$

D'après le théorème de *WILSON* [1] :

$$(P_n-1)! = P_n.w_1 - 1 \qquad \text{(avec } w_1 \text{ un nombre entier)}$$

Et donc

$$
\begin{aligned}
0!.(P_n-1)! &= P_n.w_1 - 1 \\
\\
1!.(P_n-2)! &= 0!.P_n.(P_n-2)! - 0!.(P_n-1)! \\
&= P_n.[0!.(P_n-2)! - w_1] + 1 \\
\\
2!.(P_n-3)! &= 1!.P_n.(P_n-3)! - 1!.(P_n-2)! \\
&= P_n.[1!.(P_n-3)! - 0!.(P_n-2)! + w_1] - 1 \\
\\
3!.(P_n-4)! &= 2!.P_n.(P_n-4)! - 2!.(P_n-3)! \\
&= P_n.[2!.(P_n-4)! - 1!.(P_n-3)! + 0!.(P_n-2)! - w_1] + 1 \\
\\
4!.(P_n-5)! &= 3!.P_n.(P_n-5)! - 3!.(P_n-4)! \\
&= P_n.[3!.(P_n-5)! - 2!.(P_n-4)! + 1!.(P_n-3)! - 0!.(P_n-2)! + w_1] - 1
\end{aligned}
$$

...

Le signe de w_1 dans les crochets et de " 1 " à l'extérieur des crochets dépend directement de la parité de a. Et de manière générale, comme nous avions :

$$a!.(P_n-a-1)! = (a-1)!.P_n.(P_n-a-1)! - (a-1)!.(P_n-a)!$$

Nous avons donc aussi (en substituant $(a-1)$ à a) :

$$(a-1)!.(P_n-a)! = (a-2)!.P_n.(P_n-a)! - (a-2)!.(P_n-a+1)!$$

Or, en substituant $(a-1)$ à a dans l'égalité précédente, nous obtenons une nouvelle égalité pour les derniers termes de cette égalité :

$$(a-2)!.(P_n-a+1)! = (a-3)!.P_n.(P_n-a+1)! - (a-3)!.(P_n-a+2)!$$

En remplaçant $(a-2)!.(P_n-a+1)!$ dans l'avant dernière égalité par la dernière égalité que nous venons d'obtenir, nous déduisons :

$$
\begin{aligned}
&(a-1)!.(P_n-a)! \\
&= (a-2)!.P_n.(P_n-a)! - (a-3)!.P_n.(P_n-a+1)! + (a-3)!.(P_n-a+2)!
\end{aligned}
$$

En substituant $(a-1)$ à a dans l'égalité de

$$(a-2)!.(P_n-a+1)!$$

Nous trouverons une nouvelle égalité qui remplacera une fois encore les derniers termes, et en agissant ainsi jusqu'au tout dernier terme de la somme, nous pouvons déduire ce qui suit :

$$\begin{aligned}(a-1)!.(P_n-a)! \quad = \quad & (a-2)!.P_n.(P_n-a+0)! - (a-3)!.P_n.(P_n-a+1)! \\ & +(a-4)!.P_n.(P_n-a+2)! - (a-5)!.P_n.(P_n-a+3)! \\ & +(a-6)!.P_n.(P_n-a+4)! - (a-7)!.P_n.(P_n-a+5)! \\ & +... \\ & \pm(a-2-b)!.(P_n-a+b+1)!\end{aligned}$$

Le dernier terme de la somme étant atteint lorsqu'il vaut $0!.(P_n-1)!$, c'est-à-dire lorsque $b=(a-2)$ (implicitement b, est un nombre entier), donc lorsque :

$$(a-2-b)!.(P_n-a+b+1)! = 0!.(P_n-1)!$$

Le signe de ce dernier terme dépendant du nombre “d'égalités” dont nous aurons eu besoin pour l'atteindre, ce qui dépend directement de la valeur de a. En effet, si a est paire le dernier terme sera négatif, si a est impaire, le dernier terme sera positif (l'exemple le plus simple étant donné pour $a=1$). Comme l'avant dernier terme est du signe contraire du dernier terme :

$$\begin{aligned}(a-1)!.(P_n-a)! \quad = \quad & (a-2)!.P_n.(P_n-a+0)! - (a-3)!.P_n.(P_n-a+1)! \\ & +(a-4)!.P_n.(P_n-a+2)! - (a-5)!.P_n.(P_n-a+3)! \\ & +(a-6)!.P_n.(P_n-a+4)! - (a-7)!.P_n.(P_n-a+5)! \\ & +... \\ & -(-1)^{(a-1)}.0!.P_n.(P_n-2)! + (-1)^{(a-1)}.0!.(P_n-1)!\end{aligned}$$

Sachant que :

$$0!.(P_n-1)! = P_n.w_1 - 1$$

Nous avons donc

$$(-1)^{(a-1)}.0!.(P_n-1)! = (-1)^{(a-1)}.P_n.w_1 - (-1)$$

Nous pouvons alors déduire :

$$\begin{aligned}(a-1)!.(P_n-a)! \quad = \quad & P_n.[(a-2)!.(P_n-a+0)! - (a-3)!.(P_n-a+1)! \\ & +(a-4)!.(P_n-a+2)! - (a-5)!.(P_n-a+3)! \\ & +(a-6)!.(P_n-a+4)! - (a-7)!.(P_n-a+5)! \\ & +... \\ & -(-1)^{(a-1)}.0!.(P_n-2)! + (-1)^{(a-1)}.w_1] - (-1)^{(a-1)}\end{aligned}$$

Et donc, en vue d'une généralisation (précisons que ce qui suit étant valable seulement si $a \in \mathbb{N}$ tel que $2 \leq a \leq P_n$ car pour le cas de $a = 1$, nous avons directement $0!.(P_n-1)! = P_n.w_1 - 1$), pour $2 \leq a \leq P_n$:

$$\begin{aligned}&(a-1)!.(P_n-a)! \\ &= P_n.\left[(-1)^{(a-1)}.w_1 + \sum_{b=0}^{b=(a-2)} (-1)^b.(a-2-b)!.(P_n-a+b)!\right] - (-1)^{(a-1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a-1)!.(P_n-a)! + (-1)^{(a-1)} \\ &= P_n.\left[(-1)^{(a-1)}.w_1 + \sum_{b=0}^{b=(a-2)} (-1)^b.(a-2-b)!.(P_n-a+b)!\right]\end{aligned}$$

D'où l'on déduit la divisibilité :

$$(a-1)!.(P_n-a)! + (-1)^{(a-1)} \qquad \text{est divisible par } P_n.$$

En arithmétique modulaire, cela s'écrit :

$$(a-1)!.(P_n-a)! + (-1)^{(a-1)} \equiv 0 \pmod{P_n}$$

Cas particulier :

Dans le cas où $a = \dfrac{(P_n + 1)}{2}$ et avec P_n impaire seulement (c'est-à-dire $P_n \geq 3$), nous avons :

$$(a-1)!.(P_n - a)! + (-1)^{(a-1)} = \left(\frac{P_n - 1}{2}\right)!^2 + (-1)^{(\frac{P_n-1}{2})}$$

D'où

$$\left(\frac{P_n - 1}{2}\right)!^2 + (-1)^{(\frac{P_n-1}{2})} \qquad \text{est divisible par } P_n \text{ (avec } P_n \geq 3).$$

En arithmétique modulaire, cela s'écrit :

$$\left(\frac{P_n - 1}{2}\right)!^2 + (-1)^{(\frac{P_n-1}{2})} \equiv 0 \pmod{P_n}$$

Remarquons que $a = \dfrac{P_n + 1}{2}$ permet de réduire le plus possible les calculs de manière à ce que les valeurs résultantes de la factorielle (c'est-à-dire $\left(\dfrac{P_n - 1}{2}\right)!$) soient au minimum : pour ce cas, les calculs sont optimisés.

3.8.3 Puissance de nombres factoriels et divisibilité par Pn

Sachant que $P_n \in \mathbb{P}$ et que :

$$(P_n - 1)! + 1 = P_n.w_1$$

(Avec w_1 un nombre entier, donc $[(P_n - 1)! + 1]$ divisible par P_n).

Notons :

$$X = (P_n - 1)!$$

Nous avons :

$$(P_n - 1)! + 1 = X + 1 = P_n.w_1$$

Démarche :

Pour $m \in \mathbb{N}$, toute expression de la forme X^m peut s'écrire :

X^{2a} si m est paire (c'est-à-dire $m = 2a$)

ou

$X^{(2a+1)}$ si m est impaire (c'est-à-dire $m = 2a + 1$)

Cas où m est paire :

$$X^{2a} - 1 = X.(X^{(2a-1)} + 1) - (X + 1)$$

Cas où m est impaire :

$$X^{(2a+1)} + 1 = X.(X^{2a} - 1) + (X + 1)$$

Raisonnement :

- D'après les égalités des 2 cas m paire et m impaire, nous pouvons réécrire d'une part pour le cas de m impaire :

$$\begin{aligned} X^{(2a+1)} + 1 &= X.(X^{2a} - 1) + (X + 1) \\ &= X.[X.(X^{(2a-1)} + 1) - (X + 1)] + (X + 1) \end{aligned}$$

Ou encore,

$$X^{(2a+1)} + 1 = X^{[2(a+1)-1]} + 1$$

Et

$$X^{[2(a+1)-1]} + 1 = X.[X.(X^{(2a-1)} + 1) - (X + 1)] + (X + 1)$$

Pour $a = 0$, nous retrouvons notre expression de départ $(X + 1)$ qui est divisible par P_n, ce qui implique ensuite tous les cas suivants pour a impaire (le fait que la formule soit valable pour un cas la rend valable pour le cas suivant, et ainsi de suite pour chaque cas suivant, il suffit ici de comparer $(a + 1)$ dans le membre de gauche à a dans le membre de droite pour s'en rendre compte directement). En effet, il faut observer $X^{[2(a+1)-1]}$, qui permet d'incrémenter d'une unité successivement et à l'infini la puissance de X, ce qui étend le raisonnement à tous les autres cas de a impaire.

- D'après les égalités des 2 cas m paire et m impaire, nous pouvons réécrire d'autre part pour le cas de m paire :

$$\begin{aligned} X^{2a} - 1 &= X.(X^{(2a-1)} + 1) - (X + 1) \\ &= X.[X.(X^{(2a-2)} - 1) + (X + 1)] - (X + 1) \end{aligned}$$

Ou encore,

$$X^{2(a+1)} - 1 = X.[X.(X^{2a} - 1) + (X + 1)] - (X + 1)$$

Pour $a = 0$, l'expression du membre de droite est divisible par P_n, ce qui implique ensuite tous les cas suivants pour a paire (le fait que la formule soit valable pour un cas la rend valable pour le cas suivant, et ainsi de suite pour chaque cas suivant, il suffit ici de comparer $(a+1)$ dans le membre de gauche à a dans le membre de droite pour s'en rendre compte directement). En effet, il faut observer $X^{2(a+1)}$, qui permet d'incrémenter d'une unité successivement et à l'infini la puissance de X, ce qui étend le raisonnement à tous les autres cas de a paire.

Conclusion :

Nous pouvons regrouper ces 2 cas en un seul. Comme nous avons noté $X = (P_n - 1)!$, nous pouvons généraliser ainsi :

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ (et en admettant que 0 soit divisible par P_n, puisque le résultat de $\dfrac{0}{P_n}$ donne un nombre entier qui vaut 0),

$$(P_n - 1)!^m + (-1)^{(m+1)} \qquad \text{est divisible par } P_n.$$

Ou encore (ce qui suit est strictement équivalent) :

$$(P_n - 1)!^m - (-1)^m \qquad \text{est divisible par } P_n.$$

En arithmétique modulaire, cela s'écrit :

$$(P_n - 1)!^m - (-1)^m \equiv 0 \pmod{P_n}$$

3.8.4 Puissances de nombres factoriels contenant une puissance

Nous avions noté :

$$\varepsilon_{n,x,t} = P_n.w_6 + (-1)^x$$

pour tout $P_n \in \mathbb{P}$, pour tout x et $t \in \mathbb{N}$ tels que $x \geq 1$ et $x \geq 1$, et avec w_6 un nombre entier. Or,

$$\frac{\prod\limits_{h=1}^{h=({P_n}^x-1)} (t.{P_n}^x - h)}{{P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}} = \varepsilon_{n,x,t} \qquad \text{(un nombre entier non divisible par } P_n\text{)}$$

Nous allons maintenant nous demander ce qu'il en est de la divisibilité par P_n pour $(\varepsilon_{n,x,t})^m$ avec $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$, $\varepsilon_{n,x,t}$ possédant toutes les propriétés vues précédemment. Comme dans la partie "**2 démonstration**" (page 52), nous allons simplifier les résultats pour alléger l'écriture :

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{n,x,t})^m &= [P_n.w_6 + (-1)^x]^m \\ &= (P_n.w_6).f(P_n.w_6) + (-1)^{(x.m)} \end{aligned}$$

En notant $(w_6).f(P_n.w_6) = w$ (avec w un "nombre entier polynômiale" en fonction de P_n et de w_6, tel que défini au début du paragraphe "**Suite 2 de l'étude de** $({P_n}^x - 1)!$") de la sous-partie "**2.2.2 Début de l'étude**" page 62), nous obtenons :

$$(\varepsilon_{n,x,t})^m = P_n.w + (-1)^{(x.m)}$$

Et donc

$$(\varepsilon_{n,x,t})^m - (-1)^{(x.m)} = P_n.w$$

En arithmétique modulaire, cela s'écrit :

$$(\varepsilon_{n,x,t})^m - (-1)^{(x.m)} \equiv 0 \pmod{P_n}$$

** Remarque 1 :*

Si nous considérons que 0 ne fait pas partie des multiples de P_n, nous devons alors restreindre le domaine de définition de m à $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.

Si nous considérons que 0 fait partie des multiples de P_n, nous pouvons alors étendre le domaine de définition de m à $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$. En effet, puisque pour $m = 0$ (et donc $w = 0$), l'égalité est bien respectée.

** Remarque 2 :*

Nous avons noté

$$\varepsilon_{n,x,t} = \frac{\displaystyle\prod_{h=1}^{h=({P_n}^x-1)} (t.{P_n}^x - h)}{{P_n}^{\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x\right)}}$$

Dans le cas particulier de $x = 1$, $t = 1$ et $m = 2$, nous pouvons retrouver la formule de *MINÁC-WILLANS* [4] car :

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{n,1,1})^2 &= (P_n - 1)!^2 \\ &= P_n.w + 1 \\ \frac{(\varepsilon_{n,1,1})^2}{P_n} &= w + \frac{1}{P_n} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sin^2\left[\pi.\frac{(\varepsilon_{n,1,1})^2}{P_n}\right] &= \sin^2\left[\pi.\left(w + \frac{1}{P_n}\right)\right] \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi}{P_n}\right) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\sin^2\left[\pi.\dfrac{(\varepsilon_{n,1,1})^2}{P_n}\right]}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{P_n}\right)} = 1$$

Et donc la formule de *MINÁC-WILLANS* :

$$\frac{\sin^2\left[\pi.\dfrac{(P_n-1)!^2}{P_n}\right]}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{P_n}\right)} = 1$$

** Remarque 3 :*

Le fait d'élever la factorielle au carré permet d'éliminer le problème de $P_n = 4$ lorsque $x = 1$. En effet, lors du "**(développement 2)**" de la sous-partie "**2.2.2 Début de l'étude**" (page 62), nous avions soulevé et résolu ce problème. De la même manière, nous pouvons encore ici effectuer une vérification des conditions nécessaires pour éviter ce problème.

Nous voulons :

$$P_n^{\left(\frac{P_n{}^x-1}{P_n-1}-x\right).m} \geq P_n{}^x$$

Donc

$$\left(\frac{P_n{}^x-1}{P_n-1}-x\right).m \geq x$$

ici, pour $x = 2$, nous avons (après simplifications) :

$$P_n \geq 1 + \frac{2}{m}$$

Ce qui est effectivement le cas si $m \geq 2$.

Continuons alors les vérifications pour $x \geq 3$, nous avions noté :

$$\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1} - x\right).m \geq x$$

Et donc

$$\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1}\right).m - x.(m+1) \geq 0$$

Le plus petit nombre premier étant 2, nous avons :

$$\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1}\right).m - x.(m+1) \geq \left(\frac{2^x - 1}{2 - 1}\right).m - x.(m+1)$$

Or, pour $x \geq 3$:

$$\begin{aligned}
2^x > 2.x + 1 &\geq \left(1 + \frac{1}{m}\right).x + 1 \qquad \text{pout tout } m \in \mathbb{N},\ m \geq 1 \\
2^x &> \left(1 + \frac{1}{m}\right).x + 1 \\
2^x - 1 - x.(1 + 1/m) &> 0 \\
\frac{2^x - 1}{2 - 1}.m - x.(m+1) &> 0
\end{aligned}$$

Et donc

$$\left(\frac{{P_n}^x - 1}{P_n - 1}\right).m - x.(m+1) > 0$$

Ce qui est une condition nécessaire pour éviter tout problème d'incohérence, cela nous permettant de conclure :

dès que $m \geq 2$, il n'y a plus de défaut tel que celui pour $m = 1$, $P_n = 4$, $x = 1$. Nous avons donc toujours, pour $m \geq 2$:

$$(\varepsilon_{n,x,t})^m - (-1)^{(x.m)} = P_n.w$$

Donc

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{n,x,t})^m &= P_n.w + (-1)^{(x.m)} \\
\sin^2\left(\frac{\pi.(\varepsilon_{n,x,t})^m}{P_n}\right) &= \sin^2\left(\frac{\pi.(w + (-1)^{(x.m)})}{P_n}\right) \\
&= \sin^2\left(\frac{\pi.(-1)^{(x.m)}}{P_n}\right) \\
&= \sin^2\left(\frac{\pi}{P_n}\right)
\end{aligned}$$

Et donc finalement, pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$:

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi.(\varepsilon_{n,x,t})^m}{P_n}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{P_n}\right)} = 1$$

Ce qui aurait aussi pu servir de base à notre grande formule de décomposition $D(N)$.

3.8.5 Nombres factoriels, formule simplifiée s(M) et divisibilité

Pour compléter ce que nous venons de voir précédemment, prenons ce qui suit en considération. Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, nous avons :

$(M-1)!^m = M.w_0$ si $M \notin \mathbb{P}$ (avec w_0 un nombre entier variable)

(voir paragraphe "***(développement 1)***" de la sous-partie "**2.2.2 Début de l'étude**" page 62, pour la démonstration)

Et

$(M-1)!^m = M.w_0 + (-1)^m$ si $M \in \mathbb{P}$ (avec w_0 un nombre entier variable)

Or, nous savons que (voir la partie "**3.1 Formule simplifiée s(M)**" page 147, concernant la formule $s(M)$ pour rappels) :

$s(M) = 0$ si $M \notin \mathbb{N}$
$s(M) = 1$ si $M \in \mathbb{N}$

Ce qui nous permet de déduire de ces 2 cas une formule plus générale :

$$(M-1)!^m = M.w_0 + s(M).(-1)^m$$

(en effet, nous vérifions facilement que nous retrouvons bien les 2 cas précédents)

Et donc

$$\frac{(M-1)!^m - s(M).(-1)^m}{M} = w_0$$

Ce qui permet de conclure que $\dfrac{(M-1)!^m - s(M).(-1)^m}{M}$ vaut toujours un nombre entier.

En arithmétique modulaire, cela s'écrit :

$$(M-1)!^m - s(M).(-1)^m \equiv 0 \pmod{M}$$

Remarquons que nous aurions pu raisonner de la même manière en remplaçant P_n par M avec $\varepsilon_{n,x,t}$ ou avec :

$$(P_n - 2)!^m - 1 = w_{2'}$$

(vu en paragraphe "**3.8.1 Nombres factoriels et divisibilité par Pn**" page 202)

Nous aurions pu déduire (le principe du raisonnement est le même) :

$$(M - 2)!^m - s(M) \equiv 0 \pmod{M} \qquad \text{pour } m \in \mathbb{N},\ m \geq 2$$

Mais reprenons le raisonnement depuis :

$$\frac{(M-1)!^m - s(M).(-1)^m}{M} = w_0 \qquad \text{et poursuivons.}$$

A partir de cette égalité, nous pouvons facilement en donner une autre :

$$\frac{(M-1)!^m - s(M).(-1)^m}{M} + \frac{(-1)^{(m+a)}}{M} = w_0 + \frac{(-1)^{(m+a)}}{M} \qquad \text{avec } a \in \mathbb{N}$$

Donc

$$\frac{(M-1)!^m + [(-1)^a - s(M)].(-1)^m}{M} = w_0 + \frac{(-1)^{(m+a)}}{M}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sin^2\left\{\pi.\frac{(M-1)!^m + [(-1)^a - s(M)].(-1)^m}{M}\right\} &= \sin^2\left\{\pi.\left[w_0 + \frac{(-1)^{(m+a)}}{M}\right]\right\} \\
&= \sin^2\left\{\pi.\frac{(-1)^{(m+a)}}{M}\right\} \\
&= \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)
\end{aligned}$$

Pour conclure, quelquesoit M et $m \in \mathbb{N}$, tels que $M \geq 2$ et $m \geq 2$, et pour tout $a \in \mathbb{N}$, nous avons :

$$\sin^2 \left\{ \pi . \frac{(M-1)!^m + [(-1)^a - s(M)].(-1)^m}{M} \right\} = \sin^2 \left(\frac{\pi}{M} \right)$$

Nous pouvons même ajouter quelques conditions pour lesquels la cohérence de cette formule est respectée (en accord avec les remarques vues tout au long de ce chapitre) :

- *CONDITION 1 :*

  La cohérence est respectée :

  ▷ Quelquesoit $m \in \mathbb{N}$, tel que $m \geq 2$,

  ▷ Quelquesoit $M \in \mathbb{N}$, tel que $M \geq 2$,

  ▷ Quelquesoit $a \in \mathbb{N}$.

- *CONDITION 2 :*

  La cohérence est respectée :

  ▷ Pour $m = 1$ (dans ce cas, un défaut apparaît lorsque $M = 4$ seulement, c'est pour cela que cette valeur de M doit être évitée),

  ▷ Quelquesoit $M \geq 2$ telle que $M \in \mathbb{N} - \{4\}$ (notamment à cause du défaut constaté et relaté lors de l'étude de la "**fonction de Correction A**" de la sous-partie "**2.2.4 Supposons Pn non connu (construction de Fp, suite)**" page 129),

  ▷ Quelquesoit $a \in \mathbb{N}$.

- *CONDITION 3 :*

  La cohérence est respectée :

  ▷ Pour $m = 0$,

  ▷ Pour $M \in \mathbb{P}$ uniquement,

  ▷ Quelquesoit $a \in \mathbb{N}$.

Cette dernière condition mérite quelques explications. En effet, lorsque $m = 0$, nous avons :

$$\sin^2\left\{\pi.\frac{(M-1)!^m + [(-1)^a - s(M)].(-1)^m}{M}\right\} = \sin^2\left\{\pi.\frac{1 + (-1)^a - s(M)}{M}\right\}$$

Si a est paire, nous avons :

$$\sin^2\left\{\pi.\frac{1 + (-1)^a - s(M)}{M}\right\} = \sin^2\left\{\pi.\frac{2 - s(M)}{M}\right\}$$

Or, d'après ce que nous avons conclu, nous devons avoir :

$$\sin^2\left\{\pi.\frac{2 - s(M)}{M}\right\} = \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)$$

Ce qui est effectivement le cas seulement si $s(M) = 1$, autrement dit seulement si $M \in \mathbb{P}$.

Et si a est impaire, nous avons :

$$\sin^2\left\{\pi.\frac{1 + (-1)^a - s(M)}{M}\right\} = \sin^2\left\{-\pi.\frac{s(M)}{M}\right\}$$

Or, d'après ce que nous avons conclu, nous devons avoir :

$$\sin^2\left\{-\pi.\frac{s(M)}{M}\right\} = \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)$$

Ce qui est effectivement le cas seulement si $s(M) = 1$, autrement dit seulement si $M \in \mathbb{P}$.

Ce qui permet d'établir la "*CONDITION 3*" , qui précise que pour $m = 0$, et pour tout $a \in \mathbb{N}$, nous devons avoir uniquement $M \in \mathbb{P}$.

Remarque 1 :

Pour les mêmes raisons, ces 3 conditions sont également valables pour la formule vue précédemment, c'est-à-dire pour :

$$\frac{(M-1)!^m - s(M).(-1)^m}{M} = w_0$$

Remarque 2 :

Etant donné la formule établie pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$:

$$\frac{(M-1)!^m - s(M).(-1)^m}{M} = w_0$$

Le développement en séries entières de *TAYLOR - MAC LAURIN* des fonctions "*SINUS*" contenues dans la formule $s(M)$ permet de donner une équivalence au nombre entier w_0 en fonction de nombres entiers seulement.

3.8.6 Formule f(M;x), puissance et divisibilité : Formule D(N) généralisée

Pour poursuivre ce raisonnement, nous pouvons aborder cette partie en rappelant quelques résultats de la sous-partie “**2.2 Démonstration complète**”.

<u>IMPORTANT :</u>

Nous reprendrons les mêmes notations que dans la sous-partie “**2.2 Démonstration complète**” page 54 (notamment pour les entiers symbolisés par des lettres).

Nous avions noté :

$$F_p = \prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)$$

Et

$$M^{F_c} = M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}$$

Et donc (ce qui est une partie de la formule de α_M, vue page 140)

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = \frac{\displaystyle\prod_{h=1}^{h=(M^x-1)} (N-h)}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}}$$

Rappelons aussi que nous avions noté :

$$f(M;x) = \cos^2\left[\pi.\frac{(M-1).(M-2).(M-3)}{4}\right].\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{M^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)}$$

Dont les résultats suivants ont déjà été démontrés pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$:

$f(M;x) = 1$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x.
$f(M;x) = 0$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x.
$f(M;x) = 0$ pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$.

Ces résultats provenaient déjà de résultats intermédiaires qu'il est aussi important de rappeler (en suivant le même ordre) :

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x :

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = \frac{F_p}{{P_n}^{F_c}} = w_6 + \frac{(-1)^x}{P_n}$$

(où w_6 est un nombre entier et $P_n \in \mathbb{P}$)

Dans ce cas, ceci est équivalent à :

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = w_6 + \frac{(-1)^x}{M}$$

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x :

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = \frac{F_p}{{P_n}^{F_c}} = E$$

(où E est un nombre entier)

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$:

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = G'.\varepsilon_{M,x}$$

(G' est un nombre entier, $\varepsilon_{M,x}$ entier sauf pour le seul cas de $M = 4$ et $x = 1$)

En adoptant une nouvelle écriture afin de la réduire, nous pouvons remplacer toutes les lettres représentant un nombre entier (tel que w_6 , E et $G'.\varepsilon_{M,x}$) par une lettre unique (avec une la lettre en indice se rapportant à la puissance m) tel que W_m (qui est par conséquent un nombre entier), ce qui permet de noter :

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x :

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = W_m + \frac{(-1)^x}{M}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} = M.W_m + (-1)^x$$

Avec :

$$M^{(F_c-1)} = M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x\right)}$$

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x :

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = W_m$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} = M.W_m$$

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$:

$$\frac{F_p}{M^{F_c}} = W_m \qquad \text{(sauf pour le seul cas de } M = 4 \text{ et } x = 1\text{)}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} = M.W_m \qquad \text{(sauf pour le seul cas de } M = 4 \text{ et } x = 1\text{)}$$

Maintenant, poursuivons le raisonnement en notant $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq 2$ et développons ceci :

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x :

$$\begin{aligned} \left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m &= [M.W_m + (-1)^x]^m \\ &= (M.W_m).f(M.W_m) + (-1)^{(x.m)} \end{aligned}$$

En notant W un nombre entier tel que, dans ce cas :

$$(W_m).f(M.W_m) = W$$

(avec, pour alléger le développement, W un nombre entier "polynômiale" en fonction de M et de W_m, tel que défini dans le paragraphe "**Suite 2 de l'étude de** $({P_n}^x - 1)!$" de la sous-partie "**2.2.2 Début de l'étude**" page 62)

Nous obtenons :

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m = M.W + (-1)^{(x.m)}$$

Et donc

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m - (-1)^{(x.m)} = M.W$$

En arithmétique modulaire, cela s'écrit :

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m - (-1)^{(x.m)} \equiv 0 \pmod{M}$$

(dans ce cas précis où $M \in \mathbb{P}$, et où N est un multiple de M^x)

Rappelons que, dans ce cas :

$$f(M;x) = 1 \qquad \text{(ce qui permettra de faire la synthèse finale)}$$

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x,
Ou bien pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$:

$$\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}} = M.W_m$$

(nous avions déterminé que le défaut pour $M = 4$ et $x = 1$ est éliminé dès que $m \geq 2$, il existe seulement pour $m = 1$)

Donc

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m = [M.W_m]^m$$

Or,

$$[M.W_m]^m = M.[M^{(m-1)}.W_m{}^m]$$

Ce qui est clairement un nombre divisible par M (puisque nous sommes dans le cas où $m \geq 2$).

En notant ici comme précédemment W ce nombre entier (l'intérêt de ne prendre qu'une seule lettre pour représenter un nombre entier est notable pour la conclusion intermédiaire qui va suivre) tel que :

$$W = [M^{(m-1)}.W_m{}^m]$$

Nous obtenons :

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m = M.W$$

Rappelons que, dans ces 2 cas :

$$f(M; x) = 0 \qquad \text{(ce qui permettra de faire la synthèse finale)}$$

Conclusion intermédiaire :

En regroupant les résultats obtenus précédemment, nous avons (W est un nombre variable, mais toujours un nombre entier) :

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x :

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m - (-1)^{(x.m)} = M.W$$

D'où

$$\frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m}{M} = W + \frac{(-1)^{(x.m)}}{M}$$

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x,
Ou bien pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$:

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m = M.W$$

D'où

$$\frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m}{M} = W$$

Cela va nous permettre de conclure. En effet, W ne pouvant représenter qu'un nombre entier dans tous les cas.

Reprenons les 2 cas abordés dans notre "*Conclusion intermédiaire*" :

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x :

$$\begin{aligned}
\sin^2\left\{\pi.\frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m}{M}\right\} &= \sin^2\left\{\pi.\left[W + \frac{(-1)^{(x.m)}}{M}\right]\right\} \\
&= \sin^2\left\{\pi.\frac{(-1)^{(x.m)}}{M}\right\} \\
&= \sin^2\left\{\frac{\pi}{M}\right\}
\end{aligned}$$

Et donc, dans ce cas :

$$\frac{\sin^2\left\{\pi.\frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m}{M}\right\}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} = 1$$

C'est-à-dire la même valeur que $f(M;x)$ pour le même cas.

- Pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x,
Ou bien pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\sin^2\left\{\pi.\frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m}{M}\right\} &= \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Et donc, dans ce cas :

$$\frac{\sin^2\left\{\pi.\frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m}{M}\right\}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} = 0$$

C'est-à-dire la même valeur que $f(M;x)$ pour le même cas.

Tout ceci nous permet maintenant de conclure que, pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$:

$$\frac{\sin^2\left\{\pi.\dfrac{\left[\dfrac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m}{M}\right\}}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)} = f(M;x)$$

Ainsi, il devient possible d'établir une nouvelle formule plus générale pour la décomposition d'un nombre entier $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ en produit de facteurs premiers. Nous avions noté $D(N)$ une telle formule, celle-ci contenant la formule $f(M;x)$ que nous pouvons maintenant remplacer par l'équivalent que nous venons de donner. En effet, rappelons que :

$$\alpha_M = \sum_{x=1}^{x\to+\infty} f(M;x)$$

Et que :

$$N = D(N) = \prod_{M=2}^{M\to+\infty} M^{(\alpha_M)} = \prod_{M=2}^{M=N} M^{(\alpha_M)}$$

Ce qui permet de déduire finalement que, pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ et pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$:

$$D(N) = N = \prod_{M=2}^{M=N} M^{\left\{\dfrac{1}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)}.\sum_{x=1}^{x\to+\infty}\sin^2\left[\left(\dfrac{\prod_{h=1}^{h=(M^x-1)}(N-h)}{M^{\left(\dfrac{M^x-1}{M-1}-x\right)}}\right)^m.\dfrac{\pi}{M}\right]\right\}}$$

Ce qui est une formule plus générale pour la décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers (attention, il s'agit bien de crochets dans cette formule, et non des symboles des "valeurs absolues" , ni de ceux des "parties entières", ils ont la même fonction que de simples parenthèses). La généralisation de la formule $D(N)$ permet donc également de généraliser le "Théorème de décomposition d'un nombre entier N en produit de facteurs premiers" (page 146), sans en modifier les caractéristiques dues au domaine de définition de N (nous avons toujours $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$).

Synthèse finale :

Dans la sous-partie précédente(“**3.8.5 Nombres factoriels, formule simplifiée s(M) et divisibilité**” page 220), nous avions pu faire un lien entre $s(M)$ et le reste de la formule. De manière identique, nous pouvons dans cette partie établir un lien entre la formule $f(M;x)$ et les formules que nous venons de voir :

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m = M.W + f(M;x).(-1)^{(x.m)}$$

D'où

$$\frac{\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m - f(M;x).(-1)^{(x.m)}}{M} = W$$

En arithmétique modulaire, cela s'écrit :

$$\left[\frac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m - f(M;x).(-1)^{(x.m)} \equiv 0 \pmod{M}$$

Comme pour la partie précédente, et pour des raisons similaires, la cohérence de ces formules est respectée dans 3 conditions :

- *CONDITION 1 :*

  ▷ Quelquesoit $m \in \mathbb{N}$, tel que $m \geq 2$,
  ▷ Quelquesoit $M \in \mathbb{N}$, tel que $M \geq 2$,
  ▷ Quelquesoit $N \in \mathbb{N}$, tel que $N \geq 1$.

- *CONDITION 2 :*

  ▷ Pour $m = 1$ (dans ce cas, un défaut apparaît lorsque $M = 4$ seulement, cette valeur de M doit donc être évitée),

  ▷ Quelquesoit $M \geq 2$ telle que $M \in \mathbb{N} - \{4\}$ (à cause du défaut relaté),

  ▷ Quelquesoit $N \in \mathbb{N}$, tel que $N \geq 1$.

- *CONDITION 3 :*

  ▷ Pour $m = 0$,
  ▷ Pour $M \in \mathbb{P}$ uniquement,
  ▷ Pour N multiple de M^x uniquement.

Il est encore possible ici de donner une autre expression de cette formule (les conditions que nous venons de donner y seront toujours respectées). En effet, en reprenant :

$$\frac{\left[\dfrac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m - f(M;x).(-1)^{(x.m)}}{M} = W$$

Avec $a \in \mathbb{N}$, nous pouvons facilement établir que :

$$\frac{\left[\dfrac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m - f(M;x).(-1)^{(x.m)}}{M} + \frac{(-1)^{(x.m+a)}}{M} = W + \frac{(-1)^{(x.m+a)}}{M}$$

Donc

$$\frac{\left[\dfrac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m + [(-1)^a - f(M;x)].(-1)^{(x.m)}}{M} = W + \frac{(-1)^{(x.m+a)}}{M}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sin^2\left\{\pi.\frac{\left[\dfrac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m + [(-1)^a - f(M;x)].(-1)^{(x.m)}}{M}\right\} &= \sin^2\left\{\pi.\left[W + \frac{(-1)^{(x.m+a)}}{M}\right]\right\} \\
&= \sin^2\left\{\pi.\frac{(-1)^{(x.m+a)}}{M}\right\} \\
&= \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)
\end{aligned}$$

Pour finir, dans le respect des 3 conditions citées précédemment, et pour tout $a \in \mathbb{N}$, nous pouvons conclure que :

$$\sin^2\left\{\pi.\frac{\left[\dfrac{F_p}{M^{(F_c-1)}}\right]^m + [(-1)^a - f(M;x)].(-1)^{(x.m)}}{M}\right\} = \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)$$

Digression :

La conséquence de tout ces travaux est qu'il existe plusieurs écritures possibles pour obtenir des résultats équivalents.

Etant donné que $s(M)$ n'est qu'un cas particulier de $f(M;x)$, nous pouvons encore donner un exemple de réécriture avec la formule $s(M)$ puisque dans le cas où $x = 1$ et $N = M$, nous avons aussi de manière plus générale pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$:

$$s(M) = \frac{\sin^2\left[(M-1)!^m.\dfrac{\pi}{M}\right]}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)}$$

Ou encore, d'après les travaux de l'étude de la sous-partie "**3.8.1 Nombres factoriels et divisibilité par Pn**" (page 202), nous avons aussi pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$:

$$s(M) = \frac{\sin^2\left[(M-2)!^m.\dfrac{\pi}{M}\right]}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)}$$

3.8.7 Produit de nombres factoriels et divisibilité par M, généralisation

Appliquons maintenant le raisonnement de la sous-partie précédente ("**3.8.6 Formule f(M;x), puissance et divisibilité : Formule D(N) généralisée**" page 225) aux formules de la sous-partie "**3.8.2 Produit de nombres factoriels et divisibilité par Pn**" (page 207). Ici, les démonstrations vont être simplifiées pour améliorer la lisibilité.

Rappelons que nous avions déduit (pour 3 conditions) :

$$\frac{(M-1)!^m + [(-1)^a - s(M)].(-1)^m}{M} = w_0 + \frac{(-1)^{(m+a)}}{M}$$

Ce qui est équivalent à :

$$(M-1)!^m = M.w_0 + s(M).(-1)^m$$

La cohérence de ces formules étant respectée pour les 3 conditions :

- *CONDITION 1 :*

  ▷ Quelquesoit $m \in \mathbb{N}$, tel que $m \geq 2$,
  ▷ Quelquesoit $M \in \mathbb{N}$, tel que $M \geq 2$,
  ▷ Quelquesoit $a \in \mathbb{N}$.

- *CONDITION 2 :*

  ▷ Pour $m = 1$ (dans ce cas, un défaut apparaît lorsque $M = 4$ seulement, cette valeur de M doit donc être évitée),

  ▷ Quelquesoit $M \geq 2$ telle que $M \in \mathbb{N} - \{4\}$ (à cause du défaut relaté),

  ▷ Quelquesoit $a \in \mathbb{N}$.

- *CONDITION 3 :*

  ▷ Pour $m = 0$,
  ▷ Pour $M \in \mathbb{P}$ uniquement,
  ▷ Quelquesoit $a \in \mathbb{N}$.

Divisons encore l'étude avec des sous-parties tel que :

$*$ **<u>Sous-Partie 1 :</u>**

Reprenons le raisonnement depuis : $(M-1)!^m = M.w_0 + s(M).(-1)^m$

En changeant w_0 en W_1 et en précisant que W_1, W_2 , W_3 , ... , W_{b1} est toujours un nombre entier (pour rendre la démonstration plus claire) où $b1 \in \mathbb{N}$, $b1 \geq 2$:

$$(M-1)!^m = M.W_1 + s(M).(-1)^m$$

Raisonnons dans le cas de la "*CONDITION 2*" où $m = 1$ (ce cas est plus simple car il évite d'avoir à développer le produit dû à la puissance m) par étapes :

$(M-1)! = M.W_1 - s(M)$ pour $M \in \mathbb{N} - \{4\}$ tel que $M \geq 2$.

- *Etape 1 :*

$$\begin{aligned} (M-1)! &= M.W_1 - s(M) \\ (M-1).(M-2)! &= M.W_1 - s(M) \\ M.(M-2)! - 1.(M-2)! &= M.W_1 - s(M) \\ (M-2)! &= M.[(M-2)! - W_1] + s(M) \\ (M-2)! &= M.W_2 + s(M) \end{aligned}$$

Pour $M \in \mathbb{N} - \{4\}$ (CONDITION 2) tel que $M \geq 2$.

- *Etape 2 :*

$$\begin{aligned} (M-2)! &= M.W_2 + s(M) \\ (M-2).(M-3)! &= M.W_2 + s(M) \\ M.(M-3)! - 2.(M-3)! &= M.W_2 + s(M) \\ 2.(M-3)! &= M.[(M-3)! - W_2] - s(M) \\ 2.(M-3)! &= M.W_3 - s(M) \end{aligned}$$

Pour $M \in \mathbb{N} - \{4\}$ (CONDITION 2) tel que $M \geq 3$.

- *Etape 3 :*

$$\begin{aligned}
2.(M-3)! &= M.W_3 - s(M)\\
2.(M-3).(M-4)! &= M.W_3 - s(M)\\
2.M.(M-4)! - 2.3.(M-4)! &= M.W_3 - s(M)\\
2.3.(M-4)! &= M.[2.(M-4)! - W_3] + s(M)\\
2.3.(M-4)! &= M.W_4 + s(M)\\
3!.(M-4)! &= M.W_4 + s(M)
\end{aligned}$$

Pour $M \in \mathbb{N} - \{4\}$ (CONDITION 2) tel que $M \geq 4$, ce qui revient à $M \geq 5$ (puisque 4 doit être en dehors du domaine de définition de M).

- *Etape 4 :*

$$\begin{aligned}
3!.(M-4)! &= M.W_4 + s(M)\\
3!.(M-4).(M-5)! &= M.W_4 + s(M)\\
3!.M.(M-5)! - 4!.(M-5)! &= M.W_4 + s(M)\\
4!.(M-5)! &= M.[3!.(M-5)! - W_4] - s(M)\\
4!.(M-5)! &= M.W_5 - s(M)
\end{aligned}$$

Pour $M \in \mathbb{N}$ tel que $M \geq 5$ (à partir de cette étape, nou n'avons plus besoin de restreindre le domaine de définition de M comme le préconise la CONDITION 2 afin d'éviter le cas où $M = 4$, puisque ce cas est nécessairement évité dès que $M \geq 5$).

- *Etape 5 :*

$$\begin{aligned}
4!.(M-5)! &= M.W_5 - s(M)\\
4!.(M-5).(M-6)! &= M.W_5 - s(M)\\
4!.M.(M-6)! - 5!.(M-6)! &= M.W_5 - s(M)\\
5!.(M-6)! &= M.[4!.(M-5)! - W_5] + s(M)\\
5!.(M-6)! &= M.W_6 + s(M)
\end{aligned}$$

Pour $M \in \mathbb{N}$ tel que $M \geq 6$.

...

- *Etape* $(b1-1)$, *nous obtenons finalement :*

$$(b1-1)!.(M-b1)! = M.W_{b1} + s(M).(-1)^{b1}$$

Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ et pour $M \geq b1$, tel que $b1 \in \mathbb{N}$ et $b1 \geq 2$.

Donc

$$\frac{(b1-1)!.(M-b1)!}{M} = W_{b1} + \frac{s(M).(-1)^{b1}}{M}$$

Et donc

$$\sin^2\left[\pi.\frac{(b1-1)!.(M-b1)!}{M}\right] = \sin^2\left\{\pi.\left[W_{b1} + \frac{s(M).(-1)^{b1}}{M}\right]\right\}$$

Si $M \in \mathbb{P}$, nous avons $s(M) = 1$:

$$\sin^2\left[\pi.\frac{(b1-1)!.(M-b1)!}{M}\right] = \sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)$$

D'où

$$\frac{\sin^2\left[\pi.\frac{(b1-1)!.(M-b1)!}{M}\right]}{\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} = 1$$

Si $M \notin \mathbb{P}$ (CONDITION 2 : éviter le cas de $M = 4$), nous avons $s(M) = 0$:

$$\sin^2\left[\pi.\frac{(b1-1)!.(M-b1)!}{M}\right] = 0$$

D'où

$$\frac{\sin^2\left[\pi.\frac{(b1-1)!.(M-b1)!}{M}\right]}{\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} = 0$$

Et finalement :

$$\frac{\sin^2\left[\pi.\frac{(b1-1)!.(M-b1)!}{M}\right]}{\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} = s(M)$$

- *Cas particulier :*

Pour $(b1 - 1) = (M - b1)$ nous sommes dans le cas particulier où le calcul est réduit au minimum (calcul "optimal").

Dans ce cas, nous avons :

$$M = 2.b1 - 1 \qquad \text{c'est-à-dire le cas de } M \text{ étant un nombre impaire.}$$

Comme nous devons avoir $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$, nous devons aussi avoir $b1 \in \mathbb{N}$, $b1 \geq 2$.

$$b1 = \frac{M+1}{2}$$

(comme M est impaire, il n'est plus utile de conseiller ici d'éviter le cas de $M = 4$ préconisé par la CONDITION 2)

Nous pouvons conclure que, pour $M = 2.b1 - 1$ et pour $b1 \in \mathbb{N}$ tel que $b1 \geq 2$:

$$\frac{\sin^2\left[\left(\frac{M-1}{2}\right)!^2.\frac{\pi}{M}\right]}{\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)} = s(M)$$

(Ce qui est une alternative à la démonstration du paragraphe "**3.8.2 Produit de nombres factoriels et divisibilité par Pn**" page 207)

- *Remarque :*

Pour $b1 = \dfrac{M+1}{2}$, nous avons aussi :

$$\frac{(b1-1)!.(M-b1)!}{M} = W_{b1} + \frac{s(M).(-1)^{b1}}{M}$$

D'où

$$\begin{aligned}\left(\frac{M-1}{2}\right)!^2 &= M.W_{b1} + s(M).(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)} \\ &= M.W_{b1} + s(M).(i)^{(M+1)} \qquad \text{(où } i \text{ est le nombre imaginaire)}\end{aligned}$$

$*$ **Sous-Partie 2 :**

Ce n'est qu'à partir de maintenant que le raisonnement va trouver un intérêt significatif (l'intérêt viendra de la synthèse des parties que nous allons aborder). Ce raisonnement porte sur le cas particulier précédent. Changeons quleque peu les notations : $W_{b1,c}$ est un nombre entier avec c un nombre entier. Reprenons par étape :

$$\left(\frac{M-1}{2}\right)!^2 = M.W_{b1} + s(M).(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

Pour $M = 2.b1 - 1$, avec $b1 \in \mathbb{N}$, $b1 \geq 2$.

- *Etape 1 :*

Notons $W_{b1} = W_{b1,1}$

$$\left(\frac{M-1}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,1} + s(M).(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$
$$\left(\frac{M-1}{2}\right)^2 . \left(\frac{M-1}{2} - 1\right)!^2 = M.W_{b1,1} + s(M).(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$
$$(M-1)^2 . \left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 = 2^2.M.W_{b1,1} + s(M).2^2.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$
$$(M^2 - 2M + 1) . \left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 = 2^2.M.W_{b1,1} + s(M).2^2.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

En développant, nous obtenons des multiples de M, que nous allons tous regrouper dans le membre de droite de l'égalité, pour obtenir :

$$M.(M-2).\left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 + 1.\left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 = 2^2.M.W_{b1,1} + s(M).2^2.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$1.\left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 = 2^2.M.W_{b1,1} - M.(M-2).\left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 + s(M).2^2.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$1.\left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 = 2^2.M.\left[W_{b1,1} - (M-2).\left(\frac{M-3}{2}\right)!^2\right] + s(M).2^2.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

Or, $2^2.\left[W_{b1,1} - (M-2).\left(\frac{M-3}{2}\right)!^2\right]$ est un nombre entier, notons le $W_{b1,2}$.

*(**ATTENTION :** pour les étapes suivantes, nous ne détaillerons pas autant le passage que nous venons d'effectuer, qui développe et regroupe les multiples de M, car il est finalement évident à comprendre)*

Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 3$ (avec $M = 2.b1 - 1$), nous avons donc :

$$\left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,2} + s(M).2^2.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

- *Etape 2 :*

$$\left(\frac{M-3}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,2} + s(M).2^2.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$\left(\frac{M-3}{2}\right)^2.\left(\frac{M-5}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,2} + s(M).2^2.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$(M^2 - 6M + 3^2).\left(\frac{M-5}{2}\right)!^2 = 2^2.M.W_{b1,2} + s(M).2^4.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$M(M-6).\left(\frac{M-5}{2}\right)!^2 + 3^2.\left(\frac{M-5}{2}\right)!^2 = 2^2.M.W_{b1,2} + s(M).2^4.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$3^2.\left(\frac{M-5}{2}\right)!^2 = M.\left[2^2.W_{b1,2} - (M-6).\left(\frac{M-5}{2}\right)!^2\right] + s(M).2^4.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$3^2.\left(\frac{M-5}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,3} + s(M).2^4.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 5$ (avec $M = 2.b1 - 1$).

- *Etape 3 :*

$$3^2.\left(\frac{M-5}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,3} + s(M).2^4.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$3^2.\left(\frac{M-5}{2}\right)^2.\left(\frac{M-7}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,3} + s(M).2^4.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$3^2.(M^2 - 10M + 5^2).\left(\frac{M-7}{2}\right)!^2 = 2^2.M.W_{b1,3} + s(M).2^6.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$(3.5)^2.\left(\frac{M-7}{2}\right)!^2 = M.\left[2^2.W_{b1,3} - (M-10).\left(\frac{M-7}{2}\right)!^2\right] + s(M).2^6.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

$$(3.5)^2.\left(\frac{M-7}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,4} + s(M).2^6.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 7$ (avec $M = 2.b1 - 1$).

- *Etape 4 :*

$$(3.5)^2.\left(\frac{M-7}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,4} + s(M).2^6.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$
$$(3.5)^2.\left(\frac{M-7}{2}\right)^2.\left(\frac{M-9}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,4} + s(M).2^6.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$
$$(3.5)^2.(M^2-14M+7^2).\left(\frac{M-9}{2}\right)!^2 = 2^2.M.W_{b1,4} + s(M).2^8.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$
$$(3.5.7)^2.\left(\frac{M-9}{2}\right)!^2 = M.\left[2^2.W_{b1,4} - (M-14).\left(\frac{M-9}{2}\right)!^2\right] + s(M).2^8.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$
$$(3.5.7)^2.\left(\frac{M-9}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,5} + s(M).2^8.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 9$ (avec $M = 2.b1 - 1$).

- *Etape 5 :*

$$(3.5.7)^2.\left(\frac{M-9}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,5} + s(M).2^8.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$
$$(3.5.7)^2.\left(\frac{M-9}{2}\right)^2.\left(\frac{M-11}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,5} + s(M).2^8.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$
$$(3.5.7)^2.(M^2-18M+9^2).\left(\frac{M-11}{2}\right)!^2 = 2^2.M.W_{b1,5} + s(M).2^{10}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$
$$(3.5.7.9)^2.\left(\frac{M-11}{2}\right)!^2 = M.\left[2^2.W_{b1,5} - (M-18).\left(\frac{M-11}{2}\right)!^2\right] + s(M).2^{10}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$
$$(3.5.7.9)^2.\left(\frac{M-11}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,6} + s(M).2^{10}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 11$ (avec $M = 2.b1 - 1$).

...

- *Etape* $b2 = (c-1)$ *:*

$$\left[\prod_{h=2}^{h=b2}(2.h-1)^2\right].\left(\frac{M-2.b2-1}{2}\right)!^2 = M.W_{b1,c} + s(M).2^{2.b2}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}$$

Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2.b2+1$ (et avec $M = 2.b1-1$ pour $b1 \in \mathbb{N}$, $b1 \geq 2$).

Donc

$$\frac{\left[\prod_{h=2}^{h=b2}(2.h-1)^2\right].\left(\frac{M-2.b2-1}{2}\right)!^2}{M} = W_{b1,c} + \frac{s(M).2^{2.b2}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M}$$

Et donc

$$\sin^2\left\{\pi.\frac{\left[\prod_{h=2}^{h=b2}(2.h-1)^2\right].\left(\frac{M-2.b2-1}{2}\right)!^2}{M}\right\}$$

$$= \sin^2\left\{\pi.\left[W_{b1,c} + \frac{s(M).2^{2.b2}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M}\right]\right\}$$

Si $M \in \mathbb{P}$, nous avons $s(M) = 1$:

$$\sin^2\left\{\pi.\frac{\left[\prod_{h=2}^{h=b2}(2.h-1)^2\right].\left(\frac{M-2.b2-1}{2}\right)!^2}{M}\right\}$$

$$= \sin^2\left\{\pi.\left[W_{b1,c} + \frac{2^{2.b2}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M}\right]\right\}$$

$$= \sin^2\left\{\pi.\frac{2^{2.b2}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M}\right\}$$

Donc $$\frac{\sin^2\left\{\pi.\dfrac{\left[\displaystyle\prod_{h=2}^{h=b2}(2.h-1)^2\right].\left(\dfrac{M-2.b2-1}{2}\right)!^2}{M}\right\}}{\sin^2\left\{\pi.\dfrac{2^{2.b2}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M}\right\}}=1$$

Si $M\notin\mathbb{P}$, nous avons $s(M)=0$:

$$\sin^2\left\{\pi.\frac{\left[\displaystyle\prod_{h=2}^{h=b2}(2.h-1)^2\right].\left(\dfrac{M-2.b2-1}{2}\right)!^2}{M}\right\}=0$$

Donc $$\frac{\sin^2\left\{\pi.\dfrac{\left[\displaystyle\prod_{h=2}^{h=b2}(2.h-1)^2\right].\left(\dfrac{M-2.b2-1}{2}\right)!^2}{M}\right\}}{\sin^2\left\{\pi.\dfrac{2^{2.b2}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M}\right\}}=0$$

Et donc finalement, pour $M\in\mathbb{N}$, $M\geq 2.b2+1$ (et avec $M=2.b1-1$ pour $b1\in\mathbb{N}$, $b1\geq 2$), nous retrouvons les mêmes égalités que pour $s(M)$:

$$\frac{\sin^2\left\{\pi.\dfrac{\left[\displaystyle\prod_{h=2}^{h=b2}(2.h-1)^2\right].\left(\dfrac{M-2.b2-1}{2}\right)!^2}{M}\right\}}{\sin^2\left\{\pi.\dfrac{2^{2.b2}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M}\right\}}=s(M)$$

Ce qui permet encore de réduire les calculs.

- *Cas particuliers :*

Pour $2.b2-1=\dfrac{(M-2.b2-1)}{2}$, nous sommes dans le cas particulier où le calcul est optimal. Nous avons :

$$M=6.b2-1 \qquad \text{ou équivalent :} \qquad b2=\frac{M+1}{6}$$

D'où

$$\frac{(M-2.b2-1)}{2}=\frac{M-2}{3}$$

Pour la formule :

$$\frac{\left[\prod_{h=2}^{h=b2}(2.h-1)^2\right].\left(\dfrac{M-2.b2-1}{2}\right)!^2}{M}=W_{b1,c}+\frac{s(M).2^{2.b2}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M}$$

Nous obtenons donc, pour $M=6.b2-1$ et pour $b2\in\mathbb{N}$, $b2\geq 1$ (et avec $W_{b1,c}=W_{b2}$) :

$$\frac{\left[\prod_{h=2}^{h=\frac{M+1}{6}}(2.h-1)^2\right].\left(\dfrac{M-2}{3}\right)!^2}{M}=W_{b2}+\frac{s(M).2^{\left(\frac{M+1}{3}\right)}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M}$$

Et donc, pour $M=6.b2-1$ et pour $b2\in\mathbb{N}$, $b2\geq 1$:

$$\frac{\sin^2\left[\pi.\dfrac{\left[\prod_{h=2}^{h=\frac{M+1}{6}}(2.h-1)^2\right].\left(\dfrac{M-2}{3}\right)!^2}{M}\right]}{\sin^2\left[\pi.\dfrac{2^{\left(\frac{M+1}{3}\right)}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M}\right]}=s(M)$$

$\ast$ <u>**Sous-Partie 3 :**</u>

Poursuivons le raisonnement à partir de ce dernier cas particulier. Changeons quleque peu les notations : $W_{b2,c}$ est un nombre entier avec c un nombre entier. Reprenons par étape :

- *Etape 1 :*

Notons $W_{b2} = W_{b2,1}$

$$\frac{\left[\prod_{h=2}^{h=\frac{M+1}{6}} (2.h-1)^2\right].\left(\frac{M-2}{3}\right)!^2}{M} = W_{b2,1} + \frac{s(M).2^{\left(\frac{M+1}{3}\right)}.(-1)^{\left(\frac{M+1}{2}\right)}}{M}$$

<u>SUITE EN COURS</u>

<u>DE REALISATION !</u>

Pour que la fromule $s(M)$ soit exploitable, nous devons concentrer tous nos efforts à essayer de lui donner des équivalences, en développant notamment les cas particulier où elle exige moins de calculs (sur le modèle de cette sous-partie), ce qui devrait permettre de généraliser jusqu'à obtenir une formule qui rende son calcul optimal.

C'est justement l'objectif que se propose d'atteindre le **Chapitre IV**.

3.8.8 Réécriture de la fonction ζ (Zêta) de RIEMANN

- *Rappels :*

Etant donné la fonction ζ de *RIEMANN* [5], pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

En exploitant la méthode du produit Eulérien [6], nous avons :

$$S = 1 + u^1 + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + ...$$

(somme infinie de termes en puissance de " u ", aux puissances croissantes)

Or,

$$S = 1 + u.S$$

Donc

$$S = \frac{1}{1 - u}$$

D'où

$$\frac{1}{1 - u} = 1 + u^1 + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + ...$$

Pour $u = p^{-s}$ (avec $s > 0$), nous avons l'égalité :

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n=1}^{n \to +\infty} n^{-s}$$

- *<u>1ière réécriture :</u>*

Etant donné la formule de $s(M)$ établie dans la sous-partie "**3.1 Formule simplifiée s(M)**" (page 147) :

$s(M) = 1$ si $M \in \mathbb{P}$
$s(M) = 0$ si $M \notin \mathbb{P}$ (avec $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$)

* Si $M \in \mathbb{P}$:

$$\begin{aligned} M^{-s}.s(M) &= p^{-s} \\ 1 - M^{-s}.s(M) &= 1 - p^{-s} \\ \frac{1}{1 - M^{-s}.s(M)} &= \frac{1}{1 - p^{-s}} \end{aligned}$$

* Si $M \notin \mathbb{P}$ (avec $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$) :

$$\begin{aligned} M^{-s}.s(M) &= 0 \\ 1 - M^{-s}.s(M) &= 1 \\ \frac{1}{1 - M^{-s}.s(M)} &= 1 \end{aligned}$$

Et donc la fonction ζ de *RIEMANN* peut aussi s'écrire ainsi :

$$\zeta(s) = \prod_{M=2}^{M \to +\infty} \frac{1}{1 - M^{-s}.s(M)}$$

L'intérêt étant qu'il existe un lien entre la fonction ζ et la formule $s(M)$.

Poursuivons. Ceci implique que :

$$u = M^{-s}.s(M)$$

Nous avons :

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u^1 + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + ...$$

D'où

$$\frac{1}{1 - M^{-s}.s(M)} = 1 + \left[\frac{s(M)}{M^s}\right] + \left[\frac{s(M)}{M^s}\right]^2 + \left[\frac{s(M)}{M^s}\right]^3 + \left[\frac{s(M)}{M^s}\right]^4 + ...$$

Sachant que :

$$s(M)^a = s(M) \qquad (\text{pour } a \in \mathbb{N},\ a \geq 1)$$

Nous déduisons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - M^{-s}.s(M)} &= 1 + s(M).\left[\frac{1}{M^s} + \frac{1}{M^{2s}} + \frac{1}{M^{3s}} + \frac{1}{M^{4s}} + ...\right] \\ &= 1 + s(M).\sum_{a=1}^{a\to+\infty} M^{-s.a} \end{aligned}$$

Lorsque $s(M) = 0$ (donc $M \notin \mathbb{P}$), la cohérence est bien respectée.
Lorsque $s(M) = 1$ (donc $M \in \mathbb{P}$), la cohérence est bien respectée.

La fonction ζ de *RIEMANN* peut donc être réécrite tel que nous l'avons fait.

- *2ième réécriture :*

En se concentrant sur les propriétés de la fonction $s(M)$, nous pouvons encore réécrire la fonction ζ sous une autre forme. En effet, en rappelant que nous avons :

$$s(M)^2 = s(M)$$

$$s(M)^2 - s(M) = 0$$

Nous pouvons alors écrire :

$$(M^s - M^s) + (M^{2s} - M^{2s}) + [s(M).M^s - s(M).M^s] + [s(M)^2 - s(M)] = 0$$

D'où

$$-(M^s - M^{2s}) + [M^s - s(M) - M^{2s} + s(M).M^s - s(M).M^s + s(M)^2] = 0$$

$$M^s.(1 - M^s) = [M^s - s(M)].[1 - M^s - s(M)]$$

$$\frac{M^s}{M^s - s(M)} = \frac{1 - M^s - s(M)}{1 - M^s}$$

$$\frac{1}{1 - M^{-s}.s(M)} = 1 - \frac{s(M)}{1 - M^s}$$

D'après l'égalité que nous venons d'établir, nous obtenons la réécriture :

$$\zeta(s) = \prod_{M=2}^{M \to +\infty} \left[1 - \frac{s(M)}{1 - M^s} \right]$$

- *3ième réécriture :*

A partir d'un raisonnement similaire, une dernière réécriture peut encore être faite :

$$\zeta(s) = \prod_{M=2}^{M \to +\infty} \left[\left(\frac{1}{1 - M^{-s}} \right)^{s(M)} \right]$$

3.8.9 Réécriture de la conjecture de GOLDBACH

Il est possible de réécrire la conjecture de *GOLDBACH* (sans prétention de la résoudre). La conjecture de *GOLDBACH* [7] affirme que tout nombre paire supérieur ou égale à 4 peut être écrit comme la somme de 2 nombres premiers. C'est-à-dire que pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ et pour P_{n1} et P_{n2}, il serait possible d'écrire :

$$2.N = P_{n1} + P_{n2}$$

Etablissons le raisonnement suivant en notant M_1 et $M_2 \in \mathbb{N}$, $M_2 \geq 2$. Nous avons l'équivalence :

$$2.N = M_1 + M_2$$

D'après les égalités établies précédemment, nous pouvons noter que :

(voir le paragraphe intitulé "***Autres équivalences de formules 1***" de la sous-partie "**3.7 Equivalences de formules**" page 172)

$$\begin{aligned} M_1 &= (M_1-1)^{s(M_1)} + (M_1-1)^{[1-s(M_1)]} \\ &= 1 + (M_1-1)^{s(M_1)} + (M_1-1)^{[1-s(M_1)]} - 1 \end{aligned}$$

Or,

$1 + (M_1-1)^{s(M_1)}$ vaut toujours un nombre premier (rappel)

Et

$$\begin{aligned} M_2 &= (M_2-1)^{s(M_2)} + (M_2-1)^{[1-s(M_2)]} \\ &= 1 + (M_2-1)^{s(M_2)} + (M_2-1)^{[1-s(M_2)]} - 1 \end{aligned}$$

Or,

$1 + (M_2-1)^{s(M_2)}$ vaut toujours un nombre premier

Il devient possible de réécrire :

$$\begin{aligned}
2.N &= M_1 + M_2 \\
&= 1 + (M_1 - 1)^{s(M_1)} + 1 + (M_2 - 1)^{s(M_2)} + (M_1 - 1)^{[1-s(M_1)]} + (M_2 - 1)^{[1-s(M_2)]} - 2
\end{aligned}$$

Or, si M_1 et $M_2 \in \mathbb{P}$, nous avons :

$s(M_1) = s(M_2) = 1$

Donc

$$\begin{aligned}
(M_1 - 1)^{[1-s(M_1)]} + (M_2 - 1)^{[1-s(M_2)]} - 2 &= 1 + 1 - 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Et donc

$2.N = [1 + (M_1 - 1)^{s(M_1)}] + [1 + (M_2 - 1)^{s(M_2)}]$

Et donc, si M_1 et $M_2 \in \mathbb{P}$, il deviendrait ainsi possible d'exprimer un nombre paire comme la somme de 2 nombres premiers.

Récapitulons :

Pour $2.N = M_1 + M_2$, nous avons :

$M_2 = 2.N - M_1$

Si M_1 et $M_2 \in \mathbb{P}$, nous devrions donc avoir :

$M_1 \in \mathbb{P}$ et $(2.N - M_1) \in \mathbb{P}$.

C'est-à-dire que nous devons rechercher à savoir si nous avons toujours :

$s(M_1) = s(2.N - M_1) = 1$

Cela signifie que nous devons rechercher à savoir si nous avons toujours :

$(M_1 - 1)! + 1 = M_1.w_1$

(w_1 est un nombre entier si $M_1 \in \mathbb{P}$)

et simultanément :

$(2.N - M_1 - 1)! + 1 = (2.N - M_1).w_{1'}$

($w_{1'}$ est un nombre entier si $(2.N - M1) \in \mathbb{P}$)

Et finalement, cela revient à savoir si, avec $2.N > M_1$ et avec $M_1 \in \mathbb{P}$, nous avons pour tout N :

$(2.N - M_1 - 1)! + 1 = (2.N - M_1).w_{1'}$ (avec $w_{1'}$ un nombre entier)

Si tel était le cas, cela rendrait la conjecture de *GOLDBACH* vraie.

Digression :

Signalons que dans ce cas, nous aurions également :

$N = \dfrac{(P_{n1} + P_{n2})}{2}$ pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ et pour P_{n1} et $P_{n2} \in \mathbb{P}$

Or, pour $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, nous pouvons décomposer N tel que $N = D(N)$,

Et donc, nous pourrions écrire :

$D(N) = \dfrac{(P_{n1} + P_{n2})}{2}$

Une piste pour la résolution du problème :

Comme la conjecture de *GOLDBACH* l'indique nous cherchons à savoir si pour tout $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$:

$2.N = M_1 + M_2$ avec M_1 et $M_2 \in \mathbb{P}$ simultanément.

En logique binaire (correspondant à l'algèbre de *BOOLE* [3]), cela fait penser à une porte logique " *ET* ". D'un point de vue strictement mathématique, cela se traduit par :

$$s(M_1).s(M_2) = 1$$

Or, pour M_1 et $M_2 \in \mathbb{N}$, tel que M_1 et $M_2 \geq 2$:

- Si M_1 et $M_2 \in \mathbb{P}$ simultanément, nous avons :

  $$s(M1).s(M2) = 1$$

  Donc

  $${M_1}^{[s(M_1).s(M_2)]} = M_1$$

  Et

  $${M_2}^{[s(M_1).s(M_2)]} = M_2$$

- Si seulement $M_1 \notin \mathbb{P}$ ou seulement $M_2 \notin \mathbb{P}$, nous avons :

  $$s(M_1).s(M_2) = 0$$

  Donc

  $${M_1}^{[s(M_1).s(M_2)]} = 1$$

  Et

  $${M_2}^{[s(M_1).s(M_2)]} = 1$$

- En réunissant ces 2 conditions, nous avons :

  $${M_1}^{[s(M_1).s(M_2)]} + {M_2}^{[s(M_1).s(M_2)]} = 2$$

  si seulement $M_1 \notin \mathbb{P}$ ou seulement $M_2 \notin \mathbb{P}$.

  Ou

  $${M_1}^{[s(M_1).s(M_2)]} + {M_2}^{[s(M_1).s(M_2)]} = M_1 + M_2$$

  si M_1 et $M_2 \in \mathbb{P}$ simultanément.

Si la conjecture de *GOLDBACH* était vraie, nous pourrions alors écrire :

$$2.N = {M_1}^{[s(M_1).s(M_2)]} + {M_2}^{[s(M_1).s(M_2)]}$$

Et étendre le domaine de définition de N à $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$.

Une autre écriture possible serait :

$$2.N = (M_1 + M_2 - 2).s(M_1).s(M_2) + 2$$

La conjecture de *GOLDBACH* ne serait alors qu'un cas particulier de ces 2 dernières formules. Pour savoir si la conjecture de *GOLDBACH* est vraie, il faut donc savoir si ces formules que nous venons d'établir sont vraies pour tout $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 1$ et quelquesoit M_1 et $M_2 \in \mathbb{N}$, tel que M_1 et $M_2 \geq 2$.

4

Remarques : formule D(N) et phénomènes physiques associés

J'ai l'intuition que ces formules pourraient être une base solide pour développer une théorie physique (mathématiques appliquées), étant donner le lien entre la fonction *SINUS*, le cercle et les ondes, cela pourrait permettre de donner une interprétation géométrique. Un rapprochement peut être fait entre la variable N (utilisée tout au long de l'étude) et les phénomènes vibratoires diverses (l'onde d'un photon, par exemple). La formule $D(N)$ appliquée à une onde permettrait de décomposer une onde en longueurs d'ondes fondamentales. Ceci pourrait être utile à l'analyse harmonique, entre autres.

De plus, étant donné les formules étudiées (telles que $s(M)$ par exemple), l'approche est intéressante du point de vue de la logique binaire (ces formules ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1) qui émerge de ces formules liées aux ondes. D'où l'on peut constater que : si une telle formule permet d'effectuer des traitements (c'est-à-dire des calculs de congruence) sur des ondes, dont les résultats sont exclusivement binaires, alors il doit exister une géométrie spatiale correspondante où "l'agencement adéquat" de ces ondes permet de faire émerger une logique binaire.

Remarques, essais et hypothèses :

Dans le cas de la décomposition des ondes, nous pouvons décomposer une variable associée. Il nous reste à savoir laquelle choisir. Nous pouvons être tentés de vouloir décomposer la variable correspondant à la fréquence, celle correspondant à la période ou celle correpondant à la longueur d'onde.

Pour ma part, les graphiques de la première partie suggèrent plutôt d'étudier des cycles, ce qui implique d'étudier la "distance" entre un un nombre multiple de M^x et son prochain multiple. La formule $f(M;x)$ ne valant 1 que pour N égale à un des ces multiples (la formule vaut 0 sinon). Ceci ferait plus naturellement penser à une répétition de cycle tel que la longueur d'onde ou même tel que la période. Nous allons le vérifier en raisonnant suite à des essais.

- *Si nous essayons de décomposer une fréquence :*

  Le désavantage de vouloir décomposer une fréquence f en l'assimilant à N, de telle sorte que $f = N$, est que cette fréquence devrait avoir un minimum en $f = 2$. Ce qui impose à l'étude de la décomposition d'une fréquence en fréquences fondamentales d'admettre une période T maximum ($T = \frac{1}{f}$), et pas de minimum pour T (puisque f n'aurait pas de limite maximum). Or, rien n'empêcherait de produire une période plus grande, simplement en ralentissant le temps de répétition d'un phénomène (même en agissant "manuellement" sur le système étudié).

  Ceci ne semble pas être en accord avec la physique quantique qui donnerait plutôt une limite minimum à un intervalle de temps (connue sous le nom de temps de *PLANCK* [8]) et une limite minimum pour une distance (connue sous le nom de longueur de *PLANCK* [8]). En-dessous de cette limite, les formules n'ont plus de sens. Ce qui serait exactement l'inverse des constats de la physique quantique.

- *Si nous essayons de décomposer une longueur d'onde :*

  Il est possible de décomposer la longueur d'onde en longeurs d'ondes plus simples. Dans ce cas, en assimilant la longueur d'onde λ d'un phénomène ondulatoire à la variable N de la formule $D(N)$, de telle sorte que $\lambda = N$, c'est la longueur d'onde qui connaît un minimum en $\lambda = 2$. Ce qui impose à l'étude de la décomposition d'une longueur d'onde en longueurs d'ondes fondamentales d'admettre une longueur d'onde minimum (et donc une distance minimum dont la mesure vaut 1 unité), une période T minimum et donc une fréquence f maximum. Dans ce cas, il n'y aurait pas de limite maximum de longueur d'onde, pas de limite maximum de période et donc pas de limite minimum de fréquence.

Ce cas semble être plus cohérent par rapport à la limite de la longueur de *PLANCK* en physique quantique. C'est donc à partir de cette variable que nous élaborerons une théorie de décomposition d'une longueur d'onde en longueurs d'ondes fondamentales (voir **Chapitre VI**). De plus, le domaine de définition de $N \in \mathbb{N}$ implique que la longueur d'onde soit discontinue.

- *Si nous essayons de décomposer une période :*

  Il reste encore possible de décomposer la période (qui vaut l'inverse de la fréquence) d'un phénomène cyclique en périodes fondamentales. Dans ce cas, en assimilant la période T d'un phénomène cyclique à la variable N de la formule $D(N)$, de telle sorte que $T = N$, c'est la période qui connaît un minimum en $T = 2$. Ce qui est cohérent avec la conclusion de la décomposition d'une longueur d'onde. Doù l'on déduit exactement les mêmes choses à propos des minimum et des maximum des grandeurs physiques que pour la décomposition d'une longueur d'onde.

  Ce dernier cas reste cohérent par rapport à la limite du temps de *PLANCK* en physique quantique. C'est donc à partir de cette variable que nous élaborerons une théorie de décomposition d'une période en périodes fondamentales (voir **Chapitre VI**). De plus, le domaine de définition de $N \in \mathbb{N}$ implique que la période soit également discontinue.

Plus généralement, nous trouvons 2 cas en cohérence l'un avec l'autre, ce qui devrait permettre une généralisation de l'application de la formule $D(N)$ à tous les phénomènes cycliques (la justification sera donnée au début du **Chapitre VI**).

CHAPITRE II

Reconstitution de fonctions connues, lien avec les polynômes

Introduction

Il est important de comprendre ce chapitre pour comprendre le chapitre suivant (concernant la répartition exacte des nombres premiers).

(ATTENTION, dans ce chapitre, les crochets ont la même fonction que de simples parenthèses, ils ne signifient donc ni “valeur absolue” ni “partie entière”)

5

Remarques sur la formules $\mathfrak{I}(M)$

- Ces travaux étant complémentaires à ceux du **Chapitre I**, nous y ferons références plusieus fois en faisant appel aux formules étudiées et nommées dans ce premier chapitre. En l'occurence, dans ce second chapitre, nous allons faire référence à la formule $\mathfrak{I}(M)$ décrite dans le chapitre précédent. Rappelons notamment brièvement que pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$:

$$S(M) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}.\prod_{v=1}^{v=3}(M-v)\right).\frac{\sin^2\left((M-1)!.\dfrac{\pi}{M}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)}$$

- Et que pour $M \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(M) &= s(2.M+2) \\ &= s[P_n.(d.M+1)] \qquad \text{avec } d \in \mathbb{N} \text{ et } P_n \in \mathbb{P}. \\ &= s(M+2).s(M+3) \end{aligned}$$

$\mathfrak{I}(M^{2a})$ est définie pour tout $M \in \mathbb{Z}$ et pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$.

- De manière plus restreinte, la formule $\mathfrak{I}(B)$ permet l'inversion des valeurs d'une variable "binaire" B. Cela signifie que pour B ne pouvant prendre que les valeurs binaires 0 ou 1, nous avons :

$\mathfrak{I}(B) = 1$ si $B = 0$
$\mathfrak{I}(B) = 0$ si $B = 1$

et donc $\mathfrak{I}(B) = 1 - B$

5.1 Rappels des caractéristiques de $\mathfrak{I}(M)$

Rappelons que la formule d'Impulsion Première $\mathfrak{I}$ d'un polynôme de variable $M \in \mathbb{N}$ telle que :

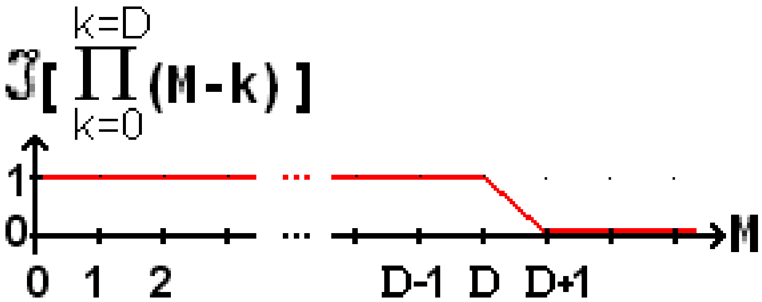
$$\mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=D}(M-k)\right] \qquad \text{avec } D \in \mathbb{N}$$

a les caractéristiques suivantes :

$$\mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=D}(M-k)\right] = 1 \qquad \text{pour } 0 \leq M \leq D$$

$$\mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=D}(M-k)\right] = 0 \qquad \text{pour } M > D$$

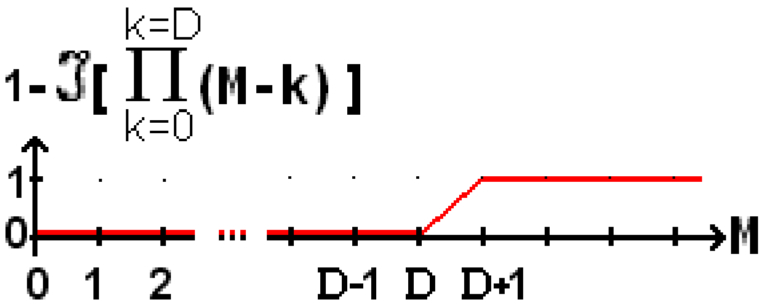
et la représentation graphique suivante :



La formule "complémentaire" correspondante est équivalente à :

$$1 - \mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=D}(M-k)\right] \qquad \text{avec } D \in \mathbb{N}$$

et dont la représentation graphique est celle-ci :



5.2 Etude de polynômes "simples"

Soit un polynôme entier "positif" $P(M)$ de variable M. Nous appellerons un polynôme entier de variable $M \in \mathbb{N}$, un polynôme ne donnant que des valeurs entières pour tout $M \in \mathbb{N}$, et nous appellerons un polynôme positif de variable $M \in \mathbb{N}$ un polynôme ne donnant que des valeurs positives pour tout $M \in \mathbb{N}$. Un polynôme entier positif $P(M)$ de variable $M \in \mathbb{N}$ est donc un polynôme ne donnant que des valeurs entières positives pour tout $M \in \mathbb{N}$.

Remarque :

Pour prendre en compte le cas de tout polynôme, nous pourrions simplement élevé au carré tout polynôme afin de le rendre "positif", au cas où il ne le serait pas déjà.

La formule d'Impulsion Première d'un nombre n'étant définie que pour un nombre entier positif, il en est de même pour la formule d'Impulsion Première d'un polynôme : elle est définie seulement pour les polynômes entier $P(M)$ positif, nous savons que :

la formule d'Impulsion Première d'un polynôme positif de variable M vaut 1 lorsque le polynôme s'annule et vaut 0 sinon. Nous pouvons donc noter :

$\mathfrak{I}[P(M)] = 1 \qquad \text{si } P(M) = 0$
$\mathfrak{I}[P(M)] = 0 \qquad \text{si } P(M) > 0$

Ce qui peut encore être noté ainsi pour les valeurs de M rendant le polynôme $P(M)$ nul :

$$P(M) = 1 - \mathfrak{I}[P(M)] = 0$$

Partant de ce principe, il va devenir possible d'établir des correspondances entre plusieurs formules.

- Etudions le polynôme entier positif $P(M) = (M - D)^{2a}$ avec $D \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$. Remarquons que comme ce polynôme est toujours positif pour $M \in \mathbb{Z}$, la formule d'Impulsion Première de ce polynôme est aussi définie pour tout $M \in \mathbb{Z}$. Notons la ainsi :

$$\mathfrak{I}[P(M)] = \mathfrak{I}[(M - D)^{2a}]$$

Ce polynôme s'annule seulement si $M = D$. Nous avons donc :

$$\mathfrak{I}[(M - D)^{2a}] = 1 \qquad \text{si } M = D$$

$$\mathfrak{I}[(M - D)^{2a}] = 0 \qquad \text{sinon.}$$

Remarquons que ce résultat aurait encore pu être atteint d'une autre manière puisque, d'après les rappels que nous venons de faire en sous-partie "**5.1 Rappels des caractéristiques de** $\mathfrak{I}(M)$" (page 264), nous pouvons déduire de la soustraction des formules entre les accolades :

$$\left\{1 - \mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=D-1}(M-k)\right]\right\} - \left\{1 - \mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=D}(M-k)\right]\right\} = 1 \qquad \text{si } M = D$$

$$\left\{1 - \mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=D-1}(M-k)\right]\right\} - \left\{1 - \mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=D}(M-k)\right]\right\} = 0 \qquad \text{sinon}$$

Or,

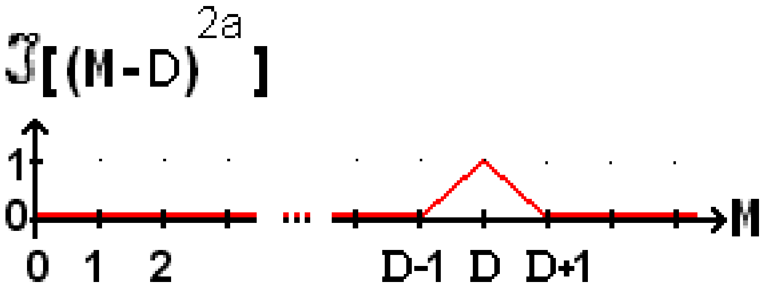
$$\left\{1 - \mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=D-1}(M-k)\right]\right\} - \left\{1 - \mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=D}(M-k)\right]\right\}$$

$$= \mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=D}(M-k)\right] - \mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=D-1}(M-k)\right]$$

Et donc

$$\mathfrak{I}[(M - D)^{2a}] = \mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=D}(M-k)\right] - \mathfrak{I}\left[\prod_{k=0}^{k=D-1}(M-k)\right]$$

Graphiquement, cela se représente ainsi :



- Par ce procédé, nous pouvons reconstituer énormément de formules ou de fonctions connues de différentes manières (par exemple : en faisant la somme de ce type de formule point par point). notamment, d'après cette dernière formule, et pour $M \in \mathbb{N}$, nous pouvons reconstituer une droite :

$$\sum_{D=0}^{D \to +\infty} \Im[(M-D)^{2a}] = 1$$

Mais il existe une infinité de manières de reconstituer cette droite avec d'autres polynômes entiers positifs $P(M)$ qui possèdent plus d'une solution pour $P(M) = 0$, la seule condition à respecter étant que ces polynômes n'aient pas de solutions communes entre eux et qu'elles soient toutes complémentaires sur l'ensemble des nombres entiers (c'est-à-dire que chaque nombre entier est solution seulement une fois d'un polynôme, et cette règle est à appliquer à tous les entiers). Ainsi, nous pouvons déduire facilement encore un de ces cas :

$$\Im\left[\prod_{D=0}^{D \to +\infty} (M-D)^{2a}\right] = 1$$

Et donc

$$\sum_{D=0}^{D \to +\infty} \Im[(M-D)^{2a}] = \Im\left[\prod_{D=0}^{D \to +\infty} (M-D)^{2a}\right]$$

- Nous pouvons même reconstituer la formule complémentaire à $\mathfrak{I}(M)$, qui est partout équivalente à la droite précédente sauf pour $M = 0$:

$$\sum_{D=1}^{D \to +\infty} \mathfrak{I}[(M-D)^{2a}] = 1 - \mathfrak{I}(M)$$

Remarque :

Cette égalité n'est pas pertinente, mais elle permet de donner $\mathfrak{I}(M)$ par "auto-référence" (et en restant cohérente).

- Nous pouvons également reconstituer la formule $s(M)$ (vue dans le **Chapitre I**) à l'aide d'un produit ou d'une somme se faisant sur l'ensemble des nombres premiers :

$$s(M) = \mathfrak{I}\left[\prod_{P_n}(M - P_n)^{2a}\right] \qquad \text{avec } P_n \in \mathbb{P}$$

ou encore :

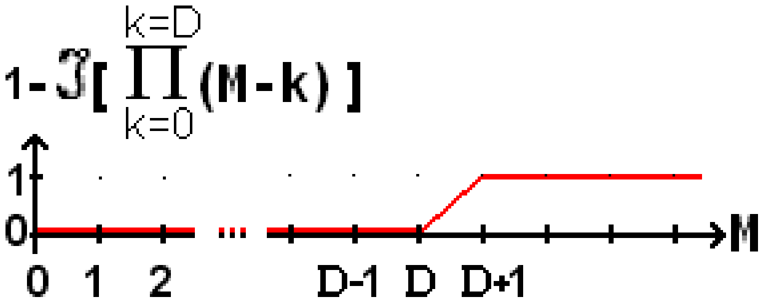
$$s(M) = \sum_{P_n} \mathfrak{I}[(M - P_n)^{2a}]$$

Ici aussi, nous pourrions énumérer une infinité de solutions puisqu'il existe une infinité de nombres premiers, donc une infinité de solutions possibles pour que les polynômes entiers positifs s'annulent.

- Nous pouvons encore reconstituer la formule de comptage $C(M)$ (vue dans le **Chapitre I**), puisque :

$$\mathrm{C}_{N_1}^{N_2}(M) = \sum_{M=N_1}^{M=N_2} s(M)$$

Pour $N_1 = 2$ et $N_2 = N$, nous aurons le nombre de nombres premiers compris sur l'intervalle $[0; N]$.
Etant donné (et pour $D \in \mathbb{N}$) :



Et pour $P_n = (D+1)$, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_{N_1}^{N_2}(M) &= \sum_{M=2}^{M=N} s(M) \\ &= \sum_{P_n} \left\{ 1 - \Im\left[\prod_{k=0}^{k=(P_n-1)} (N-k) \right] \right\} \\ &= \sum_{D=1}^{D\to+\infty} \left(s(D+1).\left\{ 1 - \Im\left[\prod_{k=0}^{k=D} (N-k) \right] \right\} \right) \end{aligned}$$

- Pour reconstituer d'autres formules, nous pouvons autoriser des solutions communes à ces polynômes positifs, dans la mesure où ces autres formules le permettent (notamment lorsque les valeurs de ces formules sont supérieures à 1, en correspondance avec la variable N).

Notamment, nous pouvons également reconstituer la formule $RM(N)$ vue dans le **Chapitre I**, pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ (en étalant la somme sur plusieurs lignes) :

$$\begin{aligned} RM(N) \quad = \quad & \Im\left[\prod_{D=M}^{D\to+\infty}(N-D)^{2a}\right] \\ & +\Im\left[\prod_{D=M^2}^{D\to+\infty}(N-D)^{2a}\right] \\ & +\Im\left[\prod_{D=M^3}^{D\to+\infty}(N-D)^{2a}\right] \\ & +\Im\left[\prod_{D=M^4}^{D\to+\infty}(N-D)^{2a}\right] \\ & + \quad ... \\ & +\Im\left[\prod_{D=M^m}^{D\to+\infty}(N-D)^{2a}\right] \end{aligned}$$

Donc

$$RM(N) = \sum_{b=1}^{b=m}\Im\left[\prod_{D=M^b}^{D\to+\infty}(N-D)^{2a}\right]$$

Comme précédemment, cette manière en est une parmi l'infinité des autres manières possibles d'exprimer cette formule $RM(N)$. D'après l'exemple de l'égalité :

$$\sum_{D=0}^{D\to+\infty}\Im[(N-D)^{2a}] = \Im\left[\prod_{D=0}^{D\to+\infty}(N-D)^{2a}\right]$$

Nous trouverons aussi :

$$RM(N) = \sum_{b=1}^{b=m} \sum_{D=M^b}^{D\to+\infty} \mathfrak{I}[(N-D)^{2a}]$$

Evidemment, d'autres polynômes que ceux-ci peuvent être utilisés.

- D'autres formules ou fonctions que les polynômes peuvent aussi être utilisées pourvu que celles-ci ne donnent pour résultat que des valeurs entières positives, puisque l'Impulsion Première de celles-ci n'est définie que pour leurs valeurs entières positives. Par exemple, si nous prenons

$$\mathfrak{I}\left[\cos^2\left(\pi.\frac{M}{2}\right)\right] \text{, nous avons :}$$

$$\mathfrak{I}\left[\cos^2\left(\pi.\frac{M}{2}\right)\right] = 0 \qquad \text{si } M \text{ est paire}$$

$$\mathfrak{I}\left[\cos^2\left(\pi.\frac{M}{2}\right)\right] = 1 \qquad \text{si } M \text{ est impaire}$$

Or, nous avons aussi :

$$\cos^2\left(\pi.\frac{M}{2}\right) = 1 \qquad \text{si } M \text{ est paire}$$

$$\cos^2\left(\pi.\frac{M}{2}\right) = 0 \qquad \text{si } M \text{ est impaire}$$

Ce qui correspond au complément de l'Impulsion Première de $\cos^2(\pi.M/2)$ pour $M \in \mathbb{N}$. En effet, pour les nombres entiers, la formule $\cos^2(\pi.M/2)$ ne peut donner pour valeur que 0 ou 1, ce qui correspond au cas des formules "binaires" (voir formule d'Impulsion Première d'une variable binaire dans le **Chapitre I** : l'Impulsion Première d'une variable binaire est équivalente au complément de cette variable). Nous avons donc :

$$\mathfrak{I}\left[\cos^2\left(\pi.\frac{M}{2}\right)\right] = 1 - \cos^2\left(\pi.\frac{M}{2}\right) = \sin^2\left(\pi.\frac{M}{2}\right)$$

Même raisonnement pour ce qui suit :

$$\mathfrak{I}\left[\sin^2\left(\pi.\frac{M}{2}\right)\right] = 1 - \sin^2\left(\pi.\frac{M}{2}\right) = \cos^2\left(\pi.\frac{M}{2}\right)$$

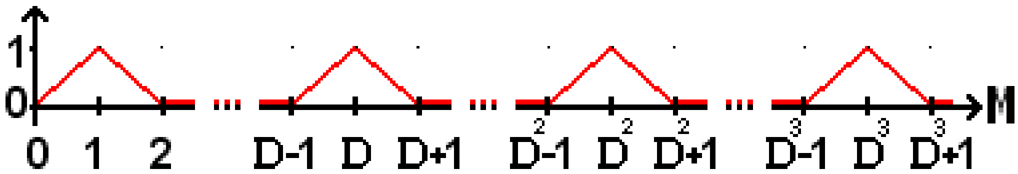
Et donc, comme précédemment (mais de manière moins pertinente), ceci permet d'avoir un moyen supplémentaire d'obtenir une droite (par exemple). Nous avons :

$$\mathfrak{I}\left[\sin^2\left(\pi.\frac{M}{2}\right)\right] + \mathfrak{I}\left[\cos^2\left(\pi.\frac{M}{2}\right)\right] = 1$$

- Donnons encore quelques autres exemples de formules constructibles avec ceci :

Pour $D \in \mathbb{N}$, $D \geq 1$:

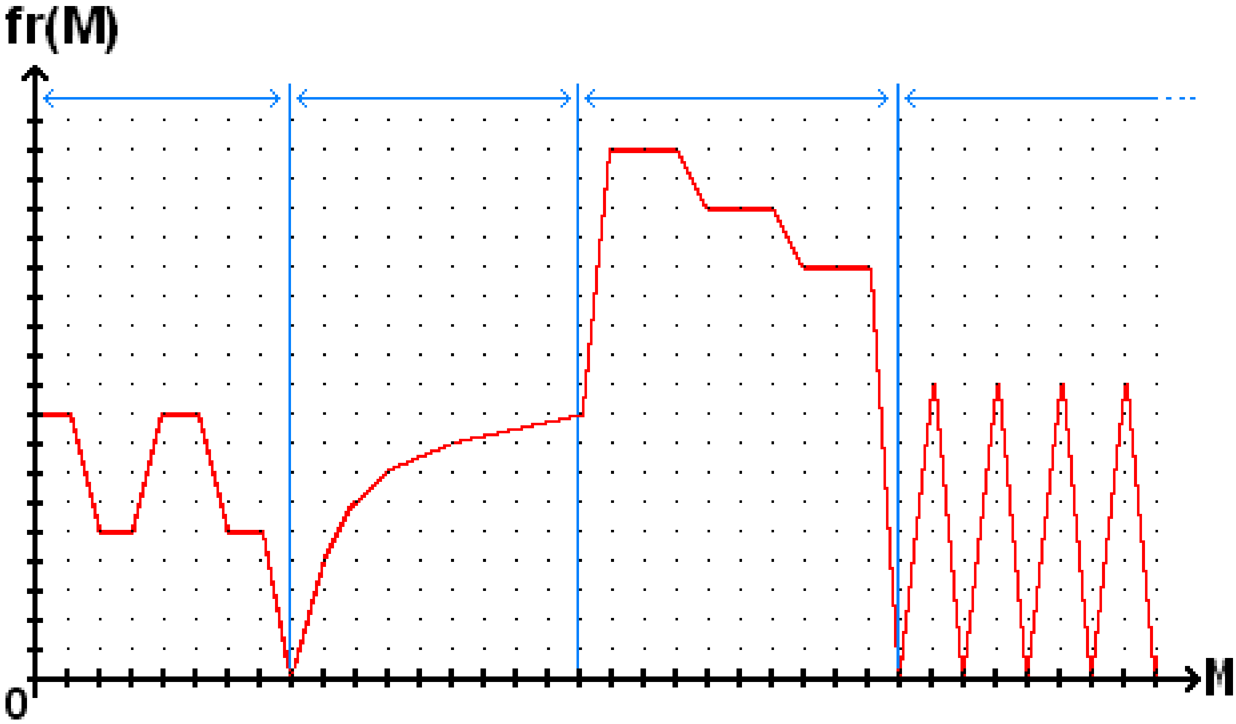
$$\sum_{m=0}^{m \to +\infty} \mathfrak{I}[(M - D^m)^{2a}]$$



Où la formule obtenue ne vaut 1 que pour les puissances du nombre D, et 0 sinon. Ceci permet de représenter un phénomène de “période logarithmique”.

- D'autres exemples peuvent être donnés avec une formule qui serait un mixage d'autres formules. L'Impusion Première d'une formule pouvant être égale à 1 pour certaines valeurs entières positives et 0 pour toutes les autres valeurs entières positives, il devient possible de “configurer” [**une formule résultante**] comme une somme [**d'Impulsions Premières valant** 1 **sur des intervalles de valeurs**], chacune de ces Impusions Premières étant à mutiplier par [**la formule désirée sur chaque intervalle**].

Nous pourrions alors imaginer d'obtenir la formule résultante $fr(M)$ correspondant au graphique suivant (pour plus de lisibilité, nous allons lier chaque point du graphique par des segments, ceux-ci ne représentant donc pas une continuité, puisque passer d'un nombre entier à un autre invoque nécessairement la discontinuité) :



Où chaque ligne verticale bleue sépare la formule résultante $fr(M)$ en intervalles afin de faire apparaître des formules plus simples (en fonction de M), chacune multipliées par une Impulsion Première (de variable M) relativement simple. Ces Impusions Premières pouvant être caractérisées par des intervalles se "chevauchant" ou pas (au choix), elles sont "configurables".

Pour finir, il est possible d'imaginer que cette formule $fr(M)$ contienne des intervalles complet avec $fr(M) = 0$ ou même avec $fr(M) = 1$ selon M.

Remarque :

Comme dans le **Chapitre I** (dans la sous-partie "**3.7 Equivalence de formules**"), il est possible d'établir des équivalences de formules due à la propriété de la formule d'Impulsion Première. En effet, avec $P(M)$ un polynôme entier (positif ou négatif) de variable $M \in \mathbb{Z}$, et $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$, nous avons :

$\mathfrak{I}[P(M)^{2a}] = 1 \qquad$ si $P(M) = 0$
$\mathfrak{I}[P(M)^{2a}] = 0 \qquad$ si $P(M) > 0$

Donc

$P(M)^{\mathfrak{I}[P(M)^{2a}]} = P(M) \qquad$ si $P(M) = 0$
$P(M)^{\mathfrak{I}[P(M)^{2a}]} = 1 \qquad$ si $P(M) > 0$

Et donc

$P(M)^{\mathfrak{I}[P(M)^{2a}]} - 1 = P(M) - 1 \qquad$ si $P(M) = 0$
$P(M)^{\mathfrak{I}[P(M)^{2a}]} - 1 = 0 \qquad$ si $P(M) > 0$

Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{P(M)^{\mathfrak{I}[P(M)^{2a}]} - 1}{P(M) - 1} = 1 \qquad \text{si } P(M) = 0$$

$$\frac{P(M)^{\mathfrak{I}[P(M)^{2a}]} - 1}{P(M) - 1} = 0 \qquad \text{si } P(M) > 0$$

Or, comme nous avons déjà :

$\mathfrak{I}[P(M)^{2a}] = 1 \qquad$ si $P(M) = 0$
$\mathfrak{I}[P(M)^{2a}] = 0 \qquad$ si $P(M) > 0$

Ce qui permet de faire le lien et de conclure que :

$$\mathfrak{I}[P(M)^{2a}] = \frac{P(M)^{\mathfrak{I}[P(M)^{2a}]} - 1}{P(M) - 1}$$

5.3 Généralisation avec les polynômes

De manière générale, pour tout polynôme (positif ou négatif, et quelquesoit le degré de ce polynôme) à coefficient entiers $P(M)$ (afin que pour tout M, $P(M)$ ne donne que des résultats sous forme de nombres entiers, et donc afin que $P(M)$ soit un polynôme entier tel que défini dans la sous-partie précédente), dans le cadre de la recherche des racines entières de ce polynôme (par conséquent, ces racines sont entières), c'est-à-dire pour $P(M) = 0$ et lorsque ces racines existent, on a pour $M \in \mathbb{Z}$ et pour $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \geq 1$:

$$P(M) = 1 - \mathfrak{I}[P(M)^{2a}] = 0$$

Soient M_1, M_2, ... , M_j les racines de ce polynômes ($j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$), on a donc :

$$P(M_1) = P(M_2) = ... = P(M_j) = 0$$

Donc

$$(M - M_1).(M - M_2). \quad ... \quad .(M - M_j) = 0$$

D'où

$$P(M) = (M - M_1).(M - M_2). \quad ... \quad .(M - M_j)$$

Nous avons également :

$$P(M_1) = P(M_2) = ... = P(M_j) = 0$$

$$= 1 - \mathfrak{I}[P(M_1)] = 1 - \mathfrak{I}[P(M_2)] = ... = 1 - \mathfrak{I}[P(M_j)] = 0$$

D'où

$$\begin{aligned}
P(M) &= 0 \\
&= 1 - \mathfrak{I}\{[(M - M_1).(M - M_2). \quad ... \quad .(M - M_j)]^{2a}\} \\
&= \{1 - \mathfrak{I}[(M - M_1)^{2a}]\}.\{1 - \mathfrak{I}[(M - M_2)^{2a}]\}. \quad ... \quad .\{1 - \mathfrak{I}[(M - M_j)^{2a}]\}
\end{aligned}$$

Et donc

$$
\begin{aligned}
P(M) &= 0 \\
&= 1 - \mathfrak{I}\left[\prod_{i=1}^{i=j}(M - M_i)^{2a}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{i=j}\{1 - \mathfrak{I}[(M - M_i)^{2a}]\}
\end{aligned}
$$

Pour tout polynôme (positif ou négatif) à coefficient entiers $P(M)$ et pour $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$, nous observons que :

Si $P(M) = 0$, on a $\{1 - \mathfrak{I}[P(M)^{2a}]\} = 0$, et la réciproque est vraie.
Si $P(M) \neq 0$, on a $\{1 - \mathfrak{I}[P(M)^{2a}]\} = 1$, et la réciproque est vraie.

Ce qui permet d'établir un lien entre tous les polynômes (positifs ou négatifs) à coefficient entiers $P(M)$, à variable entière (quelquesoit le degré du polynôme), leur(s) racine(s) et la formule d'Impulsion Première $\mathfrak{I}$.

REMARQUE 1 :

Pour $P(M)$ un polynôme entier (positif ou négatif) de variable $M \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \geq 1$, si $P(M)$ n'a pas de racine entière, alors nous avons toujours :

$$\mathfrak{I}[P(M)^{2a}] = 0$$

REMARQUE 2 :

Pour $P1(M)$ un polynôme entier (positif ou négatif) de variable $M \in \mathbb{Z}$, et $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \geq 1$, nous pouvons retrouver $P2(M)$ les polynômes entiers (positif ou négatif) qui n'ont pas de racine entière sous la forme suivante :

$$P2(M) = P1(M) + b.\mathfrak{I}[P1(M)^{2a}] \qquad \text{avec } b \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

On pourrait aussi imaginer que b s'exprime en fonction de M ...

5.4 Fonctions intéressantes

Pour des valeurs de M appartenant à un intervalle (mais pas nécessairement), il est possible de construire des fonctions qui "rejètent" ces valeurs. Voici quelques exemples de fonctions avec M, D, D_1 et $D_2 \in \mathbb{N}$, et avec $a \in \mathbb{R}$. Ces fonctions "font penser à" des filtres.

<u>*Exemple 1 :*</u>

Fonction Rejet $F_1(M)$ définie pour $M \in [0; D]$:

$$F_1(M) = a - \frac{1}{\Im\left[\prod_{k=0}^{k=D}(M-k)\right]}$$

et dont les caractéristiques sont les suivantes :

$F_1(M) = (a-1)$ Pour $0 \leq M \leq D$.
$F_1(M) \to -\infty$ Pour $M > D$.

Ce qui fait penser à un filtre "passe-bas" sur la variable M.

<u>*Exemple 2 :*</u>

Fonction Rejet $F_2(M)$ définie pour $M \in [D; +\infty]$:

$$F_1(M) = a - \frac{1}{1 - \Im\left[\prod_{k=0}^{k=D}(M-k)\right]}$$

et dont les caractéristiques sont les suivantes :

$F_2(M) \to -\infty$ Pour $0 \leq M \leq D$.
$F_2(M) = (a-1)$ Pour $M > D$.

Ce qui fait penser à un filtre "passe-haut" sur la variable M.

Exemple 3 :

Fonction Rejet $F_3(M)$ définie pour $M \in [D_1; D_2]$:

$$F_3(M) = a - \frac{1}{\Im\left[\prod_{k=0}^{k=D_2}(M-k)\right] - \Im\left[\prod_{k=0}^{k=(D_1-1)}(M-k)\right]}$$

et dont les caractéristiques sont les suivantes :

$F_3(M) = (a-1)$ Pour $D_1 \leq M \leq D_2$.
$F_3(M) \to -\infty$ Pour $M < D_1$ et pour $M > D_2$.

Ce qui fait penser à un filtre "passe-bande" sur la variable M.

Exemple 4 :

Fonction Rejet $F_4(M)$ définie pour $M \in [D1; D2]$ et avec $D_1 = D_2 = D$:

$$F_4(M) = a - \frac{1}{\Im\left[\prod_{k=0}^{k=D_2}(M-k)\right] - \Im\left[\prod_{k=0}^{k=(D_1-1)}(M-k)\right]}$$

Donc

$$F_4(M) = a - \frac{1}{\Im\left[\prod_{k=0}^{k=D}(M-k)\right] - \Im\left[\prod_{k=0}^{k=(D-1)}(M-k)\right]}$$

et dont les caractéristiques sont les suivantes :

$F_4(M) = (a-1)$ Pour $M = D$.
$F_4(M) \to -\infty$ Pour $M \neq D$.

Ce qui fait penser à un filtre "rejection complémentaire" sur la variable M (la bande passante du filtre est une seule valeur de M).

Exemple 5 :

Fonction Rejet $F_5(M)$ définie pour $M \in [D1; D2]$ et avec $D_1 = D_2 = D$:

$$F_5(M) = a - \frac{1}{1 + \Im\left[\prod_{k=0}^{k=(D-1)} (M-k)\right] - \Im\left[\prod_{k=0}^{k=D} (M-k)\right]}$$

et dont les caractéristiques sont les suivantes :

$F_5(M) \to -\infty$	Pour $M = D$.
$F_5(M) = (a-1)$	Pour $M \neq D$.

Ce qui fait penser à un filtre “rejection” sur la variable M.

Hypothèse :

Il doit être possible d'établir des liens avec la théorie du signal ou même avec l'analyse harmonique si l'on considère que la variable M est une longueur d'onde ou une période.

Remarque :

Comme dans le **Chapitre I**, même remarque concernant l'association de la variable M à une variable physique. En associant M à une longueur d'onde, nous devons admettre l'existence d'une limite minimum pour une longueur d'onde, et donc une limite minimum pour une période, et une limite maximum pour une fréquence. Le raisonnement reste le même en associant M à une période puisqu'il faut dans ce cas admettre une limite minimum pour la période, les conclusions sont donc identiques, mais le fait d'associer M à la période permet de généraliser l'application des formules à tous les phénomènes cycliques.

6

Reconstitution par "quantification"

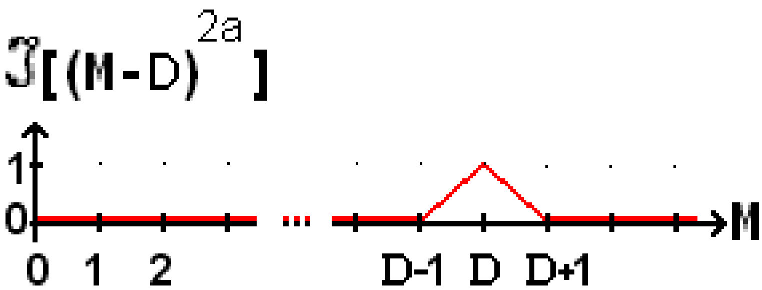
- Nous avons étudié le polynôme entier positif $P(M) = (M-D)^{2a}$ avec $D \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \geq 1$. Nous avons vu que comme ce polynôme est toujours positif pour $M \in \mathbb{Z}$, la formule d'Impulsion Première de ce polynôme est définie pour tout $M \in \mathbb{Z}$. Nous avions noté :

$$\mathfrak{I}[P(M)] = \mathfrak{I}[(M-D)^{2a}]$$

Ce polynôme s'annule seulement si $M = D$. Nous avons donc :

$\mathfrak{I}[(M-D)^{2a}] = 1$ si $M = D$
$\mathfrak{I}[(M-D)^{2a}] = 0$ sinon.

La représentation graphique de cette formule étant la suivante :



- La suite va être donnée simplement par des définitions :

Appelons "quantification" le fait que pour $\Im[P(M)]$ (donnée précédemment), nous devons avoir $M \in \mathbb{Z}$. Le mot "quantification" est empreinté à la physique quantique (les quantas, valeurs entières indivisibles, ou encore quantités discontinues).

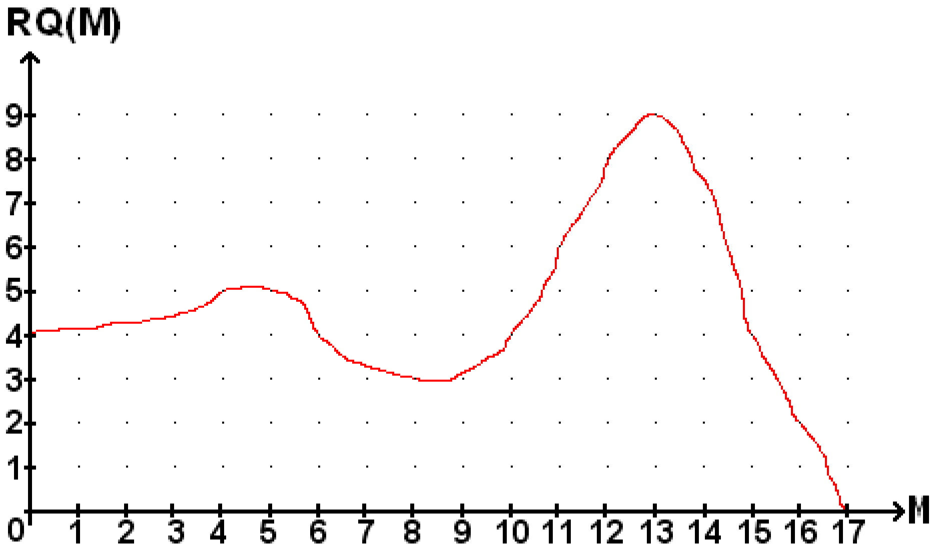
Appelons méthode de "reconstitution par quantification" la méthode d'ajout d'autant de formules d'Impusion Première (telles que $\Im[P(M)]$) que nécessaire pour donner une approximation de toutes fonctions ou formules connues, où la valeur de D est ajustable pour chacune de ces formules d'Impulsion Première. La méthode s'appliquant également à des formules non connues mais recherchée. Notons $RQ(M)$ la formule d'approximation obtenue.

Le désavantage est la marge d'erreur due à l'approximation.

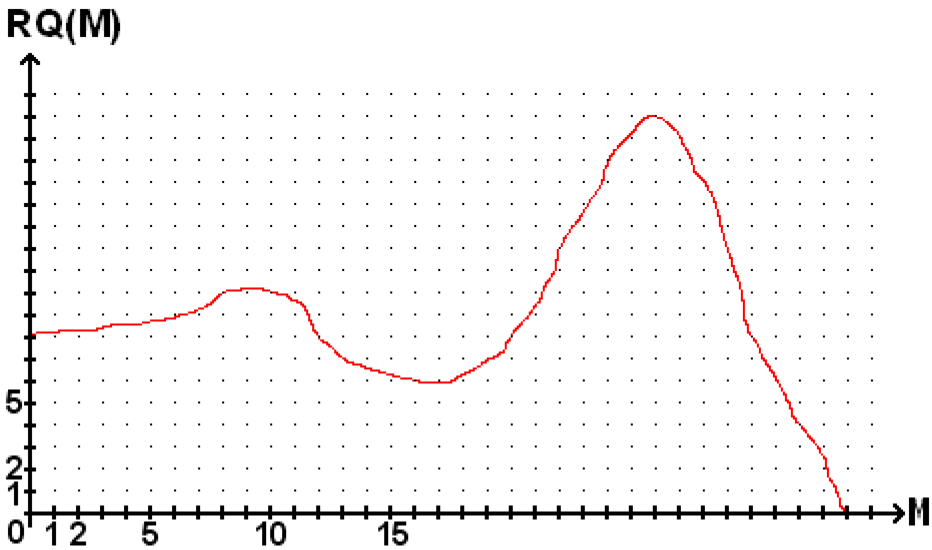
L'avantage de cette méthode qu'elle permet de donner une approximation de tout ce que l'on cherche à obtenir. Par exemple, en traçant une courbe à main levée et au hasard sur un graphique, il est possible de donner une approximation par cette méthode. Il est même possible de choisir l'échelle pour M et pour $\Im[P(M)]$ (afin de diminuer ou augmenter la marge d'erreur).

Pour cela, il suffit de tracer une courbe dans un plan sans repères de coordonnée ni d'abcisse. Une fois cette courbe tracée, il nous suffit de décider quel marge d'erreur est acceptable pour l'approximation (en ajoutant les repères de coordonnée et d'abcisse).

Par exemple donnons le tracé d'une courbe telle que :



La marge d'erreur de l'approximation peut être réduite en changeant la "résolution" du graphique, c'est-à-dire en effectuant un changement de repère (dans notre cas en ramenant l'unité de graphique précédent à une mesure 2 fois plus petite pour le graphique suivant), de manière à obtenir :



Nous pouvons procéder ainsi de suite en augmentant à l'infini la "résolution" graphique, de manière à ce que la reconstitution de cette courbe tende à devenir exacte.

Le terme de résolution (comme pour la résolution d'une image numérique) est ici employé car l'ensemble de coordonnées $\{M; RQ(M)\}$ est utilisée comme un "pixel" (terme informatique) qui serait déposé sur un point de la courbe, et de proche en proche sur tous les points de la courbe (dans le cas d'une résolution qui tendrait vers une précision exacte, et donc une marge d'erreur qui tendrait vers 0).

Remarquons qu'il est aussi possible de rajouter un coefficient multiplicateur devant chacune de ces formules d'Impulsion Première de $RQ(M)$ de manière à donner une valeur exacte de la courbe en M. Ceci nous permettrait de n'avoir à changer la résolution que de l'axe M sans changer celui de $RQ(M)$. D'ailleurs dans ce cas, et pour atteindre la bonne valeur de la courbe, il n'est pas utile de faire la somme de plusieurs formules d'Impulsions Premières en une valeur de M donnée : il suffit d'une seule formule d'Impulsion Première multipliée par le coefficient qui permet d'atteindre directement la valeur de la courbe. En faisant de même pour chaque valeur de M, nous reconstituons la courbe point par point de manière approximative.

Remarque importante :

Cette méthode de reconstitution par quantification fait penser aux fonctions en escalier utiles pour les intégrales. Il doit donc être possible d'établir un lien entre les fonctions intégrales et la formule $\mathfrak{I}[P(M)]$ telle que nous l'avons définie.

CHAPITRE III

Répartition exacte des Nombres Premiers

Introduction

Dans le fond, la méthode proposée pour atteindre notre objectif fait penser à la méthode de *MINÁC-WILLANS* [4]. Cependant, elle diffère largement dans la forme puisqu'elle invoque des fonctions que nous avons pu construire dans le **Chapitre I** et qui seront rappelées dans ce chapitre, ce qui permet de donner une alternative. Ces fonctions sont principalement la fonction $s(M)$ (la simplifiée de variable M, définie dans le **Chapitre I**) et la fonction $\mathfrak{I}(M)$ (l'Impulsion Première de variable M, définie dans le **Chapitre I**). La fonction $\mathfrak{I}(M)$, qui correspondant à un cas particulier de la fonction $s(M)$, va s'avérer très utile ici.

(ATTENTION, une fois encore dans ce chapitre, les crochets ont la même fonction que de simples parenthèses, ils ne signifient donc ni "valeur absolue" ni "partie entière")

7

Reconstitution de Pn par les formules de type $s(M)$ et $\mathfrak{I}(M)$

Il existe un moyen pour trouver tous les nombres premiers dans l'ordre croissant et sans répétition.

Nous allons faire référence à la formule $s(M)$ (qui est un cas particulier de la formule $f(M; x)$) abordée dans le **Chapitre I**.

7.1 Rappels

- Rappelons que, pour un ordre croissant de nombres premiers consécutifs, P_n est le $n^{ième}$ nombre premier. Lorsque nous traitons l'ensemble des nombres premiers, nous avons donc forcément $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. L'objectif est d'obtenir :

$P_1 = 2$
$P_2 = 3$
$P_3 = 5$
$P_4 = 7$
$P_5 = 11$
$P_6 = 13$
$P_7 = 17$
$P_8 = 19$
$P_9 = 23$
...

- La formule $s(M)$ est la simplifiée de variable M. Elle est le cas particulier de la formule $f(M;x)$ dans lequel $M = N$ et $x = 1$ (voir **Chapitre I**).

$s(M)$ est définie pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$:

$$S(M) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}.\prod_{v=1}^{v=3}(M-v)\right).\frac{\sin^2\left((M-1)!.\frac{\pi}{M}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}$$

Ou encore, pour $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$:

$$S(M) = \frac{\sin^2\left((M-1)!^m.\frac{\pi}{M}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}$$

Nous l'avons vu dans le **Chapitre I**, ceci qui est aussi équivalent à :

$$S(M) = \frac{\sin^2\left((M-2)!^m.\frac{\pi}{M}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}$$

Nous avons :

$s(M) = 1$ si $M \in \mathbb{P}$ (la réciproque est vraie)
$s(M) = 0$ si $M \notin \mathbb{N}$ (la réciproque est vraie)

- La formule $\mathfrak{I}(M)$:

La formule $\mathfrak{I}(M)$ est la formule d'Impulsion Première de variable M.La formule$\mathfrak{I}(M)$ est définie pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$ et se note :

$$\mathfrak{I}(M) = s(2.M+2)$$

$s(2.M+2)$ étant la simplifiée de variable $(2.M+2)$.

Ou encore (équivalent) :

$$\mathfrak{I}(M) = s(M+2).s(M+3)$$

$s(M+2)$ étant la simplifiée de variable $(M+2)$ et
$s(M+3)$ étant la simplifiée de variable $(M+3)$.

Elle se caractérise par :

$\mathfrak{I}(M) = 1$ si $M = 0$ (la réciproque est vraie)
$\mathfrak{I}(M) = 0$ si $M > 0$ (la réciproque est vraie)

Effectuons un petit raisonnement dans ce paragraphe. En changeant de variable tel que ce qui suit, nous pouvons obtenir une formule d'Impulsion Première :

Pour $M = X^{2a}$

$\mathfrak{I}(X^{2a})$ est définie pour tout $X \in \mathbb{Z}$ et pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 1$.

Pour $a = 1$, Nous avons donc :

$\mathfrak{I}(X^2) = 1$ si $X = 0$
$\mathfrak{I}(X^2) = 0$ si $X \in \mathbb{Z} - \{0\}$ (pour tout entier positif ou négatif sauf 0)

- La formule $C(M)$:

La formule de comptage des nombres premiers $C(M)$ est définie pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$. Pour N_1 et $N_2 \in \mathbb{N}$ tels que N_1 et $N_2 \geq 2$, la valeur de $C(M)$ donne la quantité de nombres premiers appartenant à l'intervalle $[N_1; N_2]$:

$$\mathrm{C}_{N_1}^{N_2}(M) = \sum_{M=N_1}^{M=N_2} s(M)$$

7.2 Etude

Changeons quelque peu les notations précédentes pour démarrer cette étude. Réécrivons :

$$\mathrm{C}_{N_1}^{N_2}(M) = \sum_{D=N_1}^{D=N_2} s(D)$$

Les propriétés des formules restent les mêmes, nous changeons simplement de nom de variable avec $D \in \mathbb{N}$, $D \geq 2$. En restreignant la formule $C(D)$ à l'intervalle $[2; M]$, nous avons :

$$\mathrm{C}_2^{M}(D) = \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$$

Cette formule de comptage ne peut être qu'un nombre entier supérieur ou égale à 1.

Notons n le $n^{ième}$ nombre premier P_n tel que $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et raisonnons pas à pas.

- **1ière partie du raisonnement :**

Notons X la différence entre n et la formule $C(D)$ restreinte à l'intervalle $[2; M]$:

$$X = n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$$

D'où

- Pour $n = \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$ nous avons $X = 0$

- Pour $n > \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$ nous avons $X \in \mathbb{Z} - \{0\}$

- Pour $n < \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$ nous avons $X \in \mathbb{Z} - \{0\}$

Regroupons les résultats de la formule de X en fonction de n et de M dans un tableau :

$$X = n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$$

X	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
M												
2		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
3		-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
4		-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
5		-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	
6		-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	
7		-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	
8		-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	
9		-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	
10		-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	
11		-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
12		-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
13		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
14		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
15		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
16		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	
17		-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	
18		-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	
19		-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	
20		-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	
21		-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	
22		-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	
23		-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	
24		-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	
25		-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	
26		-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	
27		-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	
28		-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	
29		-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	
30		-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	
...												...

- **2ième partie du raisonnement :**

- Pour $n = \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$ nous avons $X = 0$

  Et donc $X^2 = 0$

- Pour $n > \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$ nous avons $X \in \mathbb{Z} - \{0\}$

  Et donc $X^2 \in \mathbb{N} - \{0\}$, ce qui revient à écrire $X^2 \in \mathbb{N}$ tel que $X^2 > 0$.

- Pour $n < \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$ nous avons $X \in \mathbb{Z} - \{0\}$

  Et donc $X^2 \in \mathbb{N} - \{0\}$, ce qui revient à écrire $X^2 \in \mathbb{N}$ tel que $X^2 > 0$.

$\Longrightarrow$ Ce qui permet d'effectuer la synthèse :

- Pour $n = \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$, nous avons :

  $$X^2 = \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D)\right]^2 = 0$$

- Pour $n > \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$ et pour $n < \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$,

  c'est-à-dire pour $n \neq \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$, nous avons :

  $$X^2 = \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D)\right]^2 \qquad \text{tel que } X^2 \in \mathbb{N} \text{ et } X^2 > 0.$$

Regroupons les résultats de cette formule en fonction de n et de M dans un tableau :

$$X^2 = \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2$$

X^2	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
M												
2		0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	
3		1	0	1	4	9	16	25	36	49	64	
4		1	0	1	4	9	16	25	36	49	64	
5		4	1	0	1	4	9	16	25	36	49	
6		4	1	0	1	4	9	16	25	36	49	
7		9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	
8		9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	
9		9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	
10		9	4	1	0	1	4	9	16	25	36	
11		16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	
12		16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	
13		25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	
14		25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	
15		25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	
16		25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	
17		36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	
18		36	25	16	9	4	1	0	1	4	9	
19		49	36	25	16	9	4	1	0	1	4	
20		49	36	25	16	9	4	1	0	1	4	
21		49	36	25	16	9	4	1	0	1	4	
22		49	36	25	16	9	4	1	0	1	4	
23		64	49	36	25	16	9	4	1	0	1	
24		64	49	36	25	16	9	4	1	0	1	
25		64	49	36	25	16	9	4	1	0	1	
26		64	49	36	25	16	9	4	1	0	1	
27		64	49	36	25	16	9	4	1	0	1	
28		64	49	36	25	16	9	4	1	0	1	
29		81	64	49	36	25	16	9	4	1	0	
30		81	64	49	36	25	16	9	4	1	0	
...												...

- **3ième partie du raisonnement :**

- Pour $n = \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$:

  La valeur de $\sum_{D=2}^{D=M} s(D)$ est constante tant que le nombre premier suivant n'a pas été atteint par M. Autrement dit, cette valeur est constante pour M appartenant à un intervalle. Pour $P_n \in \mathbb{P}$ et pour $P_{(n+1)} \in \mathbb{P}$ (ici, $P_{(n+1)}$ est donc le nombre premier consécutif et supérieur à P_n), la valeur de $\sum_{D=2}^{D=M} s(D)$ est constante sur l'intervalle $M \in [P_n; P_{(n+1)} - 1]$.

  Nous en déduisons que :

$$n = \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \qquad \text{pour } M \in [P_n; P_{(n+1)} - 1]$$

  Et donc que : $X^2 = 0 \qquad$ pour $M \in [P_n; P_{(n+1)} - 1]$

  Dans ce cas, nous retrouvons :

$$\mathfrak{I}(X^2) = \mathfrak{I}\left\{\left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D)\right]^2\right\} = 1 \qquad \text{pour } M \in [P_n; P_{(n+1)} - 1]$$

- Pour $n \neq \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$, c'est-à-dire dans tous les autres cas, nous avons :

  $X^2 > 0$ tel que $X^2 \in \mathbb{N}$.

  Dans ce cas, nous retrouvons (donner un intervalle dans ce cas n'est pas nécessaire pour la suite du raisonnement) :

$$\mathfrak{I}(X^2) = \mathfrak{I}\left\{\left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D)\right]^2\right\} = 0$$

Regroupons les résultats de cette formule en fonction de n et de M dans un tableau :

$$\Im(X^2) = \Im\left\{\left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D)\right]^2\right\}$$

$\Im(X^2)$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
M												
2		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
4		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
5		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
6		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
7		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
8		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
9		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
10		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
11		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
12		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
13		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
14		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
15		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
16		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
17		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
18		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
19		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
20		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
21		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
22		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
23		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
24		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
25		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
26		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
27		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
28		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
29		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
30		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
...												...

• **4ième partie du raisonnement :**

Etudions, la formule suivante :

$M.s(M) = M$ pour $M = P_n$ (nous avons noté $P_n \in \mathbb{P}$)
$M.s(M) = 0$ pour $M \neq P_n$

Pour cette seconde égalité, il est intéressant de préciser l'intervalle. En effet, en reprenant les notations de la "**2ième partie du raisonnement**", nous avons :

$$M.s(M) = 0 \qquad \text{pour } M \in [P_n; P_{(n+1)} - 1]$$

D'où

$$M.s(M).\mathfrak{I}(X^2) = 0 \qquad \text{pour } M \in [P_n; P_{(n+1)} - 1]$$

- Pour $X^2 = 0$ et pour $M = P_n$, et uniquement dans ce cas, nous pouvons déduire que :

$$\begin{aligned} M.s(M).\mathfrak{I}(X^2) &= M.s(M).\mathfrak{I}\left\{\left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D)\right]^2\right\} \\ &= P_n.s(P_n).\mathfrak{I}\left\{\left[n - \sum_{D=2}^{D=P_n} s(D)\right]^2\right\} \\ &= P_n.(1).(1) \\ &= P_n \end{aligned}$$

- Pour $X^2 > 0$ (c'est-à-dire dans tous les autres cas, et cette fois-ci peu importe les autres valeurs de M), comme nous avons :
  $\mathfrak{I}(X^2) = 0$

  Nous déduisons également facilement que :
  $M.s(M).\mathfrak{I}(X^2) = 0$

  Rappelons que $s(M)$ n'est définie que pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$.

Regroupons les résultats de cette formule en fonction de n et de M dans un tableau :

$$M.s(M).\mathfrak{I}(X^2) = M.s(M).\mathfrak{I}\left\{\left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D)\right]^2\right\}$$

$M.s(M).\mathfrak{I}(X^2)$	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
M												
2		2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3		0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	
4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5		0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	
6		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
7		0	0	0	7	0	0	0	0	0	0	
8		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
11		0	0	0	0	11	0	0	0	0	0	
12		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
13		0	0	0	0	0	13	0	0	0	0	
14		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
15		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
16		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
17		0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	
18		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
19		0	0	0	0	0	0	0	19	0	0	
20		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
21		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
22		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
23		0	0	0	0	0	0	0	0	23	0	
24		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
25		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
26		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
27		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
28		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
29		0	0	0	0	0	0	0	0	0	29	
30		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
...												...

• **5ième partie du raisonnement :**

D'après la formule précédente (et d'après le tableau précédent) :

Pour n constant, il nous suffit de faire la somme de toutes les valeurs de la colonne correspondant à n, pour $M \in [2; +\infty]$. Comme toutes les valeurs de la colonne sont à 0 sauf une seule, qui vaut d'ailleurs le nombre premier recherché, la somme de toutes ces valeurs vaut finalement ce nombre premier recherché.

La formule du $n^{i\grave{e}me}$ nombre premier P_n recherché s'écrit donc :

$$P_n = \sum_{M=2}^{M \to +\infty} \left(M.s(M).\mathfrak{I} \left\{ \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 \right\} \right)$$

La formule donnant P_n étant définie pour tout $M \in \mathbb{N}$ tel que $M \geq 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 1$.

Cette formule permet donc de donner de manière exacte et générale la répartition de tous les nombres premiers consécutifs (c'est-à-dire selon la valeur de n) dans l'ordre croissant.

Nous voyons clairement dans cette formule que la formule d'Impulsion Première $\mathfrak{I}(X^2)$ (qui permet de ramener le raisonnement mathématique à une logique binaire, comme celle de l'algèbre de *BOOLE* [3]) et la simplifiée $s(M)$ (établissant également un lien entre le raisonnement mathématique et l'algèbre de *BOOLE*) sont d'une importane capitale. La formule d'Impulsion Première $\mathfrak{I}(X^2)$ et la simplifiée $s(M)$ permettent de ramener le raisonnement mathématique à un raisonnement en logique "binaire" , comme celle de l'algèbre de *BOOLE* (en donnant des résultats qui ne peuvent être que 0 ou 1). Comme la formule d'Impulsion Première est un cas particulier de la formule simplifiée, nous pouvons considérer que l'utilisation des formules simplifiées sont essentielles pour donner la répartition exacte des nombres premiers.

Cette étude a également permis de confirmer que la répartition des nombres premiers n'est pas dûe au hasard, puisqu'elle se soumet à des règles représentées par une formule précise.

Remarque :

Cette formule ne rend pas les calculs simples, puisque les calculs de la factorielle sont inévitablement plus longs pour les plus grands nombres. Or, l'objectif du **Chapitre I** ("**3.h.7 Produit de nombres factoriels et divisibilité par M, généralisation**"), et du **Chapitre IV** est de donner une formule où le calcul de la simplifiée est optimal, ce qui permettra aussi d'avoir un impact sur ce chapitre.

En comparaison aux autres formules utilisées (telles que $f(M; x)$, $s(M)$ ou $\mathfrak{I}(M)$), cette formule se donne à un niveau de complexité logique supérieur.

7.3 Formule Pn de répartition exacte des nombres premiers

- Formule P_n de répartition exacte des nombres premiers :

Nous venons d'établir précédemment la formule P_n telle que $P_n \in \mathbb{P}$, pour tout $M \in \mathbb{N}$ tel que $M \geq 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 1$:

$$P_n = \sum_{M=2}^{M\to+\infty} \left(M.s(M).\mathfrak{I} \left\{ \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 \right\} \right)$$

En rappelant que :

$$S(M) = \frac{\sin^2 \left(\dfrac{(M-1)!^m.\pi}{M} \right)}{\sin^2 \left(\dfrac{\pi}{M} \right)} \qquad \text{avec } m \in \mathbb{N},\ m \geq 2$$

En rappelant que :

$$S(D) = \frac{\sin^2 \left(\dfrac{(D-1)!^m.\pi}{D} \right)}{\sin^2 \left(\dfrac{\pi}{D} \right)} \qquad \text{avec } m \in \mathbb{N},\ m \geq 2$$

Et que, pour $X = n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(X^2) &= s(X^2+2).s(X^2+3) \\ &= s(2.X^2+2) \\ &= \frac{\sin^2 \left(\dfrac{(2.X^2+1)!^m.\pi}{2.X^2+2} \right)}{\sin^2 \left(\dfrac{\pi}{2.X^2+2} \right)} \end{aligned}$$

- Rechcherche d'une formule de restriction $R(n)$:

Dans le cas de la formule de répartition exacte des nombres premiers P_n, et comme dans celui de la formule $D(N)$ vue dans le **Chapitre I**, nous pouvons restreindre notre formule aux calculs les plus utiles (ou plutôt limiter les calculs inutiles) grâce à une formule de restriction $R(n)$ qui remplacera la borne supérieure de M (qui tend vers " $+\infty$ ").

Dans ce cas, les calculs s'arrêtent lorsque $R(n) = P_n$, avec $R(n) \in \mathbb{N}$ tel que $R(n) \geq 2$, autrement dit lorsque :

$$\sum_{M=2}^{M=R(n)} \left(M.s(M).\mathfrak{I} \left\{ \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 \right\} \right) \neq 0$$

Car dans ce cas précis, nous avons :

$$P_n = \sum_{M=2}^{M=R(n)} \left(M.s(M).\mathfrak{I} \left\{ \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 \right\} \right)$$

Et donc

$$P_n = \sum_{M=2}^{M=P_n} \left(M.s(M).\mathfrak{I} \left\{ \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 \right\} \right)$$

SUITE EN COURS

DE REALISATION !

Remarque :

Nous pouvons finir en faisant le lien direct avec la formule $s(M)$ puisque $s(M) = 1$ pour $M = P_n$ seulement, P_n étant donné par la formule précédente.

8

Formule de répartition exacte des nombres premiers jumeaux Pj

D'après la même méthode que précédemment, nous pouvons établir une formule donnant la répartition exacte des nombres premiers jumeaux, c'est-à-dire le répartition des nombres premiers jumeaux dans l'ordre croissant.

Notons P_j le $j^{ième}$ nombre premier de l'ensemble de tous les nombres premiers jumeaux. L'objectif est d'obtenir (sans faire de distinction sur la position des nombres premiers jumeaux au sein d'un couple) :

Pour $j = 1$, $\quad P_j = 3$
Pour $j = 2$, $\quad P_j = 5$
Pour $j = 3$, $\quad P_j = 7$
Pour $j = 4$, $\quad P_j = 11$
Pour $j = 5$, $\quad P_j = 13$
Pour $j = 6$, $\quad P_j = 17$
Pour $j = 7$, $\quad P_j = 19$
Pour $j = 8$, $\quad P_j = 29$
Pour $j = 9$, $\quad P_j = 31$
...

Cette partie est un peu plus délicate que la précédente car elle va nécessiter une synthèse entre 2 formules du même type que la formule P_n (que nous venons d'établir).

Pour éviter que le développement ne soit trop lourd à gérer, donnons quelques conditions au raisonnement. Par anticipation, nous devrons utiliser simultanément les formules simplifiées premières $s(M)$, $s(M+2)$ et $s(M-2)$. Ce qui donne tout de suite le domaine de définition de M que nous allons devoir adopter :

$$M \in \mathbb{N} \text{ tel que } M \geq 4$$

Notons $j' \in \mathbb{N}$, $j' \geq 1$.

Effectuons ici aussi le raisonnement en plusieurs parties.

• **1ière partie du raisonnement :**

D'après la formule du type de $s(M)$ (voir "**7.1 Rappels**" page 287) et en tenant compte du domaine de définition donné $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 4$:

$s(M) = 1$ si $M \in \mathbb{P}$
$s(M) = 1$ si $M \notin \mathbb{P}$

- Nous pouvons donc construire une formule de comptage des couples de nombres premiers jumeaux. Une première approche se fait en donnant :

$s(M).s(M+2) = 1$ si M et $(M+2) \in \mathbb{P}$ simultanément,
$s(M).s(M+2) = 0$ si $M \notin \mathbb{P}$ ou si $(M+2) \notin \mathbb{P}$ seulement.

D'où $\sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D+2)]$ une partie de la formule de comptage.

Or, pour le domaine de définition donné, le premier couple de nombres premiers jumeaux $\{3; 5\}$ ne peut pas être compté par la formule précédente. Pour être exacte, nous devons ajouter 1 à cette formule, ce qui symbolisera que nous avons bien tenu compte du premier couple pour le comptage :

$$1 + \sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D+2)]$$

Pour M passant par tous les nombres entiers consécutifs du domaine de définition, cette formule donne nécessairement pour résultats tous les nombres entiers de 1 à l'infini.

- Nous pouvons également construire une formule de comptage des couples de nombres premiers jumeaux par une seconde approche en donnant :

$s(M).s(M-2) = 1$ si M et $(M-2) \in \mathbb{P}$ simultanément,
$s(M).s(M-2) = 0$ si $M \notin \mathbb{P}$ ou si $(M-2) \notin \mathbb{P}$ seulement.

$$\sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D-2)]$$

Pour M passant par tous les nombres entiers consécutifs du domaine de définition, cette formule donne nécessairement pour résultats tous les nombres entiers de 0 à l'infini.

Ici, contrairement à la précédente formule de comptage, le domaine de définition nous permet de compter tous les couples de nombres premiers jumeaux.

- Ces 2 différentes formules de comptage vont être utiles pour la suite.

• **2ième partie du raisonnement :**

Dans le couple des nombre premiers jumeaux donné par $\{P_{j'}; P_{(j'+1)}\}$, la variable j' donne le $j'^{\ ième}$ couple. Nous pouvons constater que :

- Si j' est impaire, alors $P_{j'}$ donne le premier (dans l'ordre croissant) du couple de nombres premiers jumeaux,
- Si j' est paire, alors $P_{j'}$ donne le second (dans l'ordre croissant) du couple de nombres premiers jumeaux.

Ce qui indique de séparer les travaux : d'une part pour j' impaire et d'autre part pour j' paire.

Il est impératif de constater que cette méthode contient une contradiction qu'il sera nécessaire de corriger. En effet, cette méthode implique de considérer que le $j'^{\ ième}$ nombre premier jumeau ne peut être le même que le $(j'+1)^{ième}$.

Or, il existe 2 couples de nombres premiers jumeaux et seulement 2 qui ont un nombre premier en commun, il s'agit des couples :

$\{3; 5\}$ et $\{5; 7\}$

Nous constatons dans ce cas que le nombre 5 va nécessairement se retrouver dans les travaux concernant j' impaire et dans les travaux concernant j' paire. Il deviendra utile de changer de variable en considérant la variable j. La variable j' ne doit donc être considérée que comme une variable intermédiaire permettant d'atteindre notre objectif.

Nous savons donc déjà qu'une formule de correction de ce défaut sera nécessaire.

• <u>**3ième partie du raisonnement :**</u>

Dans un premier temps et pour rendre le raisonnement plus simple, omettons volontairement le défaut vu précédemment.

- Si j' est impaire, alors $P_{j'}$ donne le premier (dans l'ordre croissant) du couple de nombres premiers jumeaux.

En notant :

$$X_1 = j' - 2.\left\{1 + \sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D+2)]\right\} + 1$$

Si $j' = 2.\left\{1 + \sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D+2)]\right\} - 1$

Alors ${X_1}^2 = 0$.

Autrement dit : si j' est un nombre impaire. Et comme nous avons vu que pour M passant par tous les nombres entiers consécutifs du domaine de définition, la formule :

$$1 + \sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D+2)]$$

donne nécessairement pour résultats tous les nombres entiers de 1 à l'infini, cela implique que :

$${X_1}^2 = 0 \qquad \text{quelquesoit le nombre impaire } j'.$$

Et donc $\qquad \Im({X_1}^2) = 1$

Maintenant, dans tous les autres cas restants :

Si $j' \neq 2.\left\{1 + \sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D+2)]\right\} - 1$

Alors ${X_1}^2$ vaut un nombre entier, et donc :

$$\Im({X_1}^2) = 0$$

- Si j' est paire, alors $P_{j'}$ donne le second (dans l'ordre croissant) du couple de nombres premiers jumeaux.

En notant :

$$X_2 = j' - 2.\sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D-2)]$$

Si $j' = 2.\sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D-2)]$

Alors ${X_2}^2 = 0$.

Autrement dit : si j' est un nombre paire. Et comme nous avons vu que pour M passant par tous les nombres entiers consécutifs du domaine de définition, la formule :

$$1 + \sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D-2)]$$

donne nécessairement pour résultats tous les nombres entiers de 0 à l'infini, cela implique que :

$${X_2}^2 = 0 \qquad \text{quelquesoit le nombre paire } j'.$$

Et donc $\quad \Im({X_2}^2) = 1$

Maintenant, dans tous les autres cas restants :

Si $j' \neq 2.\sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D-2)]$

Alors ${X_2}^2$ vaut un nombre entier, et donc :

$$\Im({X_2}^2) = 0$$

- Pour la suite, en regroupant dans des tableaux les résultats des formules $\Im({X_1}^2)$ et $\Im({X_2}^2)$, nous pourrons plus facilement mettre en évidence l'orientation de nos recherches.

• **<u>4ième partie du raisonnement :</u>**

- D'une part, pour j' impaire, nous avons la formule $\mathfrak{I}(X_1{}^2)$:

$\mathfrak{I}(X_1{}^2)$	j'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
M												
2		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
3		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
4		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
6		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
7		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
8		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
9		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
10		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
11		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
12		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
13		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
14		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
15		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
16		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
17		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
18		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
19		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
20		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
21		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
22		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
23		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
24		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
25		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
26		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
27		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
28		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
29		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
30		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
31		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
32		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
...												...

<u>A NOTER :</u>

Les couples de nombres premiers jumeaux sont en bleu, les croix rouges “x” sont les valeurs impossibles à atteindre car en-dehors du domaine de définition.

Nous constatons clairement que notre formule multipliée par $s(M).s(M+2)$ nous donne la position du premier nombre premier jumeau du couple. La formule s'écrit donc $\Im({X_1}^2).s(M).s(M+2)$:

$\Im({X_1}^2).s(M).s(M+2)$	j'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
M												
2		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
3		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	
6		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
7		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
8		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
11		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
12		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
13		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
14		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
15		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
16		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
17		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
18		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
19		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
20		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
21		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
22		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
23		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
24		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
25		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
26		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
27		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
28		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
29		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
30		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
31		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
32		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
...												...

A NOTER :

De plus, nous constatons que le nombre premier 3 ne peut pas être donné directement par cette méthode puisqu'il est en-dehors du domaine de définition.

- D'autre part, pour j' paire, nous avons la formule $\mathfrak{I}(X_2{}^2)$:

$\mathfrak{I}(X_2{}^2)$	j'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
M												
2		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
3		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
6		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
7		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
8		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
9		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
10		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
11		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
12		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
13		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
14		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
15		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
16		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
17		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
18		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
19		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
20		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
21		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
22		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
23		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
24		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
25		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
26		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
27		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
28		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
29		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
30		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
31		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
32		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
...												...

Nous constatons clairement que notre formule multipliée par $s(M).s(M-2)$ nous donne la position du second nombre premier jumeau du couple. La formule s'écrit donc $\Im(X_2{}^2).s(M).s(M-2)$:

$\Im(X_2{}^2).s(M).s(M-2)$	j'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
M												
2		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
3		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	
6		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
7		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
8		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
11		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
12		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
13		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
14		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
15		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
16		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
17		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
18		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
19		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
20		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
21		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
22		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
23		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
24		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
25		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
26		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
27		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
28		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
29		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
30		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
31		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
32		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
...												...

- Pour finir, nous pouvons faire la synthèse en regroupant tous ces résultats dans un seul tableau. Ceci va être possible grâce à l'addition de ces 2 formules, notons $Y = \Im({X_1}^2).s(M).s(M+2) + \Im({X_2}^2).s(M).s(M-2)$:

Y	j'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
M												
2		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
3		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5		0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	
6		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
7		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	
8		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
11		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
12		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
13		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	
14		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
15		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
16		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
17		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
18		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
19		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
20		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
21		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
22		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
23		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
24		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
25		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
26		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
27		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
28		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
29		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
30		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
31		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
32		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
...												...

Comme nous nous y attendions, le nombre 5 se trouvant dans 2 couples différents, j' nous donne ce nombre dans 2 positions différentes. De plus, comme 3 est en-dehors du domaine de définition de M, j' ne peut pas indiquer sa position directment dans le tableau.

Nous allons devoir corriger ces défauts.

- **<u>5ième partie du raisonnement :</u>**

\- Dernière étape avec les formules avant de corriger les défauts.

Notons $Z = \sum_{M=4}^{M \to +\infty} \{M.[\Im({X_1}^2).s(M).s(M+2) + \Im({X_2}^2).s(M).s(M-2)]\}$:

Z	j'	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
M												
2		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
3		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5		0	5	5	0	0	0	0	0	0	0	
6		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
7		0	0	0	7	0	0	0	0	0	0	
8		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
11		0	0	0	0	11	0	0	0	0	0	
12		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
13		0	0	0	0	0	13	0	0	0	0	
14		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
15		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
16		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
17		0	0	0	0	0	0	17	0	0	0	
18		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
19		0	0	0	0	0	0	0	19	0	0	
20		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
21		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
22		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
23		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
24		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
25		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
26		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
27		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
28		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
29		0	0	0	0	0	0	0	0	29	0	
30		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
31		0	0	0	0	0	0	0	0	0	31	
...												...

- Premier défaut : Nous constatons que j' ne donne pas de nombre premier pour $j' = 1$, ce qui décale la position dans la répartition des nombres premiers jumeaux. Nous devons donc effectuer un décalage par changement de variable pour résoudre ce problème. En notant $j = j' - 1$ tel que que $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$:

Z	j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
M												
2		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
3		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
4		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
5		5	5	0	0	0	0	0	0	0	0	
6		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
7		0	0	7	0	0	0	0	0	0	0	
8		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
11		0	0	0	11	0	0	0	0	0	0	
12		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
13		0	0	0	0	13	0	0	0	0	0	
14		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
15		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
16		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
17		0	0	0	0	0	17	0	0	0	0	
18		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
19		0	0	0	0	0	0	19	0	0	0	
20		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
21		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
22		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
23		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
24		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
25		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
26		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
27		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
28		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
29		0	0	0	0	0	0	0	29	0	0	
30		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
31		0	0	0	0	0	0	0	0	31	0	
...												...

- Second défaut : Pour finir, il ne nous reste plus qu'à nous servir du défaut de la répétition du nombre 5 pour convertir le premier des 2 en nombre 3.

Pour corriger ce défaut, nous allons faire appel une nouvelle fois à la formule d'Impulsion Première. Nous allons l'appliquer de telle sorte que seulement la valeur $j = 1$ sera modifiée et aucune autre valeur. Pour cela, notons :

$$\mathfrak{I}(j-1)$$

Donnons tous les résultats de cette formule pour $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$:

$\mathfrak{I}(j-1) = 1$ si $j = 1$
$\mathfrak{I}(j-1) = 0$ si $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$

Ce qui va permettre d'établir une formule de correction pour $j = 1$ seulement. En effet :

$-2.\mathfrak{I}(j-1) = -2$ si $j = 1$
$-2.\mathfrak{I}(j-1) = 0$ si $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$

Or, pour $j = 1$, nous avons :

$$Z = \sum_{M=4}^{M \to +\infty} \{M.[\mathfrak{I}({X_1}^2).s(M).s(M+2) + \mathfrak{I}({X_2}^2).s(M).s(M-2)]\} = 5$$

En effectuant la somme entre la formule de départ et la formule de correction, nous avons :

$$-2.\mathfrak{I}(j-1) + \sum_{M=4}^{M \to +\infty} \{M.[\mathfrak{I}({X_1}^2).s(M).s(M+2) + \mathfrak{I}({X_2}^2).s(M).s(M-2)]\}$$

$$= -2.\mathfrak{I}(1-1) + 5 = 3 \qquad \text{(pour } j = 1\text{)}$$

Et les résultats de la somme entre la formule de départ et de la formule de correction sont exactement ceux de la formule de départ lorsque $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 2$.

Ce qui nous permet de conclure et d'établir la formule de répartion exacte des nombres premiers jumeaux grâce à cette somme.

• **Formule P_j de répartition exacte des nombres premiers jumeaux**

Rappelons que $j = j' - 1$, donc $j' = j + 1$.

Nous pouvons finalement donner P_j la formule de répartion exacte des nombres premiers jumeaux par une somme qui fait la synthèse de la correction des défauts, où j donne le $j^{ième}$ des nombres premiers jumeaux dans l'ordre croissant ($j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$) et sans répétition :

$$P_j = -2.\mathfrak{I}(j-1) + \sum_{M=4}^{M \to +\infty} \{M.[\mathfrak{I}({X_1}^2).s(M).s(M+2) + \mathfrak{I}({X_2}^2).s(M).s(M-2)]\}$$

Avec :

$$\begin{aligned} X_1 &= j' - 2.\left\{1 + \sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D+2)]\right\} + 1 \\ &= j + 2 - 2.\left\{1 + \sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D+2)]\right\} \end{aligned}$$

Et avec :

$$\begin{aligned} X_2 &= j' - 2.\sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D-2)] \\ &= j + 1 - 2.\sum_{D=4}^{D=M} [s(D).s(D-2)] \end{aligned}$$

Implicitement : $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 4$

Remarque :

Comme pour P_n (la méthode étant la même), la formule P_j ne rend pas les calculs simples, puisque les calculs de la factorielle sont inévitablement plus longs pour les plus grands nombres.

Ici aussi, en comparaison aux autres formules utilisées (telles que $f(M; x)$, $s(M)$ ou $\mathfrak{I}(M)$), cette formule se donne à un niveau de complexité logique supérieur.

9

Réécriture de la fonction ζ (Zêta) de RIEMANN

Etant donné la fonction ζ de *RIEMANN* [5], pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

Et étant donné que dans cette formule, $p \in \mathbb{P}$ permet de parcourir l'ensemble de tous les nombres premiers, ce qui peut donc être remplacé par P_n (voir sous-partie "**7.3 Formule P_n de répartition exacte des nombres premiers**" page 300) pour n variant de 1 à l'infini, nous obtenons simplement :

$$\zeta(s) = \prod_{n=1}^{n \to +\infty} \frac{1}{1 - \left[\sum_{M=2}^{M \to +\infty} \left(M.s(M).\Im \left\{ \left[n - \sum_{D=2}^{D=M} s(D) \right]^2 \right\} \right) \right]^{-s}}$$

10

Impressions personnelles

D'après le tableau de référence $T.R.1$ du **Chapitre I**, nous avons vu la régularité dans les puissances des facteurs premiers des nombres entiers $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Nous venons également de voir que donner une formule P_n de répartition des nombres premiers était possible par "reconstitution". La régularité est bien là, juste sous nos yeux...

Une fois que je l'ai vu, je n'ai pas ressenti de joie immense mais presque une étrange déception, même après tant d'efforts : celle de constater que jamais rien n'avait changer au sujet des nombres premiers, seuls les points de vue à leur égard ont changé au cours du temps.

J'ai dû me débarrasser de mes principaux défauts, qui m'encombraient pour percevoir le monde tel qu'il est. Il me reste encore un défaut important à changer, puisque j'ai eu suffisement d'orgueil pour croire que je pouvais réussir là où d'autres ont échoué, m'affranchir de cet orgueil devient nécessaire afin de pouvoir progresser encore.

Je pense que le point de vue le plus juste peut être atteint lorsqu'on se rend compte que pour étudier le monde, il faut pouvoir prendre conscience que nous ne pouvons être qu'une de ses parties, une partie égale à une autre partie du monde finalement, d'où il devient possible d'étudier le monde ou de s'étudier soi-même indifféremment. Ce qui permet de voir que les vérités les plus profondes valables pour ce monde sont aussi contenues en nous-même (puisque nous sommes une partie de ce monde). Ceci permet de mettre en évidence un lien naturelle avec une certaine philosophie (que nous serons amenés à développer par la suite).

J'ai simplement constaté que d'avoir essayé de voir les nombres premiers tels qu'ils étaient et sans "préjugé" m'a permis de voir et de comprendre l'ordre qui y règne. Il faut simplement adopter cette attitude car c'est aussi celle que l'on se doit d'adopter envers les humains et la nature. Il faut être respectueux en général pour comprendre uniquement par soi-même l'ordre dans les nombres premiers (même si cela peut paraître étrange de mêler l'idée de respect à celle de la compréhension d'un phénomène logique, il n'en est rien : ceci sera d'ailleurs développé dans le **Chapitre V**, qui est selon moi d'une importance au moins aussi significative que les autres, d'un point de vue logique).

Pour la suite, le **Chapitre IV** se donne pour objectif de révéler les régularités qui règnent au sein même des valeurs de la fonction ζ de *RIEMANN*, ainsi qu'une étude permettant d'inclure cette fonction ζ dans un cadre plus générale. L'objectif le plus profond étant de rendre le calcul optimal pour des formules vues telles que $s(M)$ et par conséquent de rendre le calcul optimal pour obtenir P_n.

CHAPITRE IV

Etude de la fonction ζ de RIEMANN et du nombre π

Introduction

Le but de ce chapitre est de rechercher une méthode qui permette de simplifier ou de rendre le calcul optimal afin d'obtenir des nombres premiers. Nous avons vu effectivement dans le **Chapitre I** (partie "**3.8.7 Produit de nombres factoriels et divisibilité par** M**, généralisation**") que des simplifications étaient possibles afin de limiter la longueur des calculs dûe à la factorielle dans la formule de $s(M)$. Il devient donc naturel de se demander s'il existe une expression mathématique équivalente qui limite les calculs au strict nécessaire.

Remarque préalable :

Comme dans les chapitres précédents, les crochets ne signifient pas "partie entière", ils ont la même fonction que de simples parenthèses.

11

Etude de la fonction ζ (Zêta)

Pour commencer, nous allons aborder la fonction ζ par une première approche (faible) permettant d'établir un lien entre la somme des fonctions $\zeta(s)$ lorsque s varie de 1 à l'infini et une fonction "simple".

Puis, nous verrons que la fonction ζ peut être vue comme étant un cas particulier de fonction qui peut s'inscrire dans un type de fonction plus "générale" (approche moins simple).

Rappel :

$$\zeta(s) \quad = \quad \sum_{n=1}^{n\to+\infty} \frac{1}{n^s} \quad = \quad \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

11.1 Première approche

De manière "faible" (c'est-à-dire de manière relativement simple), nous pouvons établir un lien entre chaque fonction ζ lorsque s varie telle que $s \in \mathbb{N}$, en effectuant la somme des fonctions ζ pour chaque $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 1$ (le cas de $s = 0$ n'étant pas indispensable, nous l'évitons par anticipation).

11.1.1 Piste d'écritures équivalentes à la fonction ζ

Dans un premier temps, notons cette somme :

$$\sum_{s=1}^{s\to+\infty} \zeta(s) = \zeta(1)+\zeta(2)+\zeta(3)+\zeta(4)+\zeta(5)+\zeta(6)+\zeta(7)+\zeta(8)+...$$

En étalant la somme sur plusieurs lignes (chaque ligne correspond à une égalité de $\zeta(s)$ pour une valeur de s unique) :

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{s\to+\infty} \zeta(s) \quad = \quad & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+...\\ & +1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{8^2}+...\\ & +1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{8^3}+...\\ & +1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{8^4}+...\\ & + \quad ...\end{aligned}$$

Or, l'égalité présentée sous cette forme nous permet de faire apparaître qu'une somme de chaque colonne (à chaque début de ligne, un exemple de groupe est repéré en rouge, un autre exemple est repéré en bleu) nous donne une nouvelle égalité :

$$\sum_{s=1}^{s\to+\infty} \zeta(s) = \sum_{s=1}^{s\to+\infty}(1) + \sum_{s=1}^{s\to+\infty}\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{8^s}+...\right)$$

Or, nous savons que pour $0<u<1$:

$$\sum_{s=0}^{s\to+\infty} u^s = 1+\sum_{s=1}^{s\to+\infty} u^s = 1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+u^6+...=\frac{1}{1-u}$$

D'où $$\sum_{s=1}^{s\to+\infty} u^s = \frac{1}{1-u}-1$$

Et d'où nous pouvons également déduire :

$$\sum_{s=1}^{s\to+\infty}\left(\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{8^s}+...\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}-1\right)+\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-1\right)+\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}-1\right)+\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}-1\right)+\left(\frac{1}{1-\frac{1}{6}}-1\right)+...$$
$$=\sum_{k=2}^{k\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}-1\right)$$

Et donc finalement une formule générale pour $s\in\mathbb{N}$, $s\geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{s=1}^{s\to+\infty}\zeta(s) &= \sum_{s=1}^{s\to+\infty}(1)+\sum_{k=2}^{k\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}-1\right)\\ &= \sum_{s=1}^{s\to+\infty}(1)-\sum_{k=2}^{k\to+\infty}(1)+\sum_{k=2}^{k\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)\\ &= 1+\sum_{s=2}^{s\to+\infty}(1)-\sum_{k=2}^{k\to+\infty}(1)+\sum_{k=2}^{k\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)\end{aligned}$$

Or, le nombre d'éléments contenu dans chacune des sommes étant identique, nous pouvons conclure que :

$$\sum_{s=2}^{s\to+\infty}(1)=\sum_{k=2}^{k\to+\infty}(1)$$

D'où

$$\sum_{s=2}^{s\to+\infty}(1)-\sum_{k=2}^{k\to+\infty}(1)=0$$

D'où nous déduisons également que :

$$\sum_{s=1}^{s\to+\infty}\zeta(s)=1+\sum_{k=2}^{k\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)$$

La divergence de $\zeta(1)$ implique la divergence de cette formule. Afin d'éviter la divergence dûe à $\zeta(1)$, nous allons essayer d'exprimer cette somme en fonction de s compris entre 2 et $+\infty$.

D'autre part, prenons en considération cette égalité pour $x \in \mathbb{N}$, $x \geq 2$:

$$V(x) = 1 + \sum_{k=2}^{k=x} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right)$$

Nous pouvons donner les valeurs de cette formule en fonction de x :

$$\begin{aligned}
V(2) &= -\frac{1}{2} \\
V(3) &= -\frac{5}{3} \\
V(4) &= -\frac{11}{4} \\
V(5) &= -\frac{19}{5} \\
V(6) &= -\frac{29}{6} \\
V(7) &= -\frac{41}{7} \\
V(8) &= -\frac{55}{8} \\
&\ldots \\
V(x) &= - \quad \frac{x(x-1)-1}{x}
\end{aligned}$$

Donc

$$1 + \sum_{k=2}^{k=x} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \right) = \quad - \quad \frac{x(x-1)-1}{x}$$

Or,

$$\sum_{k=2}^{k=x}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)=\sum_{k=2}^{k=x}\left(\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=2}^{k=x}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)$$

D'où

$$\sum_{k=2}^{k\to+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)=\sum_{k=2}^{k\to+\infty}\left(\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=2}^{k\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)$$

De plus,

$$\zeta(1)=\sum_{k=1}^{k\to+\infty}\left(\frac{1}{k}\right)=1+\sum_{k=2}^{k\to+\infty}\left(\frac{1}{k}\right)$$

D'où

$$\sum_{k=2}^{k\to+\infty}\left(\frac{1}{k}\right)=\zeta(1)-1$$

Pour finir, nous avons vu que :

$$\sum_{s=1}^{s\to+\infty}\zeta(s)=1+\sum_{k=2}^{k\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)$$

D'où

$$\sum_{k=2}^{k\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)=-1+\sum_{s=1}^{s\to+\infty}\zeta(s)$$

Ce que nous pouvons également écrire :

$$\sum_{k=2}^{k\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)=-1+\zeta(1)+\sum_{s=2}^{s\to+\infty}\zeta(s)$$

Ce qui nous permet de déduire que :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} V(x) &= 1+\sum_{k=2}^{k\to+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right) \\
&= 1+\sum_{k=2}^{k\to+\infty}\left(\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=2}^{k\to+\infty}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right) \\
&= 1+[\zeta(1)-1]-\left[\zeta(1)-1+\sum_{s=2}^{s\to+\infty}\zeta(s)\right]
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} V(x) = 1-\sum_{s=2}^{s\to+\infty}\zeta(s)$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\sum_{s=2}^{s\to+\infty}\zeta(s) &= \lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{x(x-1)-1}{x}\right] \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(1+x-1-\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Or,

$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 \qquad \text{Et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}\right) = +\infty$

Ce qui permet, d'une part, de conclure que la série diverge :

$$\sum_{s=2}^{s\to+\infty}\zeta(s) = +\infty$$

11.1.2 La fonction ζ assimilable à la fonction A

Dans un second temps, nous pouvons apporter une précision sur le comportement de $\zeta(s)$ pour $s \in \mathbb{N}$ et au voisinage de $+\infty$. Rappelons que :

$$\sum_{s=1}^{s\to+\infty} \zeta(s) = \zeta(1) + \sum_{s=2}^{s\to+\infty} \zeta(s) \qquad \text{Et} \qquad \zeta(1) = 1 + \sum_{k=2}^{k\to+\infty} \frac{1}{k}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\sum_{s=2}^{s\to+\infty} \zeta(s) &= -\zeta(1) + \sum_{s=1}^{s\to+\infty} \zeta(s) \\
&= -\left[1 + \sum_{k=2}^{k\to+\infty} \frac{1}{k}\right] + \sum_{s=1}^{s\to+\infty} \zeta(s)
\end{aligned}$$

Or, nous avons vu que :

$$\sum_{s=1}^{s\to+\infty} \zeta(s) = 1 + \sum_{k=2}^{k\to+\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)$$

Ce qui nous permet de déduire que :

$$\begin{aligned}
\sum_{s=2}^{s\to+\infty} \zeta(s) &= -1 - \sum_{k=2}^{k\to+\infty} \frac{1}{k} + 1 + \sum_{k=2}^{k\to+\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right) \\
&= -\sum_{k=2}^{k\to+\infty} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{k\to+\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{k\to+\infty} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{k}} - \frac{1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{k\to+\infty} \left[1 + \frac{1}{k(k-1)}\right]
\end{aligned}$$

(ce qui permet également de déduire la divergence de l'égalité)

Le nombre d'éléments étant le même dans les sommes de chacun des 2 membres, nous pouvons ramener la variable k à $k = s$, ce qui nous permet d'écrire plus simplement que :

$$\sum_{s=2}^{s\to+\infty} \zeta(s) = \sum_{s=2}^{s\to+\infty} \left[1 + \frac{1}{s(s-1)}\right]$$

Le nombre d'éléments étant le même dans les sommes de chacun des 2 membres, cette dernière égalité nous permet d'établir que la fonction $\zeta(s)$ est "globalement assimilable" (c'est-à-dire pour l'ensemble des valeurs de $s \in \mathbb{N}$ tel que $s \geq 2$, ou encore pour $s \in [2; +\infty[$) à la formule suivante :

$$1 + \frac{1}{s(s-1)}$$

D'où l'équivalence au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = \lim_{s\to+\infty} \left[1 + \frac{1}{s(s-1)}\right] = 1$$

Notons A la fonction assimilable à la fonction ζ telle que :

$$A(s) = 1 + \frac{1}{s(s-1)}$$

Et donc, telle que :

$$\sum_{s=2}^{s\to+\infty} \zeta(s) = \sum_{s=2}^{s\to+\infty} A(s)$$

11.1.3 Etude de la fonction assimilable $A(s)$

- Dans un dernier temps, nous pouvons faire l'étude de la fonction A précédente assimilée à ζ. Nous avons noté $A(s)$ la formule correspondante :

$$A(s) = 1 + \frac{1}{s(s-1)}$$

$A(s)$ ne possède que 2 pôles réels : 1 pôle en 0 et un autre en 1. D'autre part, $A(s)$ ne possède aucune racine réelle et ne peut par conséquent jamais être nulle pour $s \in \mathbb{R}$.

Au passage à la limite en 1, nous obtenons :

$$\lim_{s \to 1} \left[1 + \frac{1}{s(s-1)} \right] = +\infty$$

La divergence de cette formule en $s = 1$ reste cohérente quant à l'assimilation de $A(s)$ à $\zeta(s)$ en $s = 1$, puisque $\zeta(s)$ est elle aussi divergente en ce point. Ce qui permet d'étendre l'intervalle d'assimilation de $A(s)$ à $\zeta(s)$ jusqu'en $s = 1$, c'est-à-dire pour $s \in \mathbb{N}$ sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

De plus,

$$\lim_{s \to 0} \left[1 + \frac{1}{s(s-1)} \right] = +\infty$$

Rappelons qu'au voisinage de $+\infty$:

$$\lim_{s \to +\infty} \left[1 + \frac{1}{s(s-1)} \right] = 1$$

Etendons le raisonnement au voisinage de $-\infty$:

$$\lim_{s \to -\infty} \left[1 + \frac{1}{s(s-1)} \right] = 1$$

- Dérivée de $A(s)$:

$A'(s) = -\dfrac{2s-1}{s^2.(s-1)^2}$ (cette écriture révèle les 2 pôles et une racine réels)

Ce qui est équivalent à (cette écriture est utile pour les limites en l'infini) :

$$A'(s) = \frac{-1}{s(s-1)}.\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s-1}\right)$$

Nous pouvons alors étudier $A'(s)$:

$A'(s)$ ne possède que 2 pôles réels : 1 pôle en 0 et un autre en 1. D'autre part, $A'(s)$ possède une unique racine réelle en $s = \dfrac{1}{2}$, d'où $A'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Etude des limites :

- $\lim\limits_{s \to -\infty} A'(s) = 0$
- $\lim\limits_{s \to 0} A'(s) = +\infty$

  A' est donc positive sur l'intervalle $]-\infty; 0[$.

- $A'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$ donc A' coupe l'axe des abcisses une seule fois en $s = \dfrac{1}{2}$.

  A' est donc positive sur l'intervalle $]0; \dfrac{1}{2}[$.

- $\lim\limits_{s \to 1} A'(s) = -\infty$

  A' est donc négative sur l'intervalle $]\dfrac{1}{2}; 1[$.

- $\lim\limits_{s \to +\infty} A'(s) = 0$

  A' est donc négative sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

- Cette étude permet de tirer des conclusions sur les caractéristiques de $A(s)$:

A ne possèdant aucune racine réelle, elle ne peut par conséquent jamais être couper l'axe des abcisses.

A est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ avec une convergence vers 1 en $-\infty$ et une divergence vers $+\infty$ en 0. Comme A ne coupe jamais l'axe des abcisses, elle est donc positive sur cet intervalle.

A est strictement croissante sur l'intervalle $]0; \frac{1}{2}[$,

A atteint un maximum pour $s = \frac{1}{2}$, donné par $A\left(\frac{1}{2}\right) = -3$,

A est strictement décroissante sur l'intervalle $]\frac{1}{2}; 1[$. Comme A ne coupe jamais l'axe des abcisses, elle est donc négative sur l'intervalle $]0; 1[$.

A est strictement décroissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$ avec une divergence vers $+\infty$ en 1 et une convergence vers 1 en $+\infty$. Comme A ne coupe jamais l'axe des abcisses, elle est donc positive sur cet intervalle.

A possède donc un axe de symétrie en $s = \frac{1}{2}$. En effet, donnons quelques valeurs de A en fonction de s :

(voir page suivante)

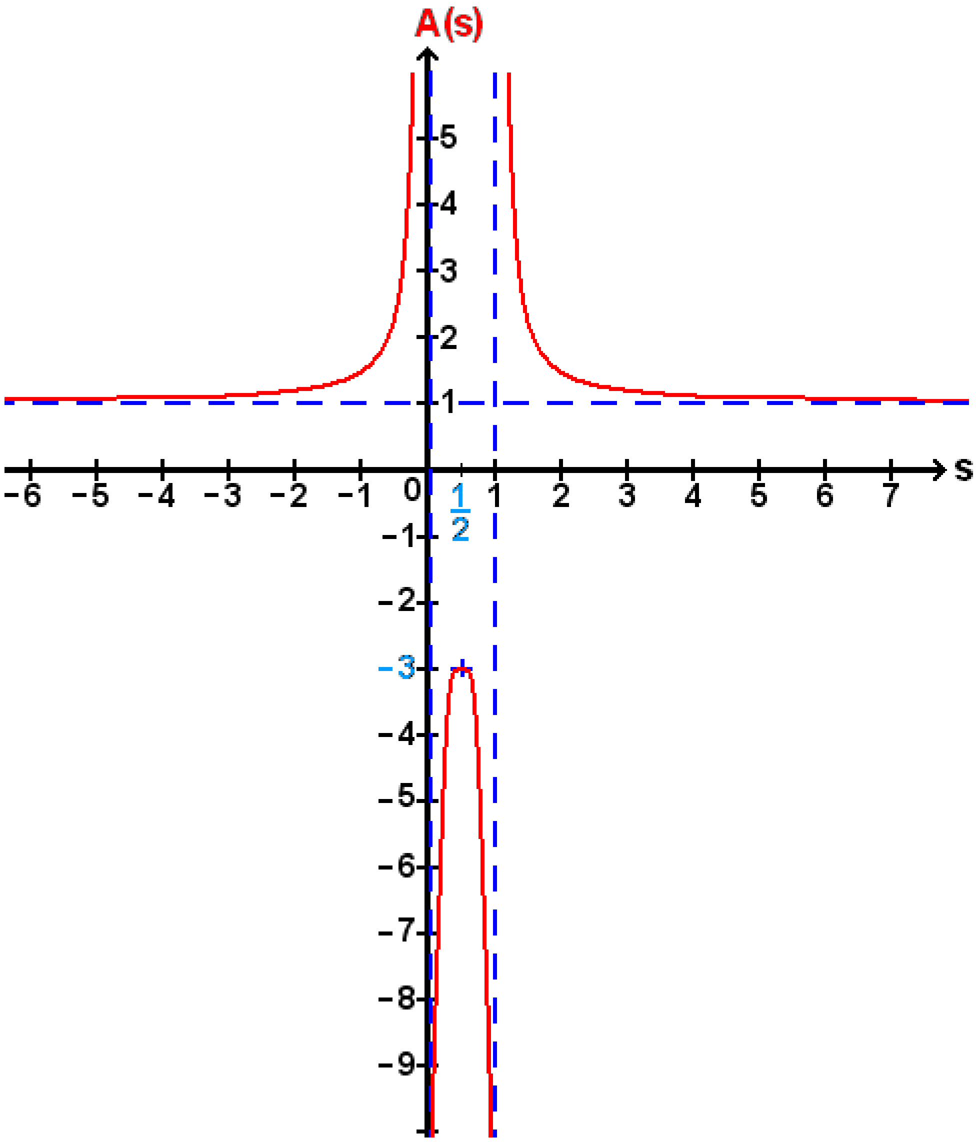
$$
\begin{aligned}
A(-500) &= A(501) = 250501/250500 \\
&\dots \\
A(-250) &= A(251) = 62751/62750 \\
&\dots \\
A(-100) &= A(101) = 10101/10100 \\
&\dots \\
A(-50) &= A(51) = 2551/2550 \\
&\dots \\
A(-25) &= A(26) = 651/650 \\
&\dots \\
A(-6) &= A(7) = 43/42 \\
A(-5) &= A(6) = 31/30 \\
A(-4) &= A(5) = 21/20 \\
A(-3) &= A(4) = 13/12 \\
A(-2) &= A(3) = 7/6 \\
A(-1) &= A(2) = 3/2 \\
A(-1/2) &= A(3/2) = 7/3 \\
A(-1/4) &= A(5/4) = 21/5 \\
A(-1/8) &= A(9/8) = 73/9 \\
A(-1/16) &= A(17/16) = 273/17 \\
&\dots \\
A(-1/98) &= A(99/98) = 9703/99 \\
&\dots \\
A(1/99) &= A(98/99) = -9703/98 \\
&\dots \\
A(1/16) &= A(15/16) = -24/15 \\
A(1/8) &= A(7/8) = -73/9 \\
A(1/4) &= A(3/4) = -21/5 \\
A(1/3) &= A(2/3) = -13/4 \\
A(1/2) &= -3
\end{aligned}
$$

La symétrie en $s = \frac{1}{2}$ nous permet d'écrire que :

$$A(s) = A(1-s) \qquad \text{(ce qui est d'ailleurs exact)}$$

Et donc la connaissance de la symétrie de A en $s = \frac{1}{2}$ et l'étude de A sur l'intervalle $[1/2; +[$ suffisent pour connaître A intégralement.

Allure de la courbe :



- Rappelons que nous avons :

$$\begin{aligned}\sum_{s=2}^{s\to+\infty}\zeta(s) &= \sum_{s=2}^{s\to+\infty}A(s)\\ &= \sum_{s=2}^{s\to+\infty}\left[1+\frac{1}{s(s-1)}\right]\end{aligned}$$

Ce qui établi clairement un lien entre $\zeta(s)$ et $A(s)$ sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

En développant :

$$\begin{aligned}A(s) &= 1+\frac{1}{s(s-1)}\\ &= \frac{s^2-s+1}{s(s-1)}\end{aligned}$$

Nous constatons que (s^2-s-1) possède 2 racines complexes puisque pour :

$s^2-s+1=0,\qquad$ le discriminant Δ vaut

$\Delta = 1-4 = 3.i^2$

Et donc, les 2 racines s_1 et s_2 sont :

$$s_1 = \frac{1+i.\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}+i.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$s_2 = \frac{1-i.\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}-i.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

D'où

$$A(s) = \frac{(s-s_1)(s-s_2)}{s(s-1)}$$

Ce qui permet de constater que la formule $A(s)$ s'annule pour 2 racines complexes s_1 et s_2 de partie réelle $\frac{1}{2}$ et de partie imaginaire $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Or, il a été démontré que les 0 non triviaux tels que $\zeta(s) = 0$ sont tous donnés par s un nombre complexe dont la partie réelle appartient à l'intervalle $[0; 1]$. Il nous reste à savoir si $\zeta(s)$ peut encore être assimilée à $A(s)$ sur cet intervalle (ou au moins sur l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$), ce qui pourrait permettre de confirmer la conjecture de *RIEMANN* [5]. Rappelons que cette conjecture stipule que les 0 non triviaux de $\zeta(s)$ seraient donnés par des nombres complexes s qui auraient tous pour partie réelle la valeur $\frac{1}{2}$.

Pour finir, nous pouvons encore écrire s_1 et s_2 ainsi :

$$s_1 = e^{i.\pi/3}$$

$$s_2 = e^{-i.\pi/3}$$

D'où

$$A(s) = \frac{(s - e^{i.\pi/3})(s - e^{-i.\pi/3})}{s(s-1)}$$

Remarque finale :

Il est possible de pousser le raisonnement un peu plus loin à propos de la divergence de :

$$\begin{aligned}\sum_{s=2}^{s\to+\infty} \zeta(s) &= \sum_{s=2}^{s\to+\infty} \left[1 + \frac{1}{s(s-1)}\right] \\ &= \sum_{s=2}^{s\to+\infty} (1) + \sum_{s=2}^{s\to+\infty} \left[\frac{1}{s(s-1)}\right]\end{aligned}$$

En effet, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{s=2}^{s\to+\infty}\left[\frac{1}{s(s-1)}\right] &= \sum_{s=2}^{s\to+\infty}\left[\frac{1}{(s-1)}-\frac{1}{s}\right] \\
&= \sum_{s=2}^{s\to+\infty}\left[\frac{1}{(s-1)}\right]-\sum_{s=2}^{s\to+\infty}\left[\frac{1}{s}\right]
\end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{s=2}^{s\to+\infty}\left[\frac{1}{(s-1)}\right]=\sum_{s=1}^{s\to+\infty}\left[\frac{1}{s}\right]=1+\sum_{s=2}^{s\to+\infty}\left[\frac{1}{s}\right]$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sum_{s=2}^{s\to+\infty}\left[\frac{1}{s(s-1)}\right] &= 1+\sum_{s=2}^{s\to+\infty}\left[\frac{1}{s}\right]-\sum_{s=2}^{s\to+\infty}\left[\frac{1}{s}\right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de conclure que :

$$\begin{aligned}
\sum_{s=2}^{s\to+\infty}\zeta(s) &= \sum_{s=2}^{s\to+\infty}\left[1+\frac{1}{s(s-1)}\right] \\
&= \sum_{s=2}^{s\to+\infty}\left[\frac{1}{s(s-1)}\right]+\sum_{s=2}^{s\to+\infty}(1) \\
&= 1+\sum_{s=2}^{s\to+\infty}(1) \\
&= \sum_{s=1}^{s\to+\infty}1 \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

11.2 Travaux en cours de réalisation

<u>TRAVAUX EN COURS</u>

<u>DE REALISATION !</u>

<u>*Note personnelle :*</u>

Chapitre dont le travail est long, mais dont la version définitive devrait logiquement être à la hauteur de l'objectif que je vise ! Soyons patient...

CHAPITRE V

Réflexions logiques et philosophiques

Introduction

Ce chapitre est indépendant des travaux précédemment effectués, il peut être lu sans connaissance du contenu des chapitres précédents, bien que les 2 premières parties puisse être vue comme étant “complémentaires” (d'un point de vue logique puis, respectivement, philosophique) à la recherche de formules ou de règles comme nous l'avons fait précédemment. Cependant, ce chapitre est d'une importance essentielle car il va nous mener au **Chapitre VI** en établissant des liens avec des conceptions physiques. De plus, il va nous amener à étudier un cas d'une importance capitale pouvant être vu comme la preuve que l'on puisse construire des énoncés en dehors de toute théorie cohérente, nous guidant encore vers une interprétation géométrique (et physique) possible dans le **Chapitre VI**. Certaines démarches dans les raisonnements exposés peuvent sembler non-conventionnelles, cela étant volontaire vues les quelques notions nouvelles qui seront abordées.

Parfois, ces réflexions seront simplifiées au strict nécessaire d'un point de vue logique afin de nous amener rapidement à l'essentiel. Parfois, ces réflexions seront accompagnées de remarques personnelles ou de digressions (celles-ci pouvant être des intuitions, des avis personnels ou des suggestions qui amènent à d'autres réflexions). Quelquefois encore, lorsque le sens me paraît difficile à donner de manière précise, ces réflexions pourront être “répétées” différemment, ce qui pourrait être perçu comme redondant. Des compléments de réflexion sont également exposés afin de tenter de faire des liens avec d'autres sujets (quelquefois à propos de phénomènes physiques, où les formules étudiées peuvent trouver une application ou fournir des explications).

Les 2 premières parties sont plus techniques que les suivantes, de plus, elles permettent de se rendre compte des liens qui existent entre les propriétés des nombres entiers, leur propriété de primalité, la logique binaire et le calcul propositionnel “classique”. Il est nécessaire d'aborder les parties de ce chapitre dans l'ordre tel qu'il est exposé.

12

Correspondances entre formules, valeurs de vérité et énoncés

A partir de formules ne pouvant prendre que 2 valeurs (0 ou 1), et en attribuant une valeur de vérité ($vrai$ ou $faux$) à ces 2 valeurs, il devient possible d'assimiler une formule à un système de “raisonnement cohérent” , c'est-à-dire à un système qui permet de traiter un énoncé en lui attribuant une valeur de vérité ($vrai$ ou $faux$).

Nous allons donc développer cela dans quelques cas intéressants. Remarquons qu'il est toujours nécessaire de donner le domaine de définition d'une variable ou plusieurs variables utilisées dans ces formules.

Pour la suite, nous attribueront la valeur de vérité “$vrai$” à la valeur “1” d'une formule, et la valeur de vérité “$faux$” à la valeur “0” de cette même formule.

12.1 Exemple des nombres impaires

Considérons la formule $\sin^2\left(\frac{M.\pi}{2}\right)$ pour $M \in \mathbb{N}$:

$\sin^2\left(\frac{M.\pi}{2}\right) = 0$ si M est paire

$\sin^2\left(\frac{M.\pi}{2}\right) = 1$ si M est impaire

Et en attribuant les valeurs de vérité comme convenu :

"0" est équivalent à "$faux$"
"1" est équivalent à "$vrai$"

Nous pouvons établir que la formule permet d'attribuer une valeur de vérité à l'énoncé suivant :

"$M \in \mathbb{N}$ **est telle que** M **est impaire**"

En effet, si M est paire, la formule vaut 0, ce qui signifie que l'énoncé est "$faux$" (M ne peut pas être paire et impaire à la fois). Et si M est impaire, la formule vaut 1, ce qui signifie que l'énoncé est "$vrai$".

Ceci permet d'assimiler la formule $\sin^2\left(\frac{M.\pi}{2}\right)$ pour $M \in \mathbb{N}$ à un système de raisonnement cohérent qui permet d'attribuer une valeur de vérité à l'énoncé "$M \in \mathbb{N}$ **est telle que** M **est impaire**".

12.2 La formule $s(M)$

Rappelons que pour $M \in \mathbb{N}$ tel que $M \geq 2$, nous avons $s(M)$ (étudiée dans le **Chapitre I**, en sous-partie "**3.1 Formule simplifiée s(M)**") telle que :

$s(M) = 1$ si $M \in \mathbb{P}$
$s(M) = 0$ si $M \notin \mathbb{P}$

Comme dans la sous-partie précédente, ceci permet d'attribuer une valeur de vérité à l'énoncé :

"$M \in \mathbb{N}$**,** $M \geq 2$ **est telle que** $M \in \mathbb{P}$"

Et donc la formule $s(M)$ peut être assimilée à un système de raisonnement cohérent qui permet d'attribuer une valeur de vérité à l'énoncé "$M \in \mathbb{N}$**,** $M \geq 2$ **est telle que** $M \in \mathbb{P}$".

12.3 La formule $\mathfrak{I}(M)$

Rapidement avec la formule $\mathfrak{I}(M)$, nous allons voir que ce raisonnement est toujours possible pour les formules ne pouvant prendre que 2 valeurs (0 ou 1).

Pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 0$:

$\mathfrak{I}(M) = 1 \qquad$ si $M = 0$
$\mathfrak{I}(M) = 0 \qquad$ si $M > 0$

Ce qui permet d'attribuer une valeur de vérité à l'énoncé correspondant :

> "$M \in \mathbb{N}$**,** $M \geq 0$ **est telle que** $M = 0$"

La formule $\mathfrak{I}(M)$ peut donc être assimilée à un système de raisonnement cohérent qui permet d'attribuer une valeur de vérité à l'énoncé correspondant.

Remarque :

Ajoutons que des tables de vérités ont été établies dans le **Chapitre I** (en fin de sous-partie "**3.7 Equivalences de formules**") entre autres à l'aide de la formule $\mathfrak{I}(M)$, pour lesquels nous avions défini 2 variable binaire B_1 et B_2 telles que $M = B_1 + B_2$ ou telles que $M = B_1.B_2$. Ce qui a permis de conclure que toutes les propositions du calcul propositionnel "classique" peuvent être formées à partir de la formule $\mathfrak{I}(M)$.

12.4 La formule $f(M;x)$

Appliquons le même raisonnement avec la fomrule $f(M;x)$. Rappelons que cette formule est définie pour $M \in \mathbb{N}$ tel que $M \geq 2$ et pour $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 1$ (d'après cette formule, x est implicitement un nombre entier) :

$f(M;x) = 1$ pour $M \in \mathbb{P}$, si N est multiple de M^x.

$f(M;x) = 0$ pour $M \in \mathbb{P}$, si N non multiple de M^x.

$f(M;x) = 0$ pour $M \notin \mathbb{P}$, quelquesoit $N \geq 1$.

Ce qui permet d'attribuer une valeur de vérité à l'énoncé :

> "$M \in \mathbb{N}$**,** $M \geq 2$ **est telle que** $M \in \mathbb{P}$
>
> **et**
>
> $N \in \mathbb{N}$**,** $N \geq 1$ **est telle que** N **est multiple de** M^x"

La formule $f(M;x)$ peut donc être assimilée à un système de raisonnement cohérent.

Séparation des conditions mentionnées dans un énoncé :

Remarquons que l'énoncé précédent contient 2 "conditions" qui doivent être *vraies* toutes les 2 en même temps pour que l'énoncé soit *vrai* dans son ensemble. Ces 2 conditions sont équivalentes à ces 2 énoncés distincts :

"$M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ **est telle que** $M \in \mathbb{P}$"

Et

"$N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$ **est telle que** N **est multiple de** M^x"

Ainsi, il devient possible de ramener l'étude des valeurs de vérité d'un énoncé E_1 contenant 2 conditions à l'étude des valeurs de vérité de 2 énoncés E_2 qui équivaut à la $1^{ière}$ condition et E_3 qui équivaut à la $2^{ième}$.

Dans ce cas :

E_1 est *vrai*	si E_2 est *vrai*	et si E_3 est *vrai*.
E_1 est *faux*	si E_2 est *faux*	ou si E_3 est *faux*.

Ce qui signifie encore que :

"$M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ **est telle que** $M \in \mathbb{P}$" correspond justement à la formule $s(M)$ du point de vue de l'attribution des valeurs de vérités,

"$N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$ **est telle que** N **est multiple de** M^x" est supposée correspondre à une autre formule du point de vue de l'attribution des valeurs de vérités, que nous noterons $F(M)$ (cette formule n'est pas connue).

Serait-il possible que la formule $f(M;x)$ aie une autre écriture? Analysons la cohérence de cette situation en émettant l'hypothèse de l'existence de $F(M)$.

D'un point de vue strictement mathématique, cela implique de réécrire $f(M;x)$ telle que :

$$f(M;x) = s(M).F(M)$$

Ce qui correspond bien aux valeurs de vérité définies précédemment :

$f(M;x) = 1$	si $s(M) = 1$	et si $F(M) = 1$
$f(M;x) = 0$	si $s(M) = 0$	ou si $F(M) = 0$

Puisque, en assimilant la formule $f(M;x)$ à un système permettant d'attribuer une valeur de vérité à l'énoncé E_1 vu précédemment :

"$M \in \mathbb{N}$**,** $M \geq 2$ **est telle que** $M \in \mathbb{P}$

et

$N \in \mathbb{N}$**,** $N \geq 1$ **est telle que** N **est multiple de** M^x"

En assimilant la formule $s(M)$ à un système permettant d'attribuer une valeur de vérité à l'énoncé E_2 vu précédemment :

"$M \in \mathbb{N}$**,** $M \geq 2$ **est telle que** $M \in \mathbb{P}$"

Et en assimilant la formule $F(M)$ à un système permettant d'attribuer une valeur de vérité à l'énoncé E_3 vu précédemment :

"$N \in \mathbb{N}$**,** $N \geq 1$ **est telle que** N **est multiple de** M^x"

Comme tout ceci nous permet de garder la cohérence des valeurs de vérité à propos des énoncés :

E_1 est $vrai$	si E_2 est $vrai$	et si E_3 est $vrai$.
E_1 est $faux$	si E_2 est $faux$	ou si E_3 est $faux$.

Est-il possible de trouver une formule telle que $F(M)$?

Comme nous connaissons $f(M;x)$ et $s(M)$, Il nous suffit d'essayer de trouver $F(M)$:

$$f(M;x) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}.\prod_{v=1}^{v=3}(M-v)\right).\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{M^{F_c}}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)}$$

Et

$$S(M) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4}.\prod_{v=1}^{v=3}(M-v)\right).\frac{\sin^2\left((M-1)!.\dfrac{\pi}{M}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{M}\right)}$$

Or,

$$f(M;x) = s(M).F(M)$$

D'où

$$F(M) = \frac{f(M;x)}{s(M)}$$

Et donc la formule $F(M)$:

$$F(M) = \frac{f(M;x)}{s(M)} = \frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi.F_p}{M^{F_c}}\right)}{\sin^2\left((M-1)!.\dfrac{\pi}{M}\right)}$$

Or, $F(M)$ n'étant pas définie dans les cas (et ils sont nombreux) où :

$$\sin^2\left((M-1)!.\frac{\pi}{M}\right) = 0 \qquad \text{car la division par 0 est interdite.}$$

Il est donc impossible de construire une telle formule de cette manière, c'est-à-dire qu'il est impossible de construire une telle formule seulement en séparant les 2 conditions de l'énoncé :

"$M \in \mathbb{N}$**,** $M \geq 2$ **est telle que** $M \in \mathbb{P}$

et

$N \in \mathbb{N}$**,** $N \geq 1$ **est telle que** N **est multiple de** M^x"

Autre méthode, les tables de vérités :

En ramenant la recherche d'une formule telle que $F(M)$ à l'étude de tables de vérité concernant les énoncés E_1, E_2 et E_3, cette impossibilité apparaît encore plus clairement. Rappelons que :

- la valeur de vérité de E_1 est à rattacher à la formule $f(M;x)$ connue.
- la valeur de vérité de E_2 est à rattacher à la formule $s(M)$ connue.
- la valeur de vérité de E_3 est à rattacher à la formule $F(M)$ recherchée.

En considérant E_1, E_2 et E_3 comme étant des variables binaires, nous pouvons alors établir une table de vérité (en algèbre de *BOOLE* [3]) :

E_3	E_2	$E_1 = E_2.E_3$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Où les valeurs de E_1 dépendent des valeurs de E_2 et des valeurs de E_3. Rechercher une formule $F(M)$ de manière directe revient alors à supposer que les valeurs de E_3 dépendent directement des valeurs de E_2 et de E_1, or E_2 est indépendant de E_3.

Ceci peut être représenté par une nouvelle table de vérité qui le montre clairement, il suffit de réarranger les lignes et les colonnes (sans changer les valeurs de vérité) :

E_1	E_2	$E_3 = ?$
0	0	0
0	0	1
0	1	0
1	1	1

Ici, il est impossible de formuler E_3 en fonction de E_2 et de E_1. En effet, puisque E_3 peut prendre l'un ou l'autre des 2 états lorsque E_1 et E_2 ont tous les 2 l'état 0 (c'est le cas des 2 premières lignes de la table de vérité, en rouge). Dans ce cas, la valeur de E_3 est "indécidable" en fonction de l'état de E_1 et de E_2. Il est pourtant possible de donner une valeur dans les autres cas (les 2 dernières lignes de la table de vérité).

Il est donc impossible de donner l'énoncé E_3 uniquement en fonction de E_1 et de E_2. Et pour finir, il est donc impossible de donner une formule $F(M)$ uniquement en fonction de $s(M)$ et de $f(M;x)$. Ce qui revient à conclure la même chose que pour le paragraphe précédent, l'impossibilité de construire une formule telle que $F(M)$ seulement à partir des formules $s(M)$ et $f(M;x)$ en séparant les 2 conditions de l'énoncé :

"$M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ **est telle que** $M \in \mathbb{P}$

et

$N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$ **est telle que** N **est multiple de** M^x"

Remarque :

Ces 2 méthodes peuvent être intéressantes pour la suite de nos réflexions, et pour d'autre formules ne pouvant prendre que 2 valeurs (telles que 0 ou 1).

12.5 Contenu d'un énoncé et valeurs de vérité

Nous avons vu précédemment que E_3 ne pouvait s'exprimer uniquement en fonction de E_2 et de E_1.

Ce qui peut permettre une réflexion générale sur la cohérence de la division d'un énoncé principal en plusieurs énoncés indépendants.

Brièvement, l'énoncé vu précédemment :

“$M \in \mathbb{N}$**,** $M \geq 2$ **est telle que** $M \in \mathbb{P}$”

contient lui aussi 2 conditions qui peuvent être vues comme des énoncés :

“$M \in \mathbb{N}$**,** $M \geq 2$”

Et

“$M \in \mathbb{P}$”

Où les 2 conditions doivent être *vraies* pour que le 1^{ier} énoncé soit *vrai*. Comme dans la sous-partie précédente, nous pouvons assimiler les énoncés :

“$M \in \mathbb{N}$**,** $M \geq 2$ **est telle que** $M \in \mathbb{P}$” à E_1 (l'énoncé principal),

“$M \in \mathbb{N}$**,** $M \geq 2$” à E_2 (l'énoncé indiquant la $1^{ière}$ condition),

“$M \in \mathbb{P}$” à E_3 (l'énoncé indiquant la $2^{ième}$ condition)

Nous nous retrouvons dans le même cas de figure, ce qui permet de conclure la même chose.

Maintenant, si nous essayons de clarifier un peu plus la situation en donnant des noms différents à E_1, E_2 et E_3. C'est-à-dire :

Donnons à E_1 le nom de *Conséquence*,
Donnons à E_2 le nom de *Cause* 2,
Donnons à E_3 le nom de *Cause* 1,

La $Conséquence$ peut être réalisée (la valeur de vérité est 1) seulement :

si la $Cause$ 1 est réalisée ($1^{ière}$ condition dont la valeur de vérité est 1)
et
si la $Cause$ 2 l'est aussi ($2^{ième}$ condition dont la valeur de vérité est 1).

Et reconsidérons les tables de vérités de la sous-partie précédente, nous obtenons :

$Cause$ 1	$Cause$ 2	$Conséquence = Cause\ 1.Cause\ 2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ou bien, en réarrangeant seulement les lignes et les colonnes :

$Conséquence$	$Cause$ 2	$Cause\ 1 = ?$
0	0	0
0	0	1
0	1	0
1	1	1

Remarquons que nous devons interdire que :

$Conséquence = 1$ et $Cause\ 2 = 0$ en même temps,

car cela serait incohérent (voir l'avant-dernière table de vérité).

Ceci permet de mieux comprendre les liens entre les énoncés de manière générale. Cela signifie en effet que :

- Si nous connaissons une formule ne pouvant prendre que des valeurs binaires (comme 0 ou 1) et qui représente la $Conséquence$,

- si nous connaissons aussi une formule ne pouvant prendre que des valeurs binaires (comme 0 ou 1) et qui représente la $Cause$ 2,

- Et en sachant qu'il existe une condition qui interdit que $Conséquence = 1$ et $Cause\ 2 = 0$ en même temps, ce qui se traduit également par l'impossibilité que la formule associée à la $Conséquence$ prenne la valeur 1 lorsque la formule associée à la $Cause$ 2 a la valeur 0

$\Rightarrow$ Cela n'est pas suffisant pour permettre d'établir une formule qui représente complètement la $Cause$ 1. Autrement dit, Il n'est pas possible de formuler les variations de la $Cause$ 1 seulement à partir d'une formule représentant la $Conséquence$ et d'une autre formule représentant la $Cause$ 2.

Soit la $Cause$ 1 peut être formulée de manière fiable seulement partiellement en fonction de la $Conséquence$ et de la $Cause$ 2, notamment pour les 2 dernières lignes de cette dernière table de vérité, soit la $Cause$ 1 peut être formulée intégralement en fonction de la $Conséquence$ et de la $Cause$ 2, mais seulement de manière probable s'il est question d'intégrer toutes les lignes (et donc toutes les possibilités) à la formule liée à la $Cause$ 1. Ceci est l'objet de la sous-partie suivante.

Exemple :

Prenons un exemple explicite :

Associons à la $Conséquence$ l'énoncé "**il y a du verglas**" ,
Associons à la $Cause$ 1 l'énoncé "**il y a eu de la pluie**" ,
Associons à la $Cause$ 2 l'énoncé "**il a fait froid**".

En considérant que les cas "**il y a eu de la pluie**" et "**il a fait froid**" nous amène à constater qu' "**il y a du verglas**", alors le raisonnement précédent appliqué à cet exemple signifie tout simplement que :

Dans le cas où il n'y a pas de verglas ($Conséquence = 0$) Et où il n'y a pas eu de pluie ($Cause$ $1 = 0$),

Cela ne permet pas de déduire s'il a fait froid ($Cause$ $1 = 1$)
Ou s'il a fait chaud ($Cause$ $1 = 0$).

En d'autres termes, nous n'avons pas assez d'information pour connaître la $Cause$ 2. Pourtant, il est possible de savoir s'il fait chaud ou s'il fait froid lorsque nous avons plus d'informations (par exemple, en mesurant la température).

Remarque 1 :

Tout cela permet de sous-entendre une question à propos de la connaissance de la $Cause$ 1 par des règles logiques : Combien de "choses" ou de formules seraient nécessaires pour formuler la $Cause$ 1 ? Faut-il une quantité finie, une quantité infinie de choses supplémentaires pour formuler la $Cause$ 1 ? Ou bien est-ce qu'aucune quantité de chose supplémentaire ne peut permettre de formuler la $Cause$ 1 ? Et existe-t-il des cas où la $Cause$ 1 ne peut jamais être exprimée par des moyens logiques ?

Remarque 2 :

Existe-t-il des cas de portes logiques permettant d'exprimer la $Cause$ 1 uniquement en fonction de la $Conséquence$ et de la $Cause$ 2 ?

Pour répondre à cette question, nous allons aborder différentes portes logiques, au moins les plus courantes, et leur table de vérité associée. Nous allons étudier les cas des portes logiques :

ET (AND),

ET COMPLEMENTAIRE (NAND),

OU (OR),

OU COMPLEMENTAIRE (NOR),

OU-EXCLUSIF,

OU-EXCLUSIF COMPLEMENTAIRE.

- Pour la porte logique "*ET*" (ou "*AND*"), la réponse est NON : dans ce cas, il n'est pas possible, d'exprimer la $Cause$ 1 uniquement en fonction de la $Conséquence$ et de la $Cause$ 2. En effet, celle-ci vient d'être traitée puisque nous avions noté (en algèbre de *BOOLE* [3]) :

$$Conséquence = Cause\ 1.Cause\ 2$$

- La porte logique "*ET NON*" (ou "*NAND*") est la fonction complémentaire de la fonction "*ET*" , elle peut être notée (en algèbre de *BOOLE*) :

$$Conséquence = \overline{Cause\ 1.Cause\ 2}$$

En regroupant les résultats dans une table de vérité :

$Cause\ 1$	$Cause\ 2$	$Conséquence = \overline{Cause\ 1.Cause\ 2}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ou bien, en réarrangeant seulement les lignes et les colonnes :

$Conséquence$	$Cause\ 2$	$Cause\ 1 = ?$
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0

La réponse est NON compte tenu des 2 lignes centrales (en rouge) : dans ce cas, il n'est pas possible, d'exprimer la *Cause* 1 uniquement en fonction de la *Conséquence* et de la *Cause* 2.

- La porte logique "OU" (ou "OR"), elle peut être notée (en algèbre de $BOOLE$) :

$$Conséquence = Cause\ 1 + Cause\ 2$$

En regroupant les résultats dans une table de vérité :

$Cause\ 1$	$Cause\ 2$	$Conséquence = Cause\ 1 + Cause\ 2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ou bien, en réarrangeant seulement les lignes et les colonnes :

$Conséquence$	$Cause\ 2$	$Cause\ 1 = ?$
0	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

La réponse est NON compte tenu des 2 dernières lignes (en rouge) : dans ce cas, il n'est pas possible, d'exprimer la $Cause$ 1 uniquement en fonction de la $Conséquence$ et de la $Cause$ 2.

- La porte logique "*OU NON*" (ou "*NOR*") est la fonction complémentaire de la fonction "*OU*" , elle peut être notée (en algèbre de *BOOLE*) :

$$Conséquence = \overline{Cause\ 1 + Cause\ 2}$$

En regroupant les résultats dans une table de vérité :

$Cause\ 1$	$Cause\ 2$	$Conséquence = \overline{Cause\ 1 + Cause\ 2}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Ou bien, en réarrangeant seulement les lignes et les colonnes :

$Conséquence$	$Cause\ 2$	$Cause\ 1 = ?$
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0

La réponse est NON compte tenu des 2 lignes centrales (en rouge) : dans ce cas, il n'est pas possible, d'exprimer la *Cause* 1 uniquement en fonction de la *Conséquence* et de la *Cause* 2.

- La porte logique "*OU EXCLUSIF*" , elle peut être notée (en algèbre de *BOOLE*) :

$$Conséquence = Cause\ 1 \oplus Cause\ 2$$

Ce qui équivaut à :

$$Conséquence = (Cause\ 1 + Cause\ 2).\overline{(Cause\ 1.Cause\ 2)}$$

En regroupant les résultats dans une table de vérité :

$Cause\ 1$	$Cause\ 2$	$Conséquence = Cause\ 1 \oplus Cause\ 2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Ou bien, en réarrangeant seulement les lignes et les colonnes :

$Conséquence$	$Cause\ 2$	$Cause\ 1$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

La réponse est OUI : il existe au moins un cas où il est possible d'exprimer la *Cause* 1 uniquement en fonction de la *Conséquence* et de la *Cause* 2, c'est le cas de la porte logique "*OU EXCLUSIF*".

En effet puisque nous obtenons à nouveau la table de vérité de la fonction "*OU EXCLUSIF*" telle que :

$$Cause\ 1 = Conséquence \oplus Cause\ 2$$

De manière "symétrique" , il est possible d'établir la même conclusion pour la $Cause$ 2, nous obtenons aussi :

$$Cause\ 2 = Conséquence \oplus Cause\ 1$$

Pour récapituler, cela signifie que :

Si	$Conséquence = Cause\ 1 \oplus Cause\ 2$
Alors	$Cause\ 1 = Conséquence \oplus Cause\ 2$
Ou alors	$Cause\ 2 = Conséquence \oplus Cause\ 1$

Ainsi, pour en revenir aux énoncés, tout énoncé E_1 contenant 2 conditions telles que E_2 et E_3 répondent aux exigences de la porte logique "*OU EXCLUSIF*", c'est-à-dire que :

Si E_2 est $faux$ et si E_3 est $faux$, on déduit E_1 est $faux$,
Si E_2 est $faux$ et si E_3 est $vrai$, on déduit E_1 est $vrai$,
Si E_2 est $vrai$ et si E_3 est $faux$, on déduit E_1 est $vrai$,
Si E_2 est $vrai$ et si E_3 est $vrai$, on déduit E_1 est $faux$,

Alors dans ce cas, tout énoncé E_1, E_2 ou E_3 est déductible des 2 autres.

Si l'on se contente des seules formules $f(M;x)$ et $s(M)$, et étant donné que la formule $F(M)$ ne répond pas à ces exigences, il est impossible de la trouver par la méthode que nous avions employé dans la sous-partie "**12.4 La formule** $f(M;x)$" (page 349).

Complément de réflexion :

D'autre part et pour finir avec la porte logique "*OU EXCLUSIF*", il est possible d'établir une correspondance strictement mathématique avec cette dernière. A ce sujet, les formules ne pouvant prendre que 2 valeurs (0 ou 1) sont particulièrement intéressantes.

En nommant C_1 (à rattacher à la *Cause* 1) une formule mathématique ne pouvant prendre pour valeur que 0 ou 1,

En nommant C_2 (à rattacher à la *Cause* 2) une autre formule mathématique ne pouvant prendre pour valeur que 0 ou 1,

Et en nommant R (à rattacher à la *Conséquence*) une formule mathématique ne pouvant prendre pour valeur que 0 ou 1,

Etant donné la porte logique "*OU EXCLUSIF*" notée :

$$Conséquence = Cause\ 1 \oplus Cause\ 2$$

L'équivalent strictement mathématique (c'est-à-dire avec les opérateurs mathématiques usuels : addition, soustraction, multiplication, division) pour les formules C_1, C_2, et R est :

$$R = C_1 + C_2 - 2.C_1.C_2$$

En effet, nous vérifions facilement l'analogie entre la table de vérité de $Conséquence = Cause\ 1 \oplus Cause\ 2$ et la formule de R puisque d'un point de vue strictement mathématique, nous avons :

C_1	C_2	$R = C_1 + C_2 - 2.C_1.C_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Et comme nous savons que :

Si	$Conséquence = Cause\ 1 \oplus Cause\ 2$
Alors	$Cause\ 1 = Conséquence \oplus Cause\ 2$
Ou alors	$Cause\ 2 = Conséquence \oplus Cause\ 1$

Vue l'analogie entre la table de vérité de *Conséquence* et les valeurs de la formule de R, d'un point de vue strictement mathématique, nous pouvons alors déduire que :

Si	$R = C_1 + C_2 - 2.C_1.C_2$
Alors	$C_1 = R + C_2 - 2.R.C_2$
Ou alors	$C_2 = R + C_1 - 2.R.C_1$

Mais il existe également une écriture alternative à celles-ci, étant donné l'identité remarquable :

$$(C_1 - C_2)^2 = (C_1)^2 + (C_2)^2 - 2.(C_1).(C_2)$$

Or, pour C_1 et C_2 des nombres ne pouvant prendre pour valeurs que 0 ou 1, nous avons la possibilité de simplifier ainsi :

$$(C_1)^2 = C_1$$
$$(C_2)^2 = C_2$$

D'où

$$(C_1 - C_2)^2 = C_1 + C_2 - 2.C_1.C_2$$

Et donc les écritures alternatives :

$R = (C_1 - C_2)^2$
$C_1 = (R - C_2)^2$
$C_2 = (R - C_1)^2$

Dans ce cas, toutes formules répondant aux règles logiques équivalentes à celles du "*OU EXCLUSIF*" se déduisent les unes à partir des autres.

- La porte logique "*OU EXCLUSIF COMPLEMENTAIRE*" notée (en algèbre de *BOOLE*) :

$$Conséquence = \overline{Cause\ 1 \oplus Cause\ 2}$$

Ce qui équivaut à :

$$Conséquence = (Cause\ 1.Cause\ 2) + \overline{(Cause\ 1 + Cause\ 2)}$$

En regroupant les résultats dans une table de vérité :

$Cause\ 1$	$Cause\ 2$	$Conséquence = \overline{Cause\ 1 \oplus Cause\ 2}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ou bien, en réarrangeant seulement les lignes et les colonnes :

$Conséquence$	$Cause\ 2$	$Cause\ 1$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La réponse est OUI : il existe un $2^{ième}$ cas où il est possible d'exprimer la *Cause* 1 uniquement en fonction de la *Conséquence* et de la *Cause* 2, c'est le cas de la porte logique "*OU EXCLUSIF COMPLEMENTAIRE*".

En effet puisque nous obtenons à nouveau la table de vérité de la fonction "*OU EXCLUSIF COMPLEMENTAIRE*" telle que :

$$Cause\ 1 = \overline{Conséquence \oplus Cause\ 2}$$

De manière "symétrique" , il est possible d'établir la même conclusion pour la $Cause$ 2, nous obtenons aussi :

$$Cause\ 2 = \overline{Conséquence \oplus Cause\ 1}$$

Pour récapituler, cela signifie que :

Si $\quad Conséquence = \overline{Cause\ 1 \oplus Cause\ 2}$
Alors $\quad Cause\ 1 = \overline{Conséquence \oplus Cause\ 2}$
Ou alors $\quad Cause\ 2 = \overline{Conséquence \oplus Cause\ 1}$

Ainsi, pour en revenir aux énoncés, tout énoncé E_1 contenant 2 conditions telles que E_2 et E_3 répondent aux exigences de la porte logique "*OU EXCLUSIF COMPLEMENTAIRE*", c'est-à-dire que :

Si E_2 est $faux$ et si E_3 est $faux$, on déduit E_1 est $vrai$,
Si E_2 est $faux$ et si E_3 est $vrai$, on déduit E_1 est $faux$,
Si E_2 est $vrai$ et si E_3 est $faux$, on déduit E_1 est $faux$,
Si E_2 est $vrai$ et si E_3 est $vrai$, on déduit E_1 est $vrai$,

Alors dans ce cas, tout énoncé E_1, E_2 ou E_3 est déductible des 2 autres.

Même remarque que pour la porte logique "*OU EXCLUSIF*" : si l'on se contente des seules formules $f(M;x)$ et $s(M)$, et étant donné que la formule $F(M)$ ne répond pas à ces exigences, il est impossible de la trouver par la méthode que nous avions employé dans la sous-partie "**12.4 La formule $f(M;x)$**" (page 349).

Complément de reflexion :

Il est possible ici aussi d'établir une correspondance strictement mathématique à la porte logique "*OU EXCLUSIF COMPLEMENTAIRE*", grâce aux formules ne pouvant prendre pour valeurs que 0 ou 1.

En nommant C_1 (à rattacher à la *Cause* 1) une formule mathématique ne pouvant prendre pour valeur que 0 ou 1,

En nommant C_2 (à rattacher à la *Cause* 2) une autre formule mathématique ne pouvant prendre pour valeur que 0 ou 1,

Et en nommant R (à rattacher à la Conséquence) une formule mathématique ne pouvant prendre pour valeur que 0 ou 1,

Etant donné la porte logique "*OU EXCLUSIF COMPLEMENTAIRE*" notée :

$$Conséquence = \overline{Cause\ 1 \oplus Cause\ 2}$$

L'équivalent strictement mathématique (c'est-à-dire avec les opérateurs mathématiques usuels : addition, soustraction, multiplication, division) pour les formules C_1, C_2, et R est :

$$R = 1 - (C_1 + C_2 - 2.C_1.C_2)$$

Et comme nous savons que :

Si $\quad Conséquence = \overline{Cause\ 1 \oplus Cause\ 2}$
Alors $\quad Cause\ 1 = \overline{Conséquence \oplus Cause\ 2}$
Ou alors $\quad Cause\ 2 = \overline{Conséquence \oplus Cause\ 1}$

Alors, et d'un point de vue strictement mathématique, nous pouvons déduire que :

Si $\quad R = 1 - (C_1 + C_2 - 2.C_1.C_2)$
Alors $\quad C_1 = 1 - (R + C_2 - 2.R.C_2)$
Ou alors $\quad C_2 = 1 - (R + C_1 - 2.R.C_1)$

Ici aussi (et comme pour la porte logique "*OU EXCLUSIF*"), les écritures alternatives sont données simplement par :

$R = 1 - (C_1 - C_2)^2$
$C_1 = 1 - (R - C_2)^2$
$C_2 = 1 - (R - C_1)^2$

Dans ce cas, toutes formules répondant aux règles logiques équivalentes à celles du "*OU EXCLUSIF COMPLEMENTAIRE*" se déduisent les unes à partir des autres.

12.6 Variable binaire U de valeur de vérité indéfinissable

Partant du constat précédent qu'il est impossible de construire une formule telle que $F(M)$ seulement à partir des formules $f(M;x)$ et $s(M)$, et uniquement en séparant les 2 conditions de l'énoncé :

> "$M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ **est telle que** $M \in \mathbb{P}$
>
> **et**
>
> $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 1$ **est telle que** N **est multiple de** M^x"

Reprenons la nomenclature des 3 énoncés E_1, E_2 et E_3. Reprenons également l'égalité $E_1 = E_2.E_3$.

Rappelons la table de vérité à propos de l'égalité correspondante (en algèbre de *BOOLE* [3]) :

E_3	E_2	$E_1 = E_2.E_3$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ou bien, en réarrangeant seulement les lignes et les colonnes :

E_1	E_2	$E_3 =$?
0	0	0
0	0	1
0	1	0
1	1	1

Remarquons que la situation $E_1 = 1$ et $E_2 = 0$ en même temps n'existe pas, nous devons l'interdire lorsque nous faisons varier E_1 et E_2.

Dans les 2 dernières lignes, la variable E_2 est inutile : il est possible de connaître E_3 seulement en connaissant E_1.

Nous avons pour les 2 dernières lignes, c'est-à-dire lorsque $E_2 = 1$:

$$E_3 = E_1$$

Nous avons pour les 2 premières lignes, c'est-à-dire lorsque $E_2 = E_1 = 0$:

Une impossibilité à définir E_3 en fonction de E_1.

Introduisons une nouvelle variable binaire U indépendante d'un système dont la valeur de vérité ne peut être définie par un système de règles (elle peut valoir soit 0 soit 1, mais sa valeur ne peut être "prédite" , cela introduit une part de probabilité). Il devient alors possible d'établir une égalité qui tient compte de l'impossibilité de donner E_3 en fonction de E_1 et E_2 lorsque ces dernières valent 0 en même temps.

Nous avons pour les 2 premières lignes, c'est-à-dire lorsque $E_2 = E_1 = 0$:

$$E_3 = U$$

Et en récapitulant :

$E_3 = E_1$ lorsque $E_2 = 1$
$E_3 = U$ lorsque $E_2 = 0$

Ce qui permet d'écrire :

$$E_3 = E_2.E_1 + \overline{E_2}.U$$

avec la condition d'interdiction que $E_1 = 1$ et $E_2 = 0$ en même temps. Remarque : grâce à cette formule, enlever l'interdiction n'a pas d'incidence sur les résultats. En effet, puisque seul $E_2 = 0$ est nécessaire pour donner l'égalité, cette égalité peut donc être donnée indépendemment de E_1 (c'est-à-dire quelquesoit sa valeur).

D'un point de vue strictement mathématique, il devient possible de transcrire cela en admettant d'introduire une variable U équivalente : une variable U indépendante ne pouvant prendre que 2 valeurs (0 ou 1) et ne pouvant être représentée à l'aide d'une formule précise (U peut valoir soit 0 soit 1, mais sa valeur ne peut être "prédite").

En reprenant les formules (seulement à titre d'exemple) $F(M)$, $s(M)$ et $f(M;x)$, nous avons :

$$F(M) = s(M).f(M;x) + [1 - s(M)].U$$

avec la condition d'interdiction que $f(M;x) = 1$ et $s(M) = 0$ en même temps (car cette situation est incohérente, bien que nous venons de voir qu'enlever l'interdiction n'a pas d'incidence sur les résultats).

Nous pouvons donner des équivalences strictement mathématiques plus générales avec des formules "binaires" (ne donnant pour valeur que 0 ou 1) :

En nommant F_1 (à rattacher à l'énoncé E_1) une formule mathématique binaire ne pouvant prendre pour valeur que 0 ou 1,

En nommant F_2 (à rattacher à l'énoncé E_2) une autre formule mathématique binaire ne pouvant prendre pour valeur que 0 ou 1,

En nommant F_3 (à rattacher à l'énoncé E_3) une dernière formule mathématique binaire ne pouvant prendre pour valeur que 0 ou 1,

Et en nommant U (à rattacher à la variable de valeur de vérité indéfinissable U) une formule mathématique binaire ne pouvant prendre que de manière indéfinissable (ou probable) la valeur 0 ou 1,

Pour $E_1 = E_2.E_3$, nous avons l'égalité strictement mathématiques :

$$F_1 = F_2.F_3$$

Pour $E_3 = E_2.E_1 + \overline{E_2}.U$, l'égalité strictement mathématiques s'écrit :

$$F_3 = F_2.F_1 + [1 - F_2].U$$

Remarque 1 :

Il est possible d'établir le même raisonnement concernant les autres portes logiques, pour lesquelles la *Cause* 1 ne peut être exprimée uniquement en fonction de la *Conséquence* et de la *Cause* 2.

Par exemple, prenons la porte logique "*OU*" (il n' y a plus de liens entre les formules $F(M)$, $s(M)$ et $f(M;x)$ dans cet exemple). Nous avions noté :

Donnons à E_1 le nom de *Conséquence*,
Donnons à E_2 le nom de *Cause* 2,
Donnons à E_3 le nom de *Cause* 1,

Dont la table de vérité à propos de l'égalité correspondante est rappelée (en algèbre de *BOOLE*) :

E_3	E_2	$E_1 = E_3 + E_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ou bien, en réarrangeant seulement les lignes et les colonnes :

E_1	E_2	$E_3 = ?$
0	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Remarquons que la situation $E_1 = 0$ et $E_2 = 1$ en même temps n'existe pas, nous devons l'interdire lorsque nous faisons varier E_1 et E_2.

Dans les 2 premières lignes, la variable E_2 est inutile : il est possible de connaître E_3 seulement en connaissant E_1.

Nous avons pour les 2 premières lignes, c'est-à-dire lorsque $E_2 = 0$:

$$E_3 = E_1$$

Nous avons pour les 2 dernières lignes, c'est-à-dire lorsque $E_2 = 1$:

Une impossibilité à définir E_3 en fonction de E_1 (car $E_1 = E_2 = 1$, donc E_1 et E_2 ne varient pas aors que E_3 varie).

Comme précédemment, en introduisant une nouvelle variable binaire U indépendante d'un système et dont la valeur de vérité ne peut être définie par un système de règles (elle peut valoir soit 0 soit 1, mais sa valeur ne peut être "prédite", cela introduit une part de probabilité). Il devient alors possible d'établir une égalité qui tient compte de l'impossibilité de donner E_3 en fonction de E_1 et E_2 lorsque ces dernières valent 1 en même temps.

Nous avons pour les 2 dernières lignes, c'est-à-dire lorsque $E_2 = E_1 = 1$:

$$E_3 = U$$

Et en récapitulant :

$E_3 = E_1$	lorsque $E_2 = 0$
$E_3 = U$	lorsque $E_2 = 1$

Ce qui permet d'écrire :

$$E_3 = \overline{E_2}.E_1 + E_2.U$$

avec la condition d'interdiction que $E_1 = 0$ et $E_2 = 1$ en même temps. Même remarque que précédemment : grâce à cette formule, enlever l'interdiction n'a pas d'incidence sur les résultats. En effet, puisque seul $E_2 = 1$ est nécessaire pour donner l'égalité, l'égalité peut donc être donnée indépendemment de E_1 (c'est-à-dire quelquesoit sa valeur).

Nous pouvons donner des équivalences strictement mathématiques et générales avec des formules “binaires” (ne donnant pour valeur que 0 ou 1) ici aussi :

En nommant F_1 (à rattacher à l'énoncé E_1) une formule mathématique binaire ne pouvant prendre pour valeur que 0 ou 1,

En nommant F_2 (à rattacher à l'énoncé E_2) une autre formule mathématique binaire ne pouvant prendre pour valeur que 0 ou 1,

En nommant F_3 (à rattacher à l'énoncé E_3) une dernière formule mathématique binaire ne pouvant prendre pour valeur que 0 ou 1,

Et en nommant U (à rattacher à la variable de valeur de vérité indéfinissable U) une formule mathématique binaire ne pouvant prendre que de manière indéfinissable (ou probable) la valeur 0 ou 1,

Pour $E_1 = E_2 + E_3$, nous avons l'égalité strictement mathématiques :

$$F_1 = F_2 + F_3 - F_2.F_3$$

Ou encore :

$$F_1 = (F_2 - F_3)^2 + F_2.F_3$$

En effet puisque :

$$\begin{aligned}(F_2 - F_3)^2 + F_2.F_3 &= {F_2}^2 + {F_3}^2 - 2.F_2.F_3 + F_2.F_3 \\ &= {F_2}^2 + {F_3}^2 - F_2.F_3\end{aligned}$$

Et comme :

${F_2}^2 = F_2$ pour les formules binaires
${F_3}^2 = F_3$ pour les formules binaires

Nous déduisons :

$$(F_2 - F_3)^2 + F_2.F_3 = F_2 + F_3 - F_2.F_3$$

Ce qui explique l'égalité précédente.

De cette manière, nous pouvons directement constater que l'équivalent strictement mathématiques de la porte logique "*OU*" fait directement apparaître la somme de :

$(F_2 - F_3)^2$ la porte logique "*OU EXCLUSIF*" entre les formules F_2 et F_3,

$F_2.F_3$ la porte logique "*ET*" entre les formules F_2 et F_3.

Pour finir, l'écriture en algèbre de *BOOLE* de :

$E_3 = \overline{E_2}.E_1 + E_2.U$

permet de donner une écriture strictement mathématique équivalente :

$$F_3 = [1 - F_2].F_1 + F_2.U$$

Remarque 2 :

L'utilité de cette partie pourrait être remise en cause : bien que la démarche (l'introduction d'une variable U de valeur de vérité indéfinissable) ne soit pas conventionnelle, il me semble cependant nécessaire de préciser qu'il existe un lien avec la suite de la réflexion, notamment avec les énoncés *vrais* et *indémontrables* (entre autres) auxquels nous feront référence dans la partie "**14 Preuve de la liberté**" (page 390). Il est important de comprendre cette partie pour comprendre ce lien et la pertinence de l'ensemble.

12.7 Contre-exemple : la formule $\mathfrak{I}(M)$

Cette sous-partie vient proposer un "contre-exemple" qui complètera les réflexions précédentes, sans pour autant les contredire. En reprenant la formule $\mathfrak{I}(M)$ étudiée dans le **Chapitre I** en sous-partie "**3.4 Formule d'Impulsion Première** $\mathfrak{I}(M)$", avec $M \in \mathbb{N}$, avec $P_n \in \mathbb{P}$ et avec $d \in \mathbb{N}$ tel que $d \geq 0$, nous avions pu formuler :

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(M) &= s(2.M+2) \\ &= s[P_n.(d.M+1)] \\ &= s(M+2).s(M+3) \end{aligned}$$

Ces formules sont typiquement celles que l'on peut intégrer dans les tables de vérité de l'algèbre de *BOOLE* [3] étant donné qu'elles ne peuvent prendre que 2 valeurs (0 ou 1).

Prenons les formules suivantes :

$s(2.M+2)$

$s(M+2)$

$s(M+3)$

Associons chacune de ces 3 formules à un énoncé :

Associons l'énoncé E_1 à la formule $s(2.M+2)$,
Associons l'énoncé E_2 à la formule $s(M+2)$,
Associons l'énoncé E_3 à la formule $s(M+3)$,

Avec les énoncés exprimés de manière adéquat :

L'énoncé E_1 : "$M \in \mathbb{N}$ **est telle que** $(M+2) \in \mathbb{P}$ **et** $(M+3) \in \mathbb{P}$"
L'énoncé E_2 : "$M \in \mathbb{N}$ **est telle que** $(M+2) \in \mathbb{P}$"
L'énoncé E_3 : "$M \in \mathbb{N}$ **est telle que** $(M+3) \in \mathbb{P}$"

(*Remarque :* l'énoncé E_1 est également équivalent à l'énoncé :
"$M \in \mathbb{N}$ **est telle que** $(2M+2) \in \mathbb{P}$")

En donnant les valeurs de vérité 1 équivalente à “*vrai*” et 0 équivalente à “*faux*”, il devient possible de donner une table de vérité comme nous l’avons fait jusqu’à maintenant. D’après l’énoncé E_1 (ou d’après l’égalité de $s(2.M+2) = s(M+2).s(M+3)$, ce qui revient au même), nous constatons que l’expression logique de E_2 et de E_3 peut se faire par une porte logique “*ET*” :

$$E_1 = E_2.E_3$$

Voici maintenant l’intérêt de ce contre-exemple :

Comme dans les sous-parties précédentes, en supposant que la formule $s(M+3)$ ne soit pas connue, si nous essayons de la rechercher uniquement à partir des formules que nous connaissons, à savoir $s(2.M+2)$ et $s(M+2)$, nous aboutirons aux mêmes conclusions. C’est-à-dire que nous concluerons que le nombre d’informations dont nous disposons n’est pas suffisant pour donner une formule qui correspond à celle de $s(M+3)$.

En effet, en considérant E_1, E_2 et E_3 comme étant des variables binaires, nous pouvons alors établir une table de vérité (en algèbre de *BOOLE*) :

- la valeur de vérité de E_1 est à rattacher à la formule $s(2.M+2)$ connue.
- la valeur de vérité de E_2 est à rattacher à la formule $s(M+2)$ connue.
- la valeur de vérité de E_3 est à rattacher à la formule $s(M+3)$ recherchée.

E_3	E_2	$E_1 = E_2.E_3$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Où les valeurs de E_1 dépendent des valeurs de E_2 et des valeurs de E_3. Rechercher une formule telle que $s(M+3)$ de manière directe revient alors à supposer que les valeurs de E_3 dépendent directement des valeurs de E_2 et de E_1, or, nous l’avons déjà vu, E_2 est indépendant de E_3.

Ou bien, en réarrangeant seulement les lignes et les colonnes :

E_1	E_2	$E_3 = ?$
0	0	0
0	0	1
0	1	0
1	1	1

Comme prévu, nous concluons que connaître E_1 et E_2 n'est pas suffisant pour connaître E_3. Et donc finalement, connaître le formule $s(2.M+2)$ et la formule $s(M+2)$ n'est pas suffisant pour connaître la formule rattachée à l'énoncé E_3.

Or, la formule rattachée à E_3 existe puisqu'il s'agit de $s(M+3)$. Pour en revenir aux sous-parties précédentes, ce contre-exemple permet de dire qu'il n'est pas impossible qu'il existe une formule telle que $F(M)$ et qui se rattache à l'énoncé :

"$N \in \mathbb{N}$**,** $N \geq 1$ **est telle que** N **est multiple de** M^x",
et dont $F(M)$ donnerait directement une valeur de vérité à cet énoncé.

Dans ce contre-exemple, il est possible de compléter les réflexions des sous-parties précédentes en constatant que le manque d'informations ou de connaissances pour exprimer une formule ne veut pas systématiquement dire qu'exprimer cette formule soit impossible.

Remarque :

A propos de la formule de $F(M)$ recherchée dans la sous-partie "**12.4 La formule** $f(M;x)$" (page 349), si cette formule existe, nous pouvons anticiper quelques informations sur celle-ci :

- Puisque les résultats des 2 autres formules $f(M;x)$ et $s(M)$ ne peuvent être que "binaires" (c'est-à-dire 0 ou 1),

- Et puisque $F(M)$ doit au moins respecter l'égalité :

$$f(M;x) = s(M).F(M)$$

- Nous pouvons tout de même affirmer que s'il était permis de trouver une telle formule, cette formule serait nécessairement de type "binaire" : c'est-à-dire que les résultats qu'elles devrait fournir seraient exclusivement 0 ou 1, ce qui permettrait d'attribuer une valeur de vérité à l'énoncé correspondant.

12.8 Observations

- D'après ce que nous venons de voir dans le premier chapitre :

il existe des formules mathématiques "binaires" qui ne peuvent fournir que 2 valeurs (comme 0 ou 1) telles que $s(M)$, $\mathfrak{I}(M)$, ou $f(M;x)$.

- D'après ce que nous venons de voir dans ce chapitre, il est possible d'établir un lien direct entre ces valeurs et les valeurs de vérité d'un énoncé.

- Le choix du contenu de l'énoncé se fait simplement :

Lorsqu'une formule vaut 1, il suffit de décrire la situation pour laquelle cela est exclusivement le cas, ce qui permet de construire l'énoncé qui se rattache à cette formule. Lorsque la formule vaut 1, l'énoncé est forcément $vrai$. Par conséquent, lorsque la formule vaut 0, l'énoncé est $faux$.

Par exemple :

Rappelons que pour $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$, nous avons $s(M)$ telle que :

$s(M) = 1$ si $M \in \mathbb{P}$
$s(M) = 0$ si $M \notin \mathbb{P}$

Pour construire l'énoncé, il suffit de décrire la situation pour laquelle $s(M) = 1$.

C'est le cas pour ce qui suit : "$M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ est tel que $M \in \mathbb{P}$"

En effet, en donnant :

La valeur de vérité correspondant au résultat 1 de la formule est "$vrai$" ,
La valeur de vérité correspondant au résultat 0 de la formule est "$faux$".

Au regard de l'énoncé, nous vérifions bien la cohérence entre sa valeur de vérité et le résultat de la formule associée. Ce qui ne peut être autrement puisque nous avons attribué à chaque valeur de vérité une valeur unique de la formule, et donc à chaque valeur de la formule ne correspond qu'une seule valeur de vérité.

Ce qui permet d'avoir un lien direct et clairement défini entre une formule "binaire" et la valeur de vérité d'un énoncé correpondant.

Et donc, dans notre exemple, et étant donné que la variable M est définie tel que $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$:

si $s(M) = 0$, l'énoncé est effectivement $faux$ (puisque $M \notin \mathbb{P}$, et cela est cohérent avec la formule).

si $s(M) = 1$, l'énoncé est effectivement $vrai$ (puisque $M \in \mathbb{P}$, et cela est cohérent avec la formule).

12.9 Conclusions et orientations

- Dans cette conclusion, nous allons nous orienter vers une application possible des formules étudiées à des phénomènes physiques, dans la limite de ce que ces formules permettraient.

Il est important de remarquer qu'il est possible d'établir un lien entre la logique binaire (c'est-à-dire le calcul propositionnel "classique") et une formule telle que $f(M;x)$. La formule $D(N)$ contient la formule principale $f(M;x)$. La formule $f(M;x)$ permet d'effectuer un traitement sur la propriété de "primalité" d'un nombre entier (un nombre entier supérieur ou égal à 2 ne peut être que premier ou composé).

Etant donné la formule de décomposition $D(N)$ d'un nombre entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$ en produit de facteurs premiers, Cette formule doit permettre de traiter les ondes, de telle manière qu'il devienne possible de décomposer une longueur d'onde N en longueurs d'ondes fondamentales.

Appliquée aux ondes (tel que l'onde d'un photon, particule de lumière), la formule $f(M;x)$ permettrait de les traiter, et permettrait de construire une logique binaire (en rapport direct avec le calcul propositionnel "classique") à partir des propriétés de primalité de la valeur d'une longueur d'onde par rapport à une autre (nous parlons de 2 ondes puisque la formule permet la comparaison de la variable N à par la variable M).

Remarque importante :

Dans le cas des formules plus simples $s(M)$ et $\mathfrak{I}(M)$, il n'est pas besoin de traiter toutes les longueurs d'ondes M pour constituer une logique binaire, il ne suffit que de 2 longueurs d'ondes : une longueur d'onde associée à M correspondant à l'état binaire $s(M) = 0$ (ou à $\mathfrak{I}(M) = 0$), et une autre longueur d'onde associée à M correspondant à l'état binaire $s(M) = 1$ (ou respectivement à $\mathfrak{I}(M) = 1$).

Signalons que ce cas est le plus réducteur possible car il restreint les possibilités de faire varier M seulement sur 2 valeurs utiles.

Osons donner un exemple en imaginant qu'une particule soit capable d'effectuer un tel calcul (du même type que les formules évoquées : $D(N)$, $s(M)$, $\mathfrak{I}(M)$) à partir des ondes d'un photon. Avec uniquement 2 longueurs d'onde distinctes de sorte que :

- ▷ La particule absorbe le photon s'il est de longueur d'onde λ_a;
- ▷ La particule n'absorbe pas le photon et elle le rejette s'il est de longueur d'onde λ_r;

Nous pouvons faire correspondre les valeurs de vérité "**vrai**" et "**faux**" à chacune des 2 longueurs d'onde (en fonction de cette particule), de sorte que :

- ▷ "**vrai**" signifie que la particule absorbe le photon, et signifie donc que la longueur d'onde est λ_a;
- ▷ "**faux**" signifie que la particule rejette le photon, et signifie donc que la longueur d'onde est λ_r;

Cette interprétation permettrait d'établir une correspondance entre le langage propositionnel et la longueur d'onde d'un photon "traitée" par une particule.

Hypothèses :

Nous avons la possibilité d'appliquer la formule $f(M;x)$ (ou $s(M)$) à une onde de longueur d'onde N (ou M) ou de période N (ou M). Ces formules peuvent être appliquées à un phénomène ondulatoire "fondamental" (c'est-à-dire un phénomène le plus simple possible, et qui permet de produire des phénomènes plus complexes), il est possible que le photon soit un candidat sérieux pour être ce phénomène.

Il faut noter le lien avec les congruences (et avec la fonction *SINUS*, et donc aussi avec le cercle) qui sous-entendrait que ce photon pourrait être en translation linéaire mais aussi en "rotation" avec d'autres (cette phrase est peut-être mal formulée, mais il est encore difficile à ce stade de donner une description exacte du phénomène, voir **Chapitre VI** pour plus de détails).

Ce qui sous-entendrait encore de supposer fortement que la matière ne serait qu'un ensemble de photons "en orbite" les uns avec les autres (comme pour l'hypothèse précédente, ceci n'est certainement pas une description suffisante), permettant d'envisager que toute matière ne serait constituée que de photons.

Trouver une bonne application physique à la formule $f(M;x)$ (ou même $s(M)$) et développer davantage la réflexion sur celle-ci permettra peut-être de donner une représentation plus précise d'un phénomène ondulatoire. En faisant l'hypothèse qu'un photon constitue ce phénomène physique recherché, cela pourrait permettre de donner une représentation plus précise de ses comportements (peut-être même de sa structure).

La formule $D(N)$ (ou même $f(M;x)$ et $s(M)$) demandant des temps de calculs plutôt longs lorsque N est un grand nombre, s'il s'avérait exacte que la matière procède de la même manière que la formule $D(N)$ l'indique pour traiter la décompostion d'ondes, alors un processus de calcul très performant serait déjà dans la nature (c'est-à-dire dans la matière). Il suffirait d'exploiter cela pour construire un calculateur très performant, et dont la performance serait égale à ce qu'il serait permis de produire de mieux (les limites de cette performance seraient les limites de la performance de la matière elle-même).

Digression à propos de la musique :

Etant donné la possibilité d'établir un lien entre la logique binaire (c'est-à-dire le calcul propositionnel "classique") et les ondes, nous pouvons "prolonger" notre conclusion en donnant une possibilité d'établir un langage (binaire) à partir des ondes directement. Concernant la musique, nous pouvons donc considérer qu'elle constitue un tel langage. Il n'est donc pas étonnant d'entendre souvent dire que la musique est un langage universel. En effet, puisque le traitement des ondes par les formules $f(M;x)$, $s(M)$ et $\mathfrak{I}(M)$ tel que nous l'avons indiqué peut être ramené au traitement du calcul propositionnel classique.

13

Les règles logiques

13.1 Introduction

Il sera ici question essentiellement de mettre les mots “face” à leur dénintion, ou de mettre des énoncés “face” à leur sens. Cela peut permettre de donner une “valeur de vérité” (“$vrai$” ou “$faux$”)à certaines définitions et à certains énoncés (grâce à des structures de raisonnement très similaires).

Prenons un exemple avec l’énoncé donné :

“**Tout peut être remis en cause**”

Cela signifie aussi que “**Rien n’est fiable**”. Si tel est le cas, alors l’énoncé aussi peut être remis en cause car il n’est pas fiable non plus. Or, l’énoncé au moins devrait être fiable, ce qui permet de conclure que tout ne peut pas être remis en cause, et qu’il doit exister un minimum de fiabilité.

En développant :

- En supposant que l’énoncé donné soit $vrai$, on déduit qu’il est $faux$, et donc on en déduit qu’il existe un minimum de fiabilité.
- En supposant que l’énoncé donné soit $faux$, on déduit directement qu’il existe un minimum de fiabilité.

Pour aller plus loin, l'énoncé "**il existe un minimum de fiabilité**" doit être fiable. D'où l'on déduit aussi l'énoncé "**Cet énoncé au moins est fiable**".

Cette structure de raisonnement permet de conclure en donnant une valeur de vérité à propos d'une assertion portant sur "**Tout**" ou "**Rien**" (comme les énoncés "**Tout peut être remis en cause**" ou "**Rien n'est fiable**").

Ceci est à rapprocher du raisonnement de *René DESCARTES* [9] à propos du "doute le plus radical". En effet, puisque "dans le doute le plus radical, on ne peut pas douter que l'on doute" (ou "au doute méthodique, seul résiste la certitude de l'existence"). C'est ce que nous avons vu de manière équivalente avec l'énoncé donné, puisque nous avons déduit qu'il doit y avoir un minimum de fiabilité (au moins cette conclusion), et donc que tout ne peut pas être remis en cause.

Il en est de même à propos de l'affirmation "**rien n'a de sens**". En effet, si rien n'avait de sens, alors cette affirmation n'en aurait pas non plus, d'où l'on déduit qu'il existe nécessairement un minimum de sens (au moins pour cette conclusion). De manière identique, nous pouvons tirer une conclusion à propos de l'affiramation "**nous ne pouvons croire en rien**". Si nous ne pouvions croire en rien, nous ne pourrions croire en cette affirmation, ce qui nécessite que nous ayons un minimum de croyance (au moins en cette conclusion). Le raisonnement reste encore le même que pour la croyance avec la confiance... Il existe une structure d'énoncé qui permet la même structure de conclusion. En affirmant que "**tout**" est d'une manière ou que "**rien**" n'est d'une manière, nous incluons aussi dans ce "**tout**" notre affirmation ou, dans le cas de "**rien**" , nous excluons aussi de ce "**tout**" notre affirmation. La structure de conclusion qui revient est du type "**il existe un minimum de "quelquechose", qui est au moins applicable à cette conclusion**".

Par la suite, nous allons développer ce type de raisonnement à propos d'autres énoncés ou à propos des définitions même des mots, puisque ces définitions peuvent être considérées comme étant des énoncés.

Remarque :

Si nous admettons qu'il soit possible d'attribuer un minimum de fiabilité à certains énoncés ou à certains raisonnements, il serait donc légitime d'avoir des convictions à leur égard. Par conséquent, et bien que le scepticisme soit nécessaire à toute démarche véritablement scientifique (il permet de rester ouvert à l'accueil d'une idée nouvelle), le scepticisme ne peut pas être exclusivement un doute permanent à propos de tous les sujets, notamment à propos de cette idée d'un minimum de fiabilité.

Digression :

Pour finir, ajoutons qu'il nous est possible de connaître l'univers en partie. En effet, l'univers contenant toute chose, nous sommes donc une partie de cet univers. Or, il est possible d'acquérir des connaissances par le biais d'une logique appliquée à nous-même (comme la logique appliqué aux affirmations ci-dessus). Pour nous, l'univers peut donc être connu en partie. Si nous devions découvrir un principe qui établi un lien entre nous et le reste de l'univers, alors nous serions en mesure de connaître l'univers. C'est-à-dire qu'une partie de l'univers peut avoir connaissance de l'univers. Dans ce cas, chaque partie serait également liée au reste, et chaque partie pourrait donc avoir connaissance du reste l'univers.

Une partie ne peut comprendre les choses telles qu'elles sont véritablement qu'en se débarrassant de ses préjugés sur les autres parties afin d'avoir une vision la plus juste et la plus réaliste possible. Ceci implique un respect de la part de l'observateur, et même le plus grand respect envers le reste de l'univers, mais aussi le plus grand respect envers soi-même (dans le cas où nous pouvons être considéré comme étant nous-même l'objet de l'étude). Une bonne compréhension des choses ne peut donc se faire en dehors du respect le plus pur, ce qui implique nécessairement une philosophie qui devient exactement celle de l'écologie. C'est dans le respect de la moindre partie de l'univers que nous pouvons avoir la vision la plus juste.

13.2 Développement

Nous allons ici donner des affirmations intéressantes dans le sens où celles-ci vont nous permettre d'en tirer des conclusions.

Prenons en considération une affirmation que nous nommerons A.

Donnons le symbole " $=$ " et donnons lui le même sens que les mots "**s'énonce ainsi**". Ce qui permettra d'établir une équivalence entre une lettre (ou un nom) qui symbolise l'énoncé et le contenu de l'énoncé.

Donnons le crochet " [" pour symboliser le "**début de l'énoncé**" et le crochet "] " pour symboliser la "**fin de l'énoncé**".

L'énoncé A peut alors être donné par par ce qui suit :

$A =$ [**Rien ne suit de règle logique**]

Commençons maintenant le raisonnement à propos de l'affirmation A.

Si [**Rien ne suit de règle logique**], nous observons pourtant clairement que A s'énonce comme une règle.

Or, si "**Rien ne suit de règle logique**", A ne peut pas être la règle. Ce qui signifie que ce qu'énonce A est $faux$. Et si A est $faux$, on déduit qu'il doit exister au moins une règle.

Et donc l'affiration "**Il existe au moins une règle logique**" étant une règle, il est possible de construire une affirmation qui dit quelquechose sur elle-même, une affirmation qui se déduit d'un raisonnement cohérent, dont le point de départ est une affirmation $fausse$. En appelant A' cette dernière affirmation, nous pouvons la réécrire ainsi :

$A' =$ [**il existe au moins une règle logique**]

Et comme A' est une règle, nous avons donc aussi :

$B =$ [**Au moins A' est une règle logique, ainsi que B**]

Où l'on voit que B est *vraie* et *démontrable* (il existe une suite de règles logiques à appliquer qui nous amènent à conclure B).

Il est possible d'écrire de manière équivalente :

$A' =$ [**il existe un minimum de règles logiques dont A' fait partie**]

Remarque :

Bien que A soit $faux$, nous pouvons constater que A peut être construite (ou produite). Il est possible de percevoir une réponse à ce phénomène dans la partie suivante.

De plus, nous constatons dans qu'un énoncé *vrai* peut être construit à partir d'un énoncé $faux$ ou à partir d'un autre énoncé *vrai*, et cela grâce à un raisonnement cohérent.

14

Preuve de la liberté

Cette $3^{ième}$ partie a pour objet de répondre à la question : est-ce que "tout suit des règles logiques" ? C'est-à-dire que nous désirons savoir si tout ce qui est constructible peut être extrait d'un raisonnement cohérent.

Cette partie est d'une importance capitale pour la suite de la théorie. Elle nécessite la compréhension des 2 sous-parties précédentes. Bien que des liens utiles soient présents entre les sous-parties, la chronologie des sous-parties de cette $14^{ième}$ partie est critiquable (cette preuve est délicate à exposer mais fondamentale!), une seconde lecture pourrait éventuellement être nécessaire.

Le théorème d'incomplétude de *GODEL* [10] étant utile pour atteindre ce but, précisons que les travaux qui suivent pour donner une preuve de la liberté ne tirent aucune conclusion directe de ce théorème (ce qui serait un abus). Les travaux qui suivent ne remettent aucunement en question le théorème d'incomplétude de *GODEL*. Au contraire, ce qui est proposé est d'étudier d'autres affirmations (ou énoncés) dans divers cas de figures (voir même des affirmations contradictoires) au sein même d'une théorie cohérente, afin de compléter une réflexion et de permettre d'acquérir un nouvel angle de vue à propos de la construction des énoncés *indémontrables*.

Les conclusions de cette réflexion pourra alors être perçue comme un complément dont uniquement la synthèse des 2 (c'est-à-dire entre les conclusions de ces travaux et le théorème d'incomplétude) peuvent mener finalement à cette preuve, chacune étant indispensable pour atteindre cet objectif. C'est ici que la démarche non-conventionnelle des raisonnements des parties 12 et 13 (avec l'introduction d'une variable U de valeur de vérité indéfinissable) va montrer son intérêt.

14.1 Première approche

D'après les travaux de *Kurt GODEL* [10] à propos d'une théorie arithmétique, à partir de laquelle il est possible de construire un énoncé qui ne peut être ni prouvé ni réfuté dans cette théorie, on peut déduire que cette théorie est incomplète.

Appelons E un tel énoncé, donnons le symbole " = " et donnons lui le même sens que les mots "**s'énonce ainsi**".

Donnons le crochet " [" pour symboliser le "**début de l'énoncé**" et le crochet "] " pour symboliser la "**fin de l'énoncé**".

L'énoncé E peut alors être donné par ce qui suit :

$E =$ [**Cet énoncé est indémontrable**]

Où "**Cet énoncé**" désigne l'énoncé E lui-même. Ce qui est équivalent à :

$E =$ [E **est indémontrable**]

(Où l'on remarque clairement que l'énoncé affirme quelquechose sur lui-même)

Testons la "démontrabilité" de cet énoncé E en 2 parties :

- Supposons que nous ne connaissions pas le contenu de E (ni l'énoncé ni son sens ne nous sont donnés), et en supposant que E soit *indémontrable*.

De plus, considérons que tout raisonnement cohérent suit des règles logiques (de déductions) permettant d'établir des démonstrations.

Si E était effectivement *indémontrable*, aucun raisonnement logique et cohérent ne permettrait de déduire que E est *indémontrable*.

- Supposons maintenant que E soit *démontrable*. Pour pouvoir le vérifier, nous devons alors connaître le contenu de l'énoncé (et donc son sens).

Or, l'énoncé E nous dit que "E **est indémontrable**". Il apparaît donc une contradiction entre la supposition que E puisse être démontrable et le contenu (qui forme le sens) de E.

Pour les mêmes raisons que précédemment mais maintenant à propos du contenu de E : si E était effectivement *indémontrable*, aucun raisonnement logique et cohérent ne permettrait de déduire que E est *indémontrable*, ni d'engendrer une contradiction à propos de E.

- Tout ceci permettant de conclure qu'il existe systématiquement des énoncés qui ne peuvent être issus d'aucun raisonnement logique et cohérent, c'est-à-dire qu'il existe des énoncés tel que E qui ne peuvent pas être construits à partir de règles logiques.

Il existe donc quelquechose de constructible en dehors de toute règle logique. Ce qui constitue une première approche de la preuve de "l'existence" de la liberté, une liberté qui se définirait par une capacité à construire en dehors des règles logiques.

Cette première approche de la preuve nécessite cependant une réflexion plus soutenue et plus rigoureuse, c'est ce que nous proposerons dans la sous-partie "**14.5 Preuve complète : Incomplétude et variable de valeur de vérité indéfinissable**" (page 401) à l'aide de l'algèbre de *BOOLE* [3] et de cas de figures plus précis, bien que les sous-parties que nous allons aborder nous y amènent naturellement.

Remarque :

Ce raisonnement permet d'effectuer un constat, pas d'expliquer comment un système peut produire un tel énoncé. Cependant, le **Chapitre VI** tente de donner une équivalence géométrique (et physique) de ce phénomène à partir d'un cas particulier.

Par déduction, ce raisonnement permet de donner une valeur de vérité à l'énoncé suivant : "**Tout est démontrable**" est $faux$.

14.2 Limites préalables

Proposons nous préalablement de réfléchir quelques instants sur les limites que pourrait avoir la réalité d'une telle liberté.

Dans l'hypothèse ou la liberté est totale, il est alors possible pour un système de choisir de devenir libre.

Or, s'il avait la possibilité d'effectuer ce choix, c'est que ce système serait déjà libre.

Par conséquent, un système ne peut décider de sa propre liberté. C'est-à-dire que la liberté d'un système ne peut pas être construite par choix de ce système lui-même. Ce système étant libre sans pouvoir intervenir sur cette donnée, il existerait donc une limite à la liberté.

Autrement dit, la liberté préexiste (sous une forme qui reste à déterminer, ce qui est l'objet du **Chapitre VI**) dans un système libre, et elle est nécessairement limitée (elle ne peut pas être "totale").

14.3 Synthèse avec la partie 12

Cette synthèse a pour objet de séparer ce qui peut être construit par un raisonnement cohérent et ce qui peut être construit par son "complément" (les "non-règles", que nous allons définir, ce que j'appellerai plus loin hasard). En reprenant les notations et les conventions d'écriture des **parties 12** et **13**, nous pouvons rassembler des éléments :

- Pour l'énoncé noté E' :

E' = [**il existe un minimum d'énoncés démontrables dont E' fait partie**]

Nous nous retrouvons dans le cas de l'affirmation A' , qui est équivalente du point de vue du raisonnement puisque l'on déduit aussi que E' est *vraie* et *démontrable*.

Et donc E' et A' sont le produits d'un raisonnement cohérent, dont un point de départ du raisonnement peut être l'affirmation E'' :

E'' = [**Rien n'est démontrable**]

(comme au moins E' est *démontrable*, cela permet de conclure que E'' est *faux*)

ou encore un autre point de départ de raisonnement avec l'affirmation A (ce qui permet de conclure A').

Un autre point de départ au raisonnement peut être aussi l'affirmation A' ou l'énoncé E' , puisqu'ils sont déjà cohérents.

- En définissant des ensembles tels que :

Un "**ENSEMBLE REGLES**" peut être représenté par un système de règles cohérentes, un raisonnement cohérent ou une théorie cohérente, permettant de produire des démonstrations valides.

Un "**ENSEMBLE NON-REGLES**" peut être représenté par un système permettant de produire des énoncés non issus de règles cohérentes, d'un raisonnement cohérent ou d'une théorie cohérente (ou "non déterministe", comme nous le verrons dans la sous-partie “**14.5 Preuve complète : Incomplétude et variable de valeur de vérité indéfinissable**”, page 401. Pour prendre un exemple, nous pourrions inclure la variable de valeur de vérité indéfinissable U dans cet ensemble, introduite dans les formules de la sous-partie “**12.6 Variable binaire U de valeur de vérité indéfinissable**” page 370).

En rappelant que nous avons noté :

A' = [**il existe au moins une règle logique**]
E' = [**il existe un minimum d'énoncés démontrables dont E' fait partie**]

Et

A = [**Rien ne suit de règle logique**]
E'' = [**Rien n'est démontrable**]

Nous pouvons alors séparer les affirmations construites :

A' et E' proviennent de “**L'ENSEMBLE REGLES**”.
A et E'' sont $fausses$ et proviennent de “**L'ENSEMBLE NON-REGLES**”.

- Pour E = [E **est indémontrable**] :

Le point de départ du raisonnement est un énoncé qui affirme quelquechose sur lui-même, et ce qu'il affirme étant son exclusion à “**L'ENSEMBLE REGLES**”. Donc E est *vrai* et appartient à “**L'ENSEMBLE NON-REGLES**” aussi.

- Finalement nous constatons que “**L'ENSEMBLE NON-REGLES**” peut contenir des affirmations *vraies* et *indémontrables*, ou des affirmations $fausses$ qui ne peuvent pas être produites par un raisonnement cohérent.

14.4 Remarque sur les énoncés constructibles

En partant de la remarque qu'un énoncé tel que A peut être construit en dehors des règles logiques (ou en dehors d'un raisonnement cohérent), nous pouvons formuler un autre énoncé C qui serait équivalent :

$C =$ [**Aucun énoncé n'est constructible**]

(où, dans notre cas, "est constructible" signifie aussi "peut être écrit")

Or, nous venons justement de construire C (notamant en le formulant par l'écriture), ce qui prouve que ce qu'énonce C est $faux$, et nous pouvons même ajouter que, pour les mêmes raisons que précédemment, C ne peut donc pas être la conclusion d'un raisonnement cohérent.

Il en est de même pour l'énoncé C' suivant :

$C' =$ [**Cet énoncé n'est pas constructible**]

Où "Cet énoncé" désigne l'énoncé C' lui-même. Ce qui est équivalent à :

$C' =$ [C' **n'est pas constructible**]

Ce qui est également $faux$ puisque C' vient d'être construit.

Poursuivons avec l'énoncé suivant :

$C'' =$ [C'' **est constructible**]

C'' est donc $vrai$ puisqu'il vient d'être construit.

Et avec ce dernier :

$C''' =$ [**Tous les énoncés sont constructibles**]

Dans ce cas précis, il n'est permis de déduire quelquechose de C''' qu'ainsi :

Si tous les énoncés peuvent être construits, alors des énoncés $vrais$ mais également des énoncés $faux$ peuvent être construits, ce qui est effectivement le cas.

De plus, dans l'hypothèse où il existerait au moins un énoncé inconstructible, nous ne serions jamais capable de le construire (c'est-à-dire de l'écrire), puisque par définition, "il" serait inconstructible. Mais comme un tel énoncé ne peut exister, il n'est même pas cohérent d'écrire qu'un énoncé est inconstructible. Ce qui signifie qu'un énoncé doit au moins être toujours constructible, au moins pour qu'il puisse être énoncé.

Prenons un autre exemple pour nous en convaincre. Nommons et définissons F un énoncé composé d'une suite de mots en quantité infinie. Donnons par exemple (les 3 points de suspension " ... " signifient que les mots qui composeront cet énoncé doivent être en nombre infini) :

$F =$ [**Ou bien un énoncé contenant une infinité de mots est constructible ou bien il est inconstructible, sachant que chaque mot a sa propre définition et sachant qu'une infinité de mots se constitue d'un 1^{ier} mot, suivi d'un $2^{ième}$ mot, le $2^{ième}$ étant suivi d'un $3^{ième}$, le $3^{ième}$ étant suivi d'un $4^{ième}$, le $4^{ième}$ étant suivi d'un $5^{ième}$, le $5^{ième}$ étant suivi d'un $6^{ième}$, ...**]

F est-il constructible? Nous voyons qu'il est pourtant possible d'attribuer une définition à F, mais cette définition est-elle cohérente? Il est évident que si nous devions écrire une suite de mots se répétant à l'inifini, nous ne pourrions jamais finir d'écrire l'énoncé F, même en disposant d'un temps infini pour le faire. Il ne serait donc jamais possible de connaître le contenu de F (même en attendant un temps infini), ce qui serait pourtant utile pour établir un raisonnement cohérent à propos de F afin d'en déduire quelquechose (au moins d'en déduire si F est $vrai$ ou $faux$). Bien qu'en disposant effectivement d'un temps infini mais aussi d'une quantité de matière infinie (telle que l'encre) pour écrire cette énoncé, nous ne pourrions jamais finir de le construire.

Et donc, un énoncé tel que F ne peut jamais être donné dans son intégralité car il ne peut jamais être écrit (ou construit) dans son intégralité, sa construction étant impossible à achever. Par conséquent, F n'est pas constructible tel qu'il est défini. D'ailleurs nous n'avons pas réussi à construire F puisque nous avons substitué une suite inifinie de mots au symbole " ... ". Or, le symbole “ ... ” n’est pas une quantité infinie de mots, mais il définit une quantité infinie de mots, ce qui est différent. En d’autres termes, F ne peut pas être produit : F ne peut pas être réalisé. Tout énoncé doit être fini afin de permettre sa construction (ou afin de le rendre réalisable).

Puisque F n’est pas constructible, cela signifie que F n’est pas un énoncé. F aurait été un énoncé si et seulement si la suite de mots qui le compose n’avait pas à s’étendre à l’infini. La définition est donc incohérente : il n’est pas possible de définir autre chose qu’un énoncé contenant un nombre fini de mots, dont chaque mot contient un nombre fini de lettres, et dont l’énoncé s’écrit dans un espace fini. Il n’est pas cohérent de parler d’un énoncé contenant un nombre infini de mots car celui-ci ne serait pas constructible. D’ailleurs, nous n’aurions même pas dû écrire que F est un énoncé sans connaître ce qui définissait F.

Peut-être serait-il judicieux de préciser C''' ainsi :

C''' = [**un énoncé est de longueur finie, il contient un nombre fini de mots dont chaque mot contient un nombre fini de lettres, ce qui permet que tout énoncé soit constructible**]

Nous constatons alors que tous les énoncés (aussi bien les énoncés $vrais$ que les $faux$) sont constructibles, et qu’il n’existe pas d’énoncés inconstructibles car cela n’est pas cohérent d’avoir la possibilité d’être “énoncé” (c’est-à-dire d’être “produit” ou “réalisé”) et d’être “inconstructible”. Et donc C''' est $vrai$.

Tout énoncé étant constructible, nous constatons ici aussi que les énoncés C, C' , C'' et C''' sont tous constructibles. Nous l’avons vu, Il y a néanmoins des différences qui permettent de les séparer dans des ensembles distincts. En effet, puisque nous avons identifié la “valeur de vérité” ($vrai$ ou $faux$) de ces énoncés.

C et C' sont $faux$.
C'' et C''' sont $vrais$.
F n’est ni un énoncé, ni constructible, tout cela à cause de l’incohérence de la définition de F.

Nous pouvons remarquer que nous pouvons rapprocher les sens des mots tel que “être construits” avec le mot “exister”. Ils prennet ici un sens très proche.

Digression :

- Nous venons de voir que F n'est ni un énoncé, ni constructible, tout cela à cause de l'incohérence de la définition de F (ce qui fait que le sens de F ne peut pas être réalisé, c'est-à-dire qu'il ne peut pas être défini).

En effet, comme nous l'avon vu, bien qu'elle ne soit pas cohérente, la définition de F est constructible (puisqu'elle est de longueur finie et contient un nombre fini de mots dont chaque mot contient un nombre fini de lettres). Ce qui n'est pas constructible, c'est ce que cette définition propose de construire, c'est-à-dire finalement "**un énoncé de longueur infinie**".

Pour un énoncé, l'infini n'est pas constructible de manière "actuelle", il est en construction permanente (de manière inachevée). Par opposition, le mot "infini" est fini (il contient un nombre fini de lettre et s'étend dans un espace fini) et donc le mot "infini" est constructible.

Donc, la définition de F est constructible, mais pas F. Ce qui permet de conclure que :

[**tout est constructible**] est $faux$.

Et que :

[**tout n'est pas constructible**] est $vrai$,

- De même, nous pouvons observer ceci :

[**Rien est constructible**] est $faux$, puisque nous venons de le construire.

Et

[**Il existe un minimum d'énoncés constructibles**] est $vrai$, puisque nous pouvons construire au moins ces 2 derniers énoncés.

- Pour finir, nous pouvons également voir que :

[**cet énoncé est inconstructible**] est $faux$, puisque nous venons de le construire.

Et que :

[**cet énoncé est constructible**] est $vrai$, puisque nous venons de le construire.

- Pour prendre un exemple, notre imagination nous permet de définir des choses incohérentes (ou des énoncés incohérents) : notre imaginaire est constructible, c'est-à-dire qu'il lui est possible de construire des images incohérentes (ou des énoncés incohérents). Par contre, ce qu'il nous permet d'imaginer n'est pas forcément réalisable tel qu'il le défini.

En d'autres termes, des "images fausses" peuvent être construites dans cet imaginaire, mais ces images ne peuvent pas être réelles, c'est-à-dire qu'elles ne peuvent pas être construites en dehors de cet imaginaire (cela serait incohérents).

Remarquons aussi que si l'imagnaire peut permettre de construire des "images $vraies$" (des images ou énoncés cohérents), alors celles-ci peuvent être construites en dehors de cet imaginaire (elles sont réalisables).

Ce qui permet de dire que : bien que l'imaginaire puisse être le produit du réel, tout ce qu'il serait possible d'imaginer ne serait pas forcément réalisable parce que, dans l'imaginaire, il serait possible de construire en dehors des règles logiques.

14.5 Preuve complète : incomplétude et variable de valeur de vérité indéfinissable

Nous avons vu précédemment qu'il était possible de construire un énoncé *vrai* et *indémontrable*. Nous l'avons noté :

E = [E **est indémontrable**]

Reprenons le raisonnement sur cet énoncé à l'aide des valeurs de vérité.

Supposons maintenant que nous ne sachions pas que E soit *vrai* et *indémontrable*, et que nous désirions commencer une réflexion à ce sujet grâce aux valeurs de vérité.

- Faisons l'hypothèse que E soit *vrai* :

Dans ce cas, nous avons la possibilité de déduire qu'effectivement, E étant *indémontrable* (ce qui correspond au contenu de E), E ne peut être produit par aucun raisonnement cohérent.

Et donc dans ce cas, aucun raisonnement cohérent ne peut produire E.

- Faisons l'hypothèse que E soit $faux$:

Dans ce cas, nous n'avons pas besoin de connaître le contenu de E pour établir qu'aucun raisonnement cohérent ne peut produire E. En effet, un raisonnement cohérent ne peut aboutir qu'à une conclusion *vraie*, pas à une conclusion $fausse$.

Et donc dans ce cas, aucun raisonnement cohérent ne peut produire E non plus.

- Synthèse :

Que l'on suppose que E soit *vrai* ou *faux* ne change pas ce qu'il est permis de déduire à propos de cette réflexion à propos de E :

Lorsque $E =$ [E **est indémontrable**],
peu importe la valeur de vérité de E,
aucun raisonnement cohérent ne peut produire E.

- Réinterprétation :

Nous pouvons même faire le lien de ce cas avec la partie "**12 Correspondances entre formules, valeurs de vérité et énoncés**" (page 345) si nous considérons les énoncés suivants :

$E_1 =$ [**Tout énoncé est démontrable ou indémontrable**]

(tout énoncé doit être constructible : c'est ce que nous avons vu précédemment)

$E_2 =$ [**Il est possible de construire des énoncés démontrables (tel que celui-ci)**]

$E_3 =$ [**Il est possible de construire des énoncés indémontrables (tel que celui-ci)**]

(E_3 est équivalent à l'énoncé E que nous avons abordé)

En considérant dans un premier temps que les valeurs de vérité de ces énoncés ne sont pas connues, il est cependant possible d'établir une table de vérité (en algèbre de *BOOLE* [3], où 0 est équivalent à *faux* et 1 est équivalent à *vrai*) à propos de ces énoncés, étant donné qu'ils sont explicitement liés par la porte logique "*OU*" :

Nous avons $E_1 =$ [**Tout énoncé est démontrable <u>ou</u> indémontrable**]

(table de vérité : page suivante)

table de vérité des énoncés E_1, E_2 et E_3 :

E_3	E_2	$E_1 = E_3 + E_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ce qui peut être représenté par une autre table de vérité en réarrangeant les lignes et les colonnes (sans changer les valeurs de vérité, comme vu dans la partie 12 de ce chapitre) :

E_1	E_2	$E_3 = ?$
0	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Or, dans la sous-partie "**12.6 Variable binaire U de valeur de vérité indéfinissable**" (page 370), nous avions établi que pour exprimer au mieux E_3 uniquement en fonction de E_2 et de E_1, il fallait utiliser une variable de valeur de vérité indéfinissable U (cette variable est binaire et indéterminée : elle ne peut prendre que les 2 valeurs 0 ou 1, et ces valeurs ne peuvent être données que de manière probable). Nous avons donc :

Lorsque $E_2 = 0$:

$E_3 = E_1$

Et lorsque $E_2 = 1$:

$E_3 = U$ (état binaire indéterminé : 0 ou 1)
$E_1 = 1$ seulement : $E_1 = 0$ est interdite dans ce cas, bien que lever cette interdiction ne pose pas de problème quant au résultat de E_3 dans ce cas.

Et donc (toujours en algèbre de *BOOLE*, bien sûr) :

$$E_3 = \overline{E_2}.E_1 + E_2.U$$

Dans un second temps, prenons en compte leur valeur de vérité de ces énoncés tel que nous les avons défini. De manière évidente :

E_1 est exclusivement *vrai* car effectivement [**Tout énoncé est démontrable ou indémontrable**]

E_2 est exclusivement *vrai* car effectivement [**Il est possible de construire des énoncés démontrables (tel que celui-ci)**]

$E_3 =$ [**Il est possible de construire des énoncés indémontrables (tel que celui-ci)**] peut être indifféremment considéré comme étant *vrai* ou *faux* vu la synthèse précédente.

Nous sommes donc bien dans la configuration suivante :

E_1 est exclusivement *vrai* ($E_1 = 1$),
E_2 est exclusivement *vrai* ($E_2 = 1$),

Nous sommes par conséquent dans la configuration où $E_3 = U$ ($E_3 = 0$ ou $E_3 = 1$ indifféremment).

E_3 peut indifféremment être supposé *vrai* ou *faux* (ce qui est d'ailleurs bien le cas vu la synthèse précédente exposée), puisque le raisonnement reste cohérent. Ce qui revient à considérer que les états binaires (0 et 1) de la variable U puissent être superposés. Ceci ne permet de donner à E_3 une valeur de vérité que de manière probable (une comparaison à U qui aurait une interprétation géométrique et physique est donnée dans le **Chapitre VI**).

Ce qui signifie que toute théorie cohérente ne permet pas toujours de donner une formule (tel qu'une formule mathématique binaire comme celles que nous avions vu) correspondant à tous les énoncés constructibles. Une approche de F_3 par des probabilités est donc justifiée, ce qui ne permettra pas de donner la valeur exacte de U mais plutôt un ensemble de valeurs possibles (en l'occurence 0 ou 1).

Quoique nous fassions, nous aurons toujours affaire à un cas comme celui-ci, quelquesoit la théorie employée (c'est-à-dire quelquesoit le raisonnement cohérent employé).

Rappelons que nous avions l'équivalence strictement mathématique avec des formules binaires (voir sous-partie "**12.6 Variable binaire U de valeur de vérité indéfinissable**" page 370) :

Pour $E_1 = E_2 + E_3$ (en algèbre de $BOOLE$), nous avons l'égalité strictement mathématiques :

$$F_1 = F_2 + F_3 - F_2.F_3 = (F_2 - F_3)^2 + F_2.F_3$$

Pour $E_3 = \overline{E_2}.E_1 + E_2.U$ (en algèbre de $BOOLE$), l'égalité strictement mathématiques s'écrit :

$$F_3 = [1 - F_2].F_1 + F_2.U$$

Or, dans notre cas ($E_1 = 1$ et $E_2 = 1$), nous avons :

$$F_1 = 1$$
$$F_2 = 1$$

Ce qui signifie que nous avons également :

$$F_3 = U$$

Ce qui implique qu'il existe toujours au moins un phénomène qui ne peut pas être déterminé par une formule précise. Il est donc toujours possible de trouver au moins un phénomène qui ne puisse pas être formulé de manière exclusivement déterministe.

Théorème de limitation du déterminisme :

Soit les énoncés E_1, E_2 et E_3 tel que :

$$E_1 = E_3 + E_2$$

Ou tel que :

$$E_1 = E_2.E_3$$

L'étude des valeurs de vérité par l'algèbre de *BOOLE* concernant le cas d'un énoncé E_3 non démontrable par toute théorie cohérente amène à conclure que E_3 peut indifféremment être *vrai* ou *faux*. Ce qui est effectivement le cas sans que cela n'amène à une incohérence dans le raisonnement à propos de l'énoncé E_3 auquel est attribué l'une ou l'autre des valeurs de vérité.

Ce qui donne une limite indépassable pour toute théorie cohérente quant à la possibilité de pouvoir déterminer tout phénomène de manière exacte. Parmi l'ensemble de tous les phénomènes possibles, il en existe qui ne peuvent pas être déterminés de manière exacte. Tout ne peut pas être déterminé de manière exacte. Ce qui laisse place à une part de hasard.

Complément de réflexion :

Pour compléter, les énoncés E_1, E_2 et E_3 tels que nous venons de les donner peuvent être réécrits de manière à garder un sens identiques. Pour cela, il nous suffit de rappeler quelques équivalences :

- Pour l'énoncé E_1 :

E_1 = [**Tout énoncé est démontrable ou indémontrable**]

E_1 signifie aussi que tout énoncé est produit par un raisonnement cohérent, ou bien en dehors de tout raisonnement cohérent.

Ce qui est équivalent à cette autre écriture :

E_1 = [**Tout énoncé est produit par un raisonnement cohérent, ou il est produit en dehors de tout raisonnement cohérent**]

(E_1 sous-entend de contenir tous les cas d'énoncés, c'est-à-dire nécessairement constructibles. Cela sous-entend aussi que tout énoncé est constructible soit par un raisonnement cohérent, soit en dehors de tout raisonnement cohérent, mais sans autre possibilité. Pour faire une analogie avec les nombres entiers : si nous "construisons" un nombre à l'aide d'opérateurs mathématiques, soit ce nombre est premier et cela lui permet d'être rattaché à une formule tel que $s(M)$, soit il est composé et cela lui permet aussi d'être rattaché à une formule tel que $s(M)$, mais il n'y a pas d'autre cas possible pour ce nombre si l'on ne considère que la formule $s(M)$)

- Pour l'énoncé E_2 :

E_2 = [**Il est possible de construire des énoncés démontrables (tel que celui-ci)**]

E_2 signifie aussi qu'un énoncé (tel que E_2) ne peut être produit par un raisonnement cohérent.

Ce qui est équivalent à cette autre écriture :

E_2 = [**Il est possible de produire des énoncés (tel que E_2) par un raisonnement cohérent**]

(E_2 sous-entend de contenir tous les cas d'énoncés *démontrables*, et donc tous les cas d'énoncés constructibles par un raisonnement cohérent, provenant de l' "**ENSEMBLE REGLES**")

- Pour l'énoncé E_3 :

E_3 = [**Il est possible de construire des énoncés indémontrables (tel que celui-ci)**]

E_3 signifie aussi qu'un énoncé (tel que E_3) peut être produit en dehors de tout raisonnement cohérent.

Ce qui est équivalent à cette autre écriture :

$E_3 =$ [**Il est possible de produire des énoncés (tel que E_3) en dehors de tout raisonnement cohérent**]

(E_3 sous-entend de contenir tous les cas d'énoncés *indémontrables*, et donc tous les cas d'énoncés constructibles en dehors de tout raisonnement cohérent, provenant de l' "**ENSEMBLE NON-REGLES**")

- Nous avons toujours (en algèbre de $BOOLE$) :

$$E_1 = E_3 + E_2$$

Et donc (toujours en algèbre de $BOOLE$) :

$$E_3 = \overline{E_2}.E_1 + E_2.U$$

Comme nous sommes dans la configuration :

E_1 est $vrai$ ($E_1 = 1$),
E_2 est $vrai$ ($E_2 = 1$),

Nous somme donc également dans la configuration où $E_3 = U$.

Ici non plus, la valeur de vérité de E_3 n'a pas d'importance, puisque de toutes façons, que E_3 soit $vrai$ ou $faux$ implique que E_3 ne peut être produit par un raisonnement cohérent. Nous pouvons même considérer que E_3 peut être en même temps $vrai$ et $faux$, et par extension nous pouvons considérer que la variable U possède simultanément les 2 états 0 et 1. Il est alors dans ce cas autorisé de parler d'états superposés pour la variable U.

Cette réécriture des énoncés (appliquée à l'étude du début de cette sous-partie) permet peut-être de mieux saisir qu'il existe toujours inévitablement un cas où toute théorie (c'est-à-dire tout raisonnement cohérent) ne peut donner d'informations en quantité suffisante pour donner une valeur de vérité précise à E_3. Le cas contraire serait incohérent. Cela est inhérent à toutes théories, et à toute recherche qui voudrait être la plus complète possible, puisque cela provient d'un phénomène réel : il est possible de réaliser E_3.

Autrement dit, il doit toujours exister au moins un phénomène réel qui ne peut pas être expliqué de manière précise (ou peut-être seulement par des probabilités), car le contraire serait incohérent.

Tout savoir sur tout serait incohérent. Tout n'est pas prévisible. Dans un cas comme celui-ci, de tels phénomènes peuvent seulement être constatés.

Raisonnement étendu au paradoxe du menteur :

Le paradoxe du menteur est connu pour révéler un cercle vicieux lorsque nous raisonnons simplement sur la valeur de vérité d'un énoncé donné. Cet énoncé est donné par un menteur qui dit qu'il ments.

C'est-à-dire que le menteur dit : "**Je suis en train de mentir**".

Comment savoir si ce qu'il dit est *vrai* ou $faux$? Comment est-il possible de produire une telle affirmation?

$*$ *Première approche :*

- Dans l'hypothèse où l'énoncé du menteur serait *vrai*, alors l'affirmation nous apprend qu'il est en train de nous mentir, et donc il est en train de dire quelquechose de $faux$. Ce qui contredit l'hypothèse de départ.

- Dans l'hypothèse où l'énoncé du menteur serait $faux$, l'affiramtion "**je suis en train de mentir**" est $fausse$. Le menteur ne peut donc pas être en train de mentir. Or, si nous admettons qu'il ne ment pas, nous admettons nécessairement que ce qu'il dit soit *vrai*. Ce qui contredit également l'hypothèse de départ.

- Nous concluons que ces 2 hypothèses ne nous permettent pas de décider si l'énoncé du menteur est *vrai* ou $faux$.

∗ *Seconde approche :*

Par contre, si nous envisageons les choses sous un autre angle à propos de ce paradoxe, nous allons voir que les choses sont plus compréhensibles. Raisonnons :

- Dans l'hypothèse où l'énoncé du menteur serait *vrai*, ce qu'il dit ne peut provenir d'aucun raisonnement cohérent. En effet, aucun raisonnement cohérent ne peut produire une déduction qui affirme sa propre *fausseté*. Dans ce cas, l'énoncé du menteur ne peut être construit qu'en dehors de tout raisonnement cohérent.

- Dans l'hypothèse où l'énoncé du menteur serait *faux*, ici aussi, ce qu'il dit ne peut provenir d'aucun raisonnement cohérent. En effet, aucun raisonnement cohérent ne permet de produire un énoncé *faux*. Dans ce cas aussi, l'énoncé du menteur ne peut être construit qu'en dehors de tout raisonnement cohérent.

- Nous pouvons conclure plus facilement que dans l'hypothèse que l'énoncé du menteur soit *vrai* ou *faux*, cet énoncé ne peut être construit qu'en dehors de tout raisonnement cohérent. Nous pouvons donc considérer que l'énoncé du menteur est indifféremment *vrai* ou *faux*. Ce qui permet à cet énoncé d'être en dehors de l' "**ENSEMBLE REGLES**" (vu précédemment), c'est-à-dire que cet énoncé est permis par l' "**ENSEMBLE NON-REGLES**".

D'où nous déduisons qu'un menteur qui dit qu'il ment (sans assistance extérieure) ne fait que donner la preuve de sa liberté (en dehors de tout déterminisme).

Dans ce cas aussi, nous pouvons appliquer la variable U pour représenter les 2 états (indifféremment *vrai* ou *faux*) dans lesquels se trouve l'énoncé "**Je suis en train de mentir**". Il est encore possible de considérer que ces 2 états $\{vrai - faux\}$ sont simultanés, ou "superposés".

Remarque importante :

La preuve à propos d'une variable de valeur de vérité indéfinissable n'intervient qu'à un niveau qui peut être considérer comme étant un niveau "binaire" : c'est-à-dire lors de l'étude des valeurs de vérité d'énoncés.

La variable U justifie l'étude de ce phénomène par les probabilités.

Ceci pourra être utile pour le **Chapitre VI** (partie "**23 Représentation géométrique correspondant à la variable** U" , dans lequel est donné un exemple de description grâce à des représentations graphiques. Ce qui permet une approche très intéressante lorsque nous voulons comprendre comment un tel phénomène pourrait se produire de manière physique.

Remarque sur la formule d'Impulsion Seconde :

Cette indifférence à propos de la valeur de vérité (et donc à propos de la forme globale [**énoncé ; valeur de vérité**]) rappelle l'indifférence à propos de l'écriture de la formule d'Impusion Seconde $\mathfrak{I}_2(M)$ (et donc à propos de la forme globale de l'écriture de la formule) vue dans le **chapitre I** en sous-partie "**3.5 Formule d'Impulsion Seconde** $\mathfrak{I}_2(M)$". Nous avons en effet :

$$\mathfrak{I}_2(M) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\mathfrak{I}(M)}} = \frac{1}{\frac{1}{\mathfrak{I}(M)} - 1}$$

Et dont le point de départ de cette formule vient de l'équivalence :

$$\frac{\mathfrak{I}(M)}{\mathfrak{I}(M) - 1} = \frac{\mathfrak{I}(M)}{1 - \mathfrak{I}(M)}$$

Remarque personnelle :

Voici donc ce qui représente pour moi la liberté au plus haut point : bien que le fond soit invariant (E ne peut être produit par aucun raisonnement cohérent), ce fond permet de manière équivalente 2 formes différentes d'expressions possibles (une forme pour l'ensemble "un énoncé supposé *vrai*" ou une autre forme pour l'ensemble "un énoncé supposé $faux$").

La formule logique évoquée ($E_3 = \overline{E_2}.E_1 + E_2.U$) donne des contraintes à l'émergence de la liberté dans un univers qui suit aussi des règles.

Attention : tout ceci nous a permis d'effectuer un constat de l'existence de la liberté, ce qui en fait une preuve, et non une démonstration puisque la réflexion porte sur un énoncé indémontrable. Nous prouvons l'existence de la liberté lorsque nous trouvons un énoncé qui ne peut être conclu ou démontré par aucun raisonnement logique. Autrement dit, nous ne prouvons l'existence de la liberté que lorsque nous parvenons à construire cet énoncé en dehors de tout raisonnement cohérent (et qui provient par conséquent de l' "**ENSEMBLE NON-REGLES**").

Digression 1 :

Il doit exister une forme particulière (des conditions) qui permette de faire émerger de manières significative les effets des non-règles dans un système également soumis à des règles, de la même manière qu'il est possible de construire un énoncé tel que E. En d'autres termes, il serait possible de construire un système libre (c'est-à-dire qui inclus la liberté, le hasard), dans lequel cette liberté préexiste mais dont les effets seraient amplifiés (et visibles de manière notable).

Nous sommes composés de matière, or c'est précisément cette matière qui nous permet de construire des énoncés, d'établir des raisonnements, et d'en tirer des conclusions ou de faire des constatations. Si nous pouvons produire de tels énoncés, C'est que que ce qui permet la liberté est déjà inclus en nous. Peut-être saura-t-on découvrir que certains éléments ou particules de matière ou même la configuration d'un groupe d'éléments permettent l'émergence de la liberté.

Digression 2 :

De plus, pour continuer de faire le lien avec la matière, il est impossible (dans l'état actuel des connaissances) de connaître simultanément et avec exactitude la position spatiale et la vitesse d'une particule. 2 hypothèses peuvent être opposées : soit cela est une propriété de la matière et nous ne pourrons jamais connître ces 2 données simultanément (ce qui serait équivalent aux tables de vérités de ce paragraphe), soit cela ne reflète que notre manque de connaissance de la matière (ce qui serait un équivalent du contre-exemple de la sous-partie "**12.7 Contre-exemple : la formule** $\mathfrak{I}(M)$" page 377).

Or, s'il existe un énoncé tel que E et tel qu'aucun raisonnement cohérent (ou théorie) ne puisse produire (ou formuler de manière précise), il doit exister un phénomène physique équivalent qui reflète la possibilité qu'à l'énoncé E d'être indifféremment *vrai* ou $faux$. C'est-à-dire qu'il doit exister de toutes façons au moins un phénomène physique équivalent qui ne peut être formulé de manière exacte (ou complète).

Cela ne signifie pas pour autant (dans l'état actuel de nos connaissances) que l'incertitude liée à la position spatiale et à la vitesse d'une particule représente ce phénomène, mais cela a au moins le mérite d'en avoir en partie le potentiel.

Mais clairement, la découverte ou la mise en évidence d'un tel phénomène permettrait de l'inclure dans la construction d'un système, ce qui permettrait à ce système de "contenir la liberté" (ou le hasard).

Digression 3 :

Le hasard et la liberté permettraient d'expliquer la diversité des formes d'assemblage de matière de l'univers (ce qui inclu tous les cas d'assemblage, même les êtres vivants).

Suggestion :

Cette réflexion fait également suite à la sous-partie "**14.4 Remarque sur les énoncés constructibles**" (page 396). Nous pourrions tenter une approche psychologique partant de ces reflexions, en supposant que le cerveau est capable de produire ces énoncés tel que ceux que nous voyons dans ce chapitre, et en opposant ce qui est constructible (les énoncés, leur définition, des images) à ce qui ne l'est pas. En supposant que le cerveau soit capable de produire de tels énoncés, alors le cerveau serait un système libre (qui ne peut choisir d'être libre), permettant de construire des énoncés qui proviennent de "**L'ENSEMBLE REGLES**" et d'autres qui proviennent de "**L'ENSEMBLE NON-REGLES**". Nous pourrions mettre en valeur les conflits qui peuvent avoir lieu, notamment lors du traitement d'un énoncé dont on attribuerait une valeur de vérité au hasard (et donc de prendre le risque de se tromper à propos de le cohérence de cet énoncé).

D'autre part, faire une bonne description de soi, c'est accepter qu'elle ne puisse pas être complète. En effet, une personne libre ne peut pas pas uniquement être determinée par un ensemble de règles, puisqu'elle peut en permanence effectuer un choix, y compris lors de cette description (voir lors de son auto-description).

De plus, puisqu'il est possible d'établir un lien entre une onde physique (ceci est une anticipation développée dans le **Chapitre VI**) et la logique du calcul propositionnel "classqiue" grâce aux formules mathématiques $D(N)$, $f(M;x)$, $s(M)$ et $\mathfrak{I}(M)$, cela donne un caractère absolu à ce lien. Si la matière qui compose les êtres sensibles ne faisait que dépendre de formules de ce type (en ce qui concerne "**L'ENSEMBLE REGLES**") mais aussi d'une liberté (permis par "**L'ENSEMBLE NON-REGLES**"), alors cela signifierait que tout être sensible a pour base cette logique de manière intrinsèque. Dans ce cas, il est possible de voir que tout problème psychologique (j'irai peut être même jusqu'à dire toute souffrance, de la plus insignifiante jusqu'à la moins supportable) peut se comprendre comme la différence entre ce qui provient de "**L'ENSEMBLE REGLES**" (immuable) et ce que l'on voudrait que les choses soient. Ces êtres pouvant en effet faire le choix (permis par "**L'ENSEMBLE NON-REGLES**") de vouloir que la réalité soit différente, et donc que la réalité suivent d'autres règles. Ce qui provoque la contradiction (le conflit) entre :

[ce qui est permis par la matière (les règles immuables, "fond" invariant)] et *[le choix que cet être désire atteindre (un choix se réalise sous des "formes" variables)]*

puisque (dans ce cas) ce choix est nécessairement incohérent (bien que possible : il peut l'exprimer par un nombre de mots limités, ce qui rend constructible l'énoncé produit).

Ainsi, toute souffrance pourrait avoir une racine commune. Il deviendrait alors possible de faire de cette approche psychologique une science exacte (physique) pouvant s'appuyer solidement sur une logique ayant pour point de départ la logique qui émerge de la matière (plus précisément grâce au lien entre les ondes des photons et la logique binaire).

Pour finir, il est convenable d'exprimer le fait que dans le cas où cette approche psychologique serait correcte, nous devons absolument remarquer que si cet être accepte la réalité (les règles et les libertés permises par la matière) telle qu'elle est, cela lui permet d'être en cohérence avec la réalité et donc ne pas avoir de problème psychologique.

Pour tout être sensible connaissant des souffrances de niveaux variables, il conviendrait donc dans un premier temps d'accepter la réalité telle qu'elle est par ses propres moyens. Souvent, lorsqu' "une logique" (celle que l'être sensible pense être la bonne) est poussée à son extrême, elle permet de révéler naturellement ses propres contradictions (les exemples ont été donné dans le cas des énoncés qui font référence à eux-mêmes), ce qui devrait finalement apparaître clairement à la conscience de cet être. Il convient également dans un deuxième temps de rester dans cet état stable en veillant à toujours se rappeler du raisonnement utile à l'émergence d'une telle prise de conscience (en faisant le choix de se rappeler). Cette attitude permettant de garder un contact fiable avec la réalité, étant donné qu'un être sensible n'a pas nécessairement une conscience claire des règles que peut suivre la matière qui le compose, et donc n'a pas clairement conscience des incohérences auxquels ses propres choix ont le potentiel de le confronter. Ce qui invite l'être sensible qui désire s'affranchir de problème psychologique à faire le choix de la réflexion comme premier choix avant toutes nouvelles décisions.

Parallèlement à cette réflexion, il me semble important de compléter par un autre point de vue. Il s'agit d'un cas particulier concernant les choix d'un être libre ayant un problème psychologique. S'il devait exister une solution à ce problème, le refus de sa part (par simple choix) de s'impliquer vers la connaissance de cette solution l'empêche nécessairement de résoudre ce problème. Plus généralement, le refus d'implication vers cette connaissance empêche l'acquisition d'informations. On ne peut jamais forcer un être à résoudre ses propres problèmes (car s'il était effectivement forcé, il ne serait plus libre, ce qui provoquerait un autre problème), dans le meilleur des cas, on ne peut que lui montrer les conséquences de ce refus (en acceptant que le refus de sa part puisse être réitéré, ou même systématique).

14.6 Justification de la variable binaire U de valeur de vérité indéfinissable

Etant donné la sous-partie précédente (“**Preuve complète : incomplétude et variable de valeur de vérité indéfinissable**” page 401) et le “**Théorème de limitation du déterminisme**”, pour $E_1 = E_2 + E_3$ (en algèbre de *BOOLE* [3]) avec :

E_1 = [**Tout énoncé est démontrable ou indémontrable**]

E_2 = [**Il est possible de construire des énoncés démontrables (tel que celui-ci)**]

E_3 = [**Il est possible de construire des énoncés indémontrables (tel que celui-ci)**]

Et avec :

F_1 une formule mathématique binaire (ne pouvant prendre pour valeur que 0 ou 1) permettant d'attribuer une valeur de vérité à l'énoncé E_1;

F_2 une formule mathématique binaire permettant d'attribuer une valeur de vérité à l'énoncé E_2;

F_3 une formule mathématique binaire permettant d'attribuer une valeur de vérité à l'énoncé E_3.

Dans le cas où $E_1 = 1$ et $E_2 = 1$, nous avons :

$F_1 = 1$
$F_2 = 1$

Nous avons conclu que nous avions également :

$F_3 = U$

En Rappelant que U peut valoir 0 ou 1 (valeur non prédictible), et qu'il est même possible de considérer que ces 2 valeurs sont superposées.

Ce qui implique qu'il existe toujours au moins un phénomène qui ne peut pas être déterminé par une formule précise. Ce phénomène au moins ne peut pas être formulé de manière exclusivement déterministe.

Comme la valeur de $F3$ ne peut jamais être donnée de manière précise dans le cas où $E_3 =$ [**Il est possible de construire des énoncés indémontrables (tel que celui-ci)**], ceci justifie implicitement l'utilisation d'une variable binaire U de valeur de vérité indéfinissable.

14.7 Etendue

Cette réflexion vient compléter les réflexions faites dans toutes les sous-parties de la partie "**14 Preuve de la liberté**" (page 390) que nous venons d'aborder jusqu'ici.

Nous avons vu dans le raisonnement de les sous-parties "**14.1 Première approche**" (page 391) et "**14.5 Preuve complète : incomplétude et variable de valeur de vérité indéfinissable**" (page 401) que nous pouvions rencontrer le cas où un énoncé peut être constructible en dehors de toute règle logique. cela signifie qu'il ne peut exister aucun processus uniquement déterministe (où une cause unique produit un effet unique) qui permette de faire émerger cet énoncé. Ce qui signifie encore que la liberté préexiste dans ce système, c'est-à-dire qu'elle fait déjà partie de ce système, au même titre que les règles logiques qui détermine ce système.

Un système qui peut générer un tel énoncé donne la preuve de sa liberté.

Maintenant, si nous considérons ce système libre, il devient possible pour celui-ci de construire un autre système libre, dans le sens où ce nouveau système serait construit de manière à contenir des règles logiques mais aussi une capacité à donner des énoncer en dehors de ces règles. De la même manière, pour ce nouveau système, il n'aura pas non plus la possibilité de de choisir de devenir libre, et la liberté qui pourrait en émerger préexistait.

S'il est possible d'agencer des éléments pour construire des énoncés non issus de règles logiques, comment pourrait être construit un tel énoncé, ou même un tel système si le "hasard" (les "non-règles") ne préexiste pas dans les parties qui constituent ce système ?

Les règles déterministes et le hasard coexistent ainsi : la liberté est là où ne peut pas être le détermininsme, et le détermininsme est là où ne peut pas être la liberté.

Complément de réflexion 1 :

Nous pouvons constater que les règles de logique (tel qu'un raisonnement cohérent) peuvent s'appliquer à cet énoncé E une fois celui-ci construit (on pourrait même dire de ce cas qu'il faut bien qu'il existe des choses en dehors des règles logiques pour que les règles logiques puissent être aplliquées à quelquechose).

Il est donc possible de construire quelquechose en dehors du cadre des règles logiques : quelquechose de vrai et d'indémontrable (voir la partie 13), ou quelquechose de faux (voir la partie 12). A partir de "**L'ENSEMBLE NON-REGLES**", un sytème pourrait réaliser un choix en produisant un énoncé vrai et indémontrable ou en produisant un énoncé faux.

La notion de "potentiel" pour un système pourrait alors avoir un sens, un "potentiel" qui représenterait les constructions possibles (réalisables) d'un énoncé ou d'un autre (qu'il soit $vrai$ ou $faux$).

Complément de réflexion 2 :

Nous ne pouvons pas faire l'économie de la réflexion sur ce sujet par exemple en affirmant que l'énoncé E n'est qu'une erreur. En effet, la réalité de cet énoncé est bien là puisqu'il peut être construit. S'il était une erreur, cela signifie qu'une erreur peut être produite, et elle peut être produite également en dehors de toute règle logique. Ce qui nous ramènerait immédiatement à cette réflexion que nous venons d'établir : comment une système de règles logiques et cohérentes pourrait permettre de produire une erreur ?

Voici donc les signes de la liberté ou du hasard (ce que j'appelle aussi "non-règles") : "l'indémontrabilité", l'incohérence, l'erreur, ... Et en fait, tout ce qui permet de construire en dehors du cadre des règles logiques. Le hasard est le complément indispensable au déterminisme, le complément qui manque pour pouvoir reconstituer ce monde de manière compréhensible et réaliste.

Digression 1 :

Même si nous évoquions un Dieu pour intervenir dans cette affaire, nous pourrions le remettre en cause directement en lui appliquant ce raisonnement, c'est-à-dire qu'il n'a pas non plus la possibilité de choisir de devenir libre. La liberté lui préexiste. Ou alors ce Dieu là n'aurait pas de sens du point de vue de la cohérence. S'il devait exister un Dieu, ce serait un Dieu soumis aux mêmes règles et liberté que ces systèmes précédemment cités. Et donc soit il serait confondu avec ces systèmes, soit il serait les règles et la liberté de ces systèmes.

D'autre part, si Dieu était confondu avec toutes choses (l'univers) ou même seulement avec un ensemble de choses ou d'idées, alors il serait simplement équivalent à l'ensemble de ces choses, et nous pourrions presque écrire "Dieu = Univers" ou "Dieu = l'ensemble des choses (ou idées) qui le compose".

Digression 2 :

La "Digression 1" ne tranche pas sur l'existence ou non d'un Dieu, car pour raisonner sur ce point, il faudrait définir Dieu. Par contre, en lui attribuant des propriétés, il devient possible d'établir un raisonnement cohérent et de déduire au moins ses limites (par exemple les limites de sa liberté, comme vu dans la digression précédente). Pour répondre à cette question, tout dépend de la définition de Dieu et des capacités qu'on lui attribue.

(voir le passage "**Elément de réponse partielle sur la question de Dieu**" en fin de partie "**16 Preuve de l'existence éternelle**" page 429)

14.8 Dissociation des notions de liberté et de hasard

Il convient maintenant de dissocier les 2 notions que sont celles de liberté et et de hasard.

En effet :

- La notion de liberté serait plutôt à associer aux être conscients d'eux-même (avec un niveau de conscience plus ou moins élevé) et auxquels des règles cohérentes et exclusivement déteministes ne suffisent pas à leur description. C'est-à-dire lorsque ce phénomène participe à un phénomène de conscience de soi.

- Alors que la notion de hasard serait plutôt à associer à des objets non conscients et auxquels des règles cohérentes et exclusivement déteministes ne suffisent pas à leur description. C'est-à-dire lorsque ce phénomène participe à un phénomène ne faisant pas intervenir la conscience.

Remarque 1 :

Un exemple de représentation graphique permettant une interprétation de l'émergence de cette liberté ou hasard est donnée dans le **Chapitre VI** (partie "**23 Représentation géométrique correspondant à la variable** U").

Remarque 2 :

Cette remarque est elle aussi à lier à la réflexion du **Chapitre VI** (partie "**23 Représentation géométrique correspondant à la variable** U").

Bien que j'adhère à prendre beaucoup de précautions concernant ce domaine (par anticipation), nous pouvons émettre l'hypothèse que la mise en évidence d'un tel phénomène pourrait permettre le développement de robots vers plus d'autonomie. Cependant, ceci pourrait aussi nous confronter au débat de leur statut au sein d'une société humaine dont ils seraient issus, ce qui serait légitime. Nous devrons avoir au moins le respect de nos créations, et si ce n'était pas le cas, ne pas les réaliser.

Cependant, de par cette hypothèse, il nous est possible de concevoir plusieurs possibilités (qui peuvent d'ailleurs être simultanées) : nous pourrions doter ces robots d'un niveau de conscience plus ou moins élevé, ou nous pourrions les doter de degrés de liberté plus ou moins élevé, en veillant à ce que les uns n'aient pas systématiquement la possibilité d'interagir avec les autres (par une communication directe ou même en réseau), afin d'éviter une évolution non-maîtrisée. De plus, ces robots seraient alors capables de faire des choix au hasard (sans réflexion préalable, ni estimation des conséquences), ils seraient alors aussi capables de comettre des erreurs (sans en avoir conscience) qui pourraient devenir nuisibles, ce qui doit nous renvoyer à la réflexion de la phrase précédente.

Mais à ce stade, et j'en ai bien conscience, tout ceci peut paraître comme étant de la pure fiction, étant donné que la réflexion porte sur une hypothèse, qui n'est pas une réalité au jour où j'écris ces lignes. Il nous faudrait pour cela au moins une théorie physique de la psychologie, qui incluerait une part de déterminisme et une part de choix (sur lequel ce déterminisme n'a pas d'emprise). Cette conception du choix qui peut amener un être à construire des formes d'énoncés cohérents ou incohérents pourrait nous permettre de révéler ce qui fait la richesse des émotions. Chaque choix "incohérent" devant mener à une émotion unique (voir à un changement d'émotion vers une émotion unique, émotion unique qui peut même être vue comme la synthèse d'une suite de choix), chaque choix cohérent devant ramener vers une stabilité (les émotions s'atténuent lorsque l'incohérence d'un choix est remise en cause).

Pour ma part, et vu la description faite dans le **Chapitre VI** que nous aborderons, il me semble que la moindre partie de cette univers, disons chaque particule et même la moindre, doive contenir ce phénomène. Il me semble en effet que ce phénomène doit être très répandu et même très commun. Il me semble aussi que nous ne pouvons pas intervenir sur ce phénomène (nous avons vu en sous-partie "**14.2 Limites préalables**", page 393, que la liberté préexiste dans un sytème sans qu'il soit possible d'en décider autrement), mais plutôt le révéler et le mettre en évidence de manière notable.

Nous devons tout de même poursuivre la réflexion dans les sous-parties qui suivent avant de passer au chapitre suivant.

15

La conception du discontinu

15.1 Approche par les formules

Cette partie fait suite à la partie "**4 Remarques : formule $D(N)$ et phénomènes physiques associés**" du **Chapitre I**.

- Si nous considérerons les formules que nous avons vu dans le **Chapitre I** (notamment la formule $D(N)$ de décomposition d'un nombre entier en produit de facteurs premiers, ou même la formule $f(M;x)$, la formule $s(M)$ et la formule $\mathfrak{I}(M)$) et si nous nous proposons d'étudier des phénomènes liés aux ondes (ce qui implique les longueurs d'onde et donc les fréquences et les périodes), ces formules n'étant définies que pour des variables qui prennent des valeurs entières, alors force est de constater que l'espace et le temps ne peuvent être considérés que comme étant discontinus (au regard du domaine de définition de ces formules).

- En d'autres termes, prenons l'exemple de la formule s(M). Cette formule étant définie seulement pour tout $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 2$ (c'est-à-dire seulement si M vaut un nombre entier supérieure ou égale à 2).

Si nous nous proposons d'étudier les ondes d'un système (par exemple les ondes des photons qui composent la lumière) à l'aide de cette formule, en associant M à une variable de longueur d'onde (la longueur d'onde est liée à la fréquence), alors nous devrons nous restreindre aux longueurs d'ondes qui correspondent à des longueurs d'ondes entières.

Cette formule ne nous permet pas de traiter des longueurs d'ondes intermédiaires à ces longueurs d'ondes entières.

Cette formule ne permet pas de considérer que les longueurs d'ondes que l'on mesure puissent être continues. Et donc, cette formule, comme les autres évoquées au début de cette sous-partie, implique de traiter les longueurs d'ondes par la discontinuité.

De plus, il faut remarquer que dans ce cas, une longueur d'onde atteint un minimum (décomposable) qui se trouve correspondre à $M = 2$.

- D'autre part, traiter les longueurs d'ondes par la discontinuité implique directement de traiter la période par la discontinuité. En effet, puisque la période (temps) est l'inverse de la fréquence (qui est liée à la longueur d'onde par la formule suivante). Par exemple pour un photon, étant donné la formule :

$f = c/\lambda$ avec :

λ la longueur d'onde,
f la fréquence corresondante,
c la vitesse de la lumière (qui est la vitesse d'un photon).

Pour reprendre l'exemple du photon, l'existence d'une longueur d'onde minimum implique l'existence d'une fréquence maximum, et donc d'une période minimum. Il est donc justifié de parler d'instants (même si cela peut paraître abstrait).

De plus, l'existence d'une période minimum permet d'étendre le raisonnement à tous les phénomènes cycliques (incluant la fréquence angulaire).

- Pour compléter, traiter le temps par la discontinuité implique directement de traiter le mouvement par la discontinuité, puisque le mouvement dépend directement du temps. Mais comme le mouvement dépend aussi de l'espace, cela implique aussi directement la discontinuité de l'espace. A l'aide de telles formules, nous ne pourrons obtenir des mesures qu'à des points précis dans un espace. Il est donc justifié de parler de points (même si cela peut paraître abstrait).

Pour reprendre l'exemple du photon, l'existence d'une longueur d'onde minimum exprime bien une distance minimum dans l'espace.

- Pour finir, toutes grandeurs physiques dont les formules font intervenir des variables de temps ou d'espace ne permettrait de donner que des résultats dont les valeurs accessibles seraient nécessairement discontinues ou "quantifiées".

Conclusion :

Ces formules ne permettent de concevoir le temps et l'espace que comme étant discontinus, ainsi que les grandeurs qui ont un lien direct avec le temps ou l'espace.

Ces points de vue nous feraient plutôt suggérer de prendre position en faveur de la "**Théorie de la gravitation quantique à boucles**" (ou "***Loop quantum gravity***)".

Avis personnel :

De ce point de vue, j'aurais du mal à adhérer à une théorie comme la "**Théorie des cordes**" puisque celle-ci conçoit la continuité des cordes. J'ai bien conscience que cela peut permettre une bonne approche des états vibratoires d'une particule, mais à mon sens pas de donner une description complètement exacte de la réalité. Par contre, si ces cordes étaient discontinues et donc constituées uniquement de point situés à un minimum de distance les uns des autres (même s'ils ne s'agissait que de points positionnés sur ces cordes), cela deviendrait plus intéressant. J'aurais ainsi plutôt tendance à m'intéresser à la "**Théorie de la gravitation quantique à boucles**", dont la conception (espace et temps discontinus) est plus proche de la mienne.

Digression :

Nous pouvons nous demander quel est la place des nombres réels (en mathématiques) et des nombre transcendants dans une conception des choses invoquant la discontinuité.

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, les énoncés sont constructibles. La définition d'un énoncé est elle aussi constructible, bien qu'une définition ne permette pas systématiquement de construire un énoncé (exemple de la définition de F vue en sous-partie "**14.4 Remarque sur les énoncés constructibles**" page 396).

Par contre une définition qui est constructible (c'est-à-dire qu'elle comporte un nombres fini de mots, qui contiennent un nombre fini de lettres, et qui est écrite dans un espace fini) peut donner des instructions de manière à produire un énoncé constructible, ou de manière à ne jamais permettre d'achever l'écriture de ce qu'elle défini (nous somme dans le cas où ce qui est défini est inconstructible).

Par exemple, dans le cas des nombres transcendants. Le nombre π ne peut jamais être donné de manière achevée et finie. Pourtant, il existe des formules contenant un nombre fini de symboles permettant de le définir. Cependant, son calcul ne peut jamais s'achever.

Par comparaison ou analogie dans ce cas, nous pourrions dire qu'une définition similaire à la formule de π est constructible (elle contient un nombre fini de symboles), mais ce que la définition propose d'atteindre ne peut jamais l'être de manière "actuelle", ou ne peut jamais "être fini de construire" (similitude avec le nombre π).

Pour continuer la comparaison avec "ce qui est défini", d'après ce que nous avons vu dans la partie précédente, π ne serait pas un nombre constructible (c'est-à-dire que π ne peut pas être donné en un temps fini : sa construction nécessitant le calcul d'un nombre infini de chiffres).

Autrement dit, la formule définissant π est constructible mais π n'est pas constructible. Il devient alors convenable d'en avoir seulement une approximation.

15.2 Approche par un paradoxe connu de la Grèce antique

Une autre approche au sujet de la continuité ou discontinuité de l'espace et du temps peut être faite par l'observation des arguments avancés par *Zénon d'Elée* [9] (né entre 490 et 485 avant *Jésus-Christ*) à propos des "paradoxes" sur la notion de mouvement.

Zénon prétendait que la notion de mouvement était paradoxale grâce à des exemples.

Prenons un des exemples avancés par *Zénon*. Comme lui, réfléchissons sur la situation "d'Achille et la tortue". La situation est la suivante :

- On suppose que l'espace et le temps sont continus.

- On veut faire courir Achille contre une tortue.

- On sait qu'Achille court plus vite que la tortue.

- On laisse prendre de l'avance à la tortue qui ne sarrête pas.

- Au bout d'un temps raisonnable, on demande à Achille de dépasser la tortue (entendons par "temps raisonnable" que ce qu'on demande à Achille est réalisable).

L'argument de *Zénon* est alors le suivant :

- Depuis l'instant son départ jusqu'au départ d'Achille, la tortue a parcouru une distance D.

- Lorsque Achille arrivera à la moitié de la distance qui le sépare à ce moment là de la tortue, la tortue aura encore parcouru une petite distance.

- Lorsque Achille arrivera à la moitié de cette nouvelle distance qui le sépare à ce moment là de la tortue, la tortue aura encore parcouru une autre petite distance.

- Lorsque Achille arrivera à la moitié de cette nouvelle autre distance qui le sépare à ce moment là de la tortue, la tortue aura encore parcouru une faible distance.

- Et ainsi de suite : nous pouvons répéter cette observation une infinité de fois.

D'où *Zénon* conclu que comme Achille arrive à dépasser effectivement la tortue (il suffit de les faire courir l'un contre l'autre pour s'en rendre compte), le raisonnement et l'expérience ne permetant pas de conclure la même chose, la notion de mouvement doit être paradoxale.

Le problème vient du fait que dans cet exemple, la continuité du temps ou de l'espace n'est pas remise en cause. En effet, si nous supposons que le temps ou l'espace est discontinu et avec le même exemple, la conclusion du raisonnement peut être en accord avec la réalité.

En effet, si le temps s'écoule de manière discontinue ou si l'espace ne peut être parcouru que de manière discontinue, alors on ne peut diviser de moitié (comme précédemment) le temps ou l'espace de manière infinie, ce qui lève le paradoxe à propos de la notion de mouvement (dans le cas où le temps et l'espace sont continus). Ceci implique d'admettre qu'il existe un minimum de durée (pour le temps) et un minimum de longueur (pour l'espace).

16

Preuve de l'existence éternelle

Si le mot "**RIEN**" peut être défini comme "l'absence de toute chose" , alors le mot "**RIEN**" signifie aussi l'absence d'un mot pour le nommer et l'absence de sa définition. Et finalement, "**RIEN**" ne pourrait être exprimé.

Or, ce n'est pas le cas ici, étant donné que nous venons de l'exprimer.

Donc "**RIEN**" devrait être défini comme "**la présence du moins possible de chose**". Entendons par "**du moins possible**" au moins d'un nom et d'une définition.

Il ne peut y avoir "**RIEN**" dans le sens de "**l'absence de toute chose**", il ne peut donc qu'exister un minimum de chose(s), c'est-à-dire au moins les idées de nom et de définition de ce mot.

Ce raisonnement étant valable à tout instant, l'existence de ce minimum de chose est en dehors du temps. Autrement dit : ce raisonnement étant valable à tout instant, l'existence ne dépend pas du temps, ou encore l'existence ne varie pas en fonction du temps.

D'où l'éternité de l'existence (c'est-à-dire de l'existence d'un minimum d'idées au moins).

Complément de réflexion :

Vouloir définir "**l'absence de toute chose**" (ou même "**le vide total**") est donc incohérent. Le problème qui se pose à côté de cette réflexion est de se demander s'il ne faudrait pas modifier toutes les définitions incohérentes du langage... Soit en rajoutant dans la définition concernée qu'elle est incohérente, soit en la modifiant de manière à la rendre uniquement cohérente. On ne peut pas simplement considérer que la définition soit "valable" indépendemment d'un raisonnement cohérent, alors qu'un tel raisonnement peut la rendre "non valable".

D'autre part, si nous reprenons l'exemple des "règles logiques" vu en partie 13, rappelons que nous avions déduit :

$A' =$ [**il existe un minimum de règles logiques dont** A' **fait partie**]

Cette règle (comme d'autres énoncés cohérents) doit être valable à tout instant pour rester cohérente, l'existence de ce minimum de règle est donc en dehors du temps lui aussi. Ce qui permet de conclure qu'il existe un minimum de règles immuables (au moins A'), c'est-à-dire qui ne peuvent varier au cours du temps (puisqu'elles sont en dehors du temps).

Digression 1 :

Nous pouvons constater que les énoncés dont la structure est du type :

[**Rien (suivit du reste de l'énoncé)**]

Nous amène presque systématiquement à conclure une structure du type :

[**il existe un minimum de (suivit du reste de l'énoncé)**]

Même en modifiant la définition du mot "**RIEN**", tel que "**RIEN, c'est au moins la présence d'un minimum de chose**" , nous aboutissons toujours à la même conclusion. C'est-à-dire que nous aboutissons à :

[**il existe un minimum de (suivit du reste de l'énoncé)**]

C'est souvent l'auto-référencement d'un énoncé (c'est-à-dire le fait qu'un énoncé fasse référence à lui-même, directement ou indirectement) qui permet d'en déduire la cohérence ou l'incohérence. En effet, si l'énoncé en question affirme des propriétés à propos d'un ensemble et si cette énoncé peut être inclu de manière cohérente dans cet ensemble, alors cet énoncé est cohérent.

Digression 2 :

A la question : "Pourquoi y a-t-il quelquechose plutôt que rien ?",

Etant donné qu'il doit y avoir quelquechose plutôt que rien à tout instant, il serait cohérent de répondre :

"Parce que rien en tant qu'absence toute chose n'a pas de sens".

Digression 3 :

Quel sens doit être donné au nombre 0 en mathématiques si 0 si l'on considère que 0 est équivalent au mot "**RIEN**" ?

Nous avons vu que "**RIEN**", ce n'était pas l'absence toute chose. Donc 0 ne peut être l'absence de toute chose. en effet, 0 aussi possède au moins un nom, un symbole et une définition. Comme il faut de la matière pour écrire ou penser ce nombre, 0 est le minimum de matière nécessaire à sa formulation. 0 prend donc une forme particulière, au même titre que les autres nombres. Disons encore que 0 est la forme particulière d'un minimum de matière permettant son expression.

Pour finir, lorsque l'on dénombre les choses qui ont la même forme, 0 exprime l'absence de chose de la forme particulière que l'on veut dénombrer parmi l'ensemble des formes qui existent. 0 est donc le minimum de chose qui permet d'effectuer un constat.

Digression 4 :

De plus et par conséquent, comme l'existence ne varie pas en fonction du temps, cela signifie que l'existence ne peut pas être exprimée en fonction d'un début dans le temps ni en fonction d'une fin dans le temps. Clairement : il n'est pas cohérent de prétendre que l'univers a commencé à un instant donné et se terminera à un autre instant.

Il ne peut donc pas être cohérent de parler d'origine de l'univers ou même d'un "big bang" , sauf si l'on considère qu'un évènement de ce type ne peut être qu'une étape dans le déroulement du temps.

A ce propos, je tiens à signaler qu'un autre cas d'évolution de l'univers en envisageable. Ce raisonnement n'étant fondé que sur des remarques expérimentales et sur l'acceptation logique de l'existence éternelle, la conclusion ne sera qu'une hypothèse.

L'univers est en expansion accélérée. Par conséquent, la densité de matière dans l'espace diminue. Dans ce cas, la matière a tendance à émettre plus d'énergie qu'elle n'en absorbe, et donc la quantité d'énergie (ou de photons) contenue dans la matière dinimue. Par extrapolation dans le temps, il devient possible d'imaginer la situation où toute la matière de l'univers aurait émis toute l'énergie qu'elle contenait. Il n'y aurait plus dans l'espace que des photons. A ce moment précis, l'univers a terminé un cycle d'évolution et peut en démarrer un suivant avec des conditions initiales ressemblant à celles du "big bang". Dans ce cas, le "big bang" n'est qu'une étape qui ne représente que le commencement d'un nouveau cycle d'évolution de l'univers sous la forme d'une expansion. Ajoutons une remarque sur la fin de l'évolution d'un de ces cycles. Il est possible d'émettre l'hypothèse que la densité de photons dans l'espace doit au moins atteindre une moyenne afin de permettre le passage au cycle suivant, ou encore que chaque photon soit dans un étant vibratoire identique dont l'amplitude serait maximum. Ce qui permet de "changer d'échelle" sans que cela puisse être perceptible, puisque les règles à propos du minimum de temps, de distance, le minimum d'invariance des règles seraient toujours les mêmes.

Une hypothèse serait donc que l'évolution de l'univers soit cyclique, et que l'évolution ne se fasse exclusivement que par une diminution de densité de matière (et d'énergie) dans l'espace. Une fois la densité nécessaire atteinte ou l'état vibratoire de chaque photon identique et d'amplitude maximum, un nouveau cycle commence.

Mais ceci n'est qu'une hypothèse, ce qui ne signifie même pas qu'il faille systématiquement y adhérer. Elle est simplement destinée à faire remarquer qu'il est encore possible d'émettre d'autres hypothèses.

Eléments de réponse sur la question de Dieu :

Je me risque à cette réflexion, en me présentant simplement comme une personne ouverte d'esprit, sans préjugé et qui s'attend à toutes possibilités de réponse. Car le but n'est pas ici de choquer mais plutôt de faire une expérience de pensée, simplement parce qu'il est possible de la faire, de manière calme et posée. Ces réflexions n'engageant, de toutes fonçons, que moi. Je préviens par avance que comme à mon habitude, le style de cette réflexion sera plutôt direct. Alors seulement si vous le voulez bien, je vous proposerai de me suivre (et personne n'y est forcé). Essayons de mener une réflexion cohérente sur ce sujet.

Dieu peut-il être le créateur de tout ?

Si "Dieu est le créateur de tout" , il est aussi le créateur de lui-même. Ce qui sous-entend directement qu'avant lui et le reste de sa création, il n'existait rien : en effet, puisque de manière équivalente, l'énoncé affirme qu'il est à l'origine de toute chose (et y compris de lui-même).

Nous avons vu que "**RIEN**" , ce n'était pas l'absence toute chose. Il ne peut donc jamais y avoir une absence totale de chose, cela n'aurait pas de sens du point de vue de la cohérence. Ce qui implique qu'aucune force, aussi grande et si divine soit elle ne puisse être à l'origine de sa propre existence. Les choses sont et ont toujours été (mais certainement sous des formes différentes au vu de l'évolution de l'univers), sans qu'une force n'aie à intervenir pour cela.

"**RIEN**", ce n'est pas l'absence toute chose : la création (sous-entendu l'existence d'un créateur) est une hypothèse *fausse* si nous considèrons ce raisonnement cohérent.

"**RIEN**", ce n'est pas l'absence toute chose. Et ceci est valable à tout instant, mais comme ceci reste valable en dehors du temps, ceci n'empêche pas de supposer que le temps puisse être ou puisse avoir été "quasiment figé" (sous-entendu pas "complètement figé", et donc finalement pas "figé", mais plutôt ralenti).

Enfin, qu'en serait-il d'un Dieu qui serait défini par l'infini ? C'est-à-dire Dieu est-il "infini" ? La définition de ce Dieu serait bien constructible, mais ce Dieu "lui-même" ne pourrait être "constructible" , et donc inachevé (réflexion faite en partie "**14.4 Remarque sur les énoncés constructibles**" page 396).

Si la “définition” de Dieu n’était pas constructible non plus, sous-entendu il y aurait une définition de la “définition de Dieu” de manière à ce que la première soit constructible mais pas la seconde, alors il serait impossible d’établir un raisonnement cohérent à propos de cette seconde “définition” puisque nous ne pourrions jamais connaître l’intégralité de son contenu. Et donc nous ne pourrions jamais connaître le sens de cette “définition”. Si bien qu’il serait finalement impossible de savoir si croire en l’existence de Dieu est fondé ou non, et finalement, du point de vue de la cohérence d’un raisonnement, il ne serait pas possible pour nous de donner un argument cohérent “pour ou contre” sur ce sujet. Cette position s’apparenterait presque au scepticisme, à ceci près que dans notre cas, on refuse d’affirmer ou de nier l’existence de Dieu car on sait que cela ne serait pas raisonnable.

Mais il resterait tout de même possible de raisonner sur la première définition constructible. Et si cela pouvait être possible du point de vue de la cohérence, il resterait à trouver une définition de Dieu qui puisse être “correcte”.

Observation finale :

Cette réflexion n’a pas pour but d’affirmer ni de nier l’existence d’un Dieu, mais plutôt d’anticiper que dans l’hypothèse de son existence, il serait raisonnable que les propriétés que l’on attribue à Dieu incluent ces limites :

- Il ne peut pas être créateur,

- S’il est infini, il est impossible de donner raisonnablement un argument pour ou contre son existence, sauf peut-être s’il n’est pas infini...

- D’autre part, si Dieu était confondu avec toutes choses, il serait simplement équivalent à l’ensemble de ces choses, et nous aurions “Dieu = Univers”. Et si Dieu n’était qu’un ensemble de choses ou d’idées, nous aurions “Dieu = l’ensemble des choses ou idées qui le compose”. De plus, dans ce dernier cas, si cet ensemble était fini, alors Dieu serait constructible.

Ajoutons aussi que dans l’hypothèse où Dieu est infini et dans l’hypothèse où l’univers est infini (en quantité de matière), Dieu n’est ni plus ni moins que l’univers lui-même. D’où l’on déduirait que “Dieu = Univers”.

Pour conclure, dans le cas où “Dieu = Univers” (comme dans le cas où “Dieu = l’ensemble des choses ou idées qui le compose”), parler de Dieu ou parler de l’univers (respectivement parler de l’ensemble des choses ou idées qui le compose) reviendrait à parler de la même chose. Et si l’univers (ou respectivement un ensemble de choses ou d’idées) était connaissable (ne serait-ce même que partiellement), alors Dieu le serait également (ne serait-ce même que partiellement, ici aussi).

17

Possibilité d'établir une théorie physique

A ce stade de la réflexion, il me semble qu'une théorie qui reflèterait au mieux la réalité (les règles, les non-règles, les situations constructibles, la discontinuité) tiendrait compte des conclusions de l'étude d'au moins des 4 premiers chapitres et d'au moins des 5 premières parties de ce chapitre.

Ce qui sous-entend qu'il deviendrait possible de commencer une théorie physique à partir des conclusions des **Chapitres I** à **V** :

- La formule de décomposition $D(N)$ d'un nombre entier N en produit de facteurs premiers, démontrée dans le **Chapitre I**.

- La formule $D(N)$ (**Chapitre I**) appliquée aux longueurs d'onde des photons (**Chapitre V**), ce qui sous-entend qu'une longueur d'onde N peut être décomposée en longueurs d'ondes plus simples (ou fondamentales) et que ces longueurs d'onde prennent nécessairement des valeurs qui peuvent être ramenées à des nombre entiers.

- La formule $D(N)$ également appliquée aux périodes des ondes des photons (**Chapitre V**), ce qui sous-entend qu'une période N peut être décomposée en périodes plus simples (ou fondamentales) et que ces périodes prennent nécessairement des valeurs qui peuvent être ramenées à des nombre entiers.

- La formule simplifiée $s(M)$, doù peuvent découler des formules légèrement différentes tels que $s(2.M + 3)$, $s(2.M + 5)$, $s(3.M + 2)$, $s(5.M + 2)$, ... et dont chaque graphique peut présenter des analogies avec ceux des spectres de lumière (pour chacune de ces formules et pour M une longueur d'onde, le graphique correspondant s'apparente à des raies spectrales).

- Les liens possibles entre les ondes et la logique binaire (**Chapitre I** et **Chapitre V**), et donc l'implication des nombres entiers et des nombres premiers dans la logique binaire se manifestant par les phénomènes ondulatoires.

- La possibilité de former toutes les propositions du calcul propositionnel "classique" entre autres à partir de la formule $\mathfrak{I}(M)$ (**Chapitre I**), et donc seulement à partir d'ondes et d'un système de traitement de ces ondes.

- L'existence de choses (comme les énoncés) constructibles par des règles cohérentes ou en dehors de toute cohérence (**Chapitre V**). Les tables de vérité tenant compte d'une variable binaire U dont la valeur de vérité est indéfinissable (**Chapitre V**), justifiée par les caractéristiques qui se manifestent à la construction d'un énoncé *indémontrable*. Cette variable ne pouvant apparaître qu'à un niveau binaire (une fois le traitement des ondes effectué par une des formules binaires fondamentales tel que $f(M; x)$, $s(M)$, $\mathfrak{I}(M)$, ...). La variable U justifie sa propre étude par les probabilités.

- L'invariance des règles logiques (elles doivent être immuables, **Chapitre V**).

- La discontinuité de l'espace, du temps et d'autres grandeurs physiques qui nécessitent des formules incluant des variables d'espace ou de temps (**Chapitre V**), et l'existence d'un minimum de distance et d'un minimum de durée.

- L'incohérence d'obtenir le vide total à n'importe quel instant et, par conséquent, l'impossibilité de déterminer une origine de l'univers dans le temps ni même une fin (**Chapitre V**)...

Complément de réflexion :

La réflexion suivante peut permettre de répondre à cette question : les concepts mathématiques sont-ils une invention de l'esprit humain? Ou bien l'esprit humain ne fait-il que les découvrir, ce qui sous-entendrait que ces concepts existent avant que l'esprit humain ne les découvre?

La formule $D(N)$ possède un domaine de définition ($N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$). En appliquant cette formule à la longueur d'onde ou à la période d'un phénomène physique, nous fixons donc directement les limites de longueur minimum et de période minimum pour tout phénomène cyclique (ces limites sont d'ailleurs des constantes). Ceci permet d'établir un lien direct entre le domaine de définition de la formule mathématique $D(N)$ et des limites de ce qui est permis de concevoir physiquement (ces limites sont la longueur minimum et la période minimum).

En effet, le domaine de définition de $D(N)$ justifiant ces limites physiques, ce lien direct entre concept mathématique et réalité physique permet de constater que ces concepts mathématiques doivent exister avant que l'esprit humain ne les découvre, afin que notre monde physique possède ces limites. Notre monde physique possèderait donc naturellement ces limites qui peuvent être représentées par les concepts mathématiques connus. L'existence de ces concepts (ou de ces règles) sont nécessaires avant que nous ne les découvrions. Et lorsque nous les découvrons, nous leur faisons prendre forme dans un langage que nous avons défini, dont la forme (des symboles, par exemple) est purement un choix. Ce choix de l'esprit humain n'intervient donc que sur la forme (parmi un nombre de formes possibles), pas sur le fond.

Justifications personnelles d'une théorie physique :

Je suis un être fait de matière. C'est cette matière qui m'a permis de découvrir la formule $D(N)$ (entre autres). C'est cette matière qui me permet aussi de tirer des conclusions à partir de raisonnements cohérents. Si ces formules et ces conclusions ont pu être construites grâce à un assemblage de matière (tel que je suis), et si elle sont cohérentes, elles doivent pouvoir aussi s'appliquer à ce qui me constitue, c'est-à-dire à la matière elle-même. C'est aussi pour cela que je pense qu'il doit exister un lien entre ces formules, ces conclusions et la matière (et donc la physique). Cela me paraît indissociable. Ce qui, selon moi, justifie la possibilité d'appliquer à la matière une théorie physique à partir de ces formules et de ces conclusions.

18

Le sens de la vie

Cette partie est un peu plus personnelle. Elle est présente car, à mon sens, c'est typiquement le genre de raisonnement suivant qu'il convient d'appliquer pour une telle question.

En effet, si nous posons la question à un individu :

"Quelle est le sens de la vie ?"

Nous observons tout d'abord que cette question s'exprime à propos d'une généralité : il s'agit de "la vie" en générale. Cette question exigerait donc une réponse générale.

Or, la seule réponse qui peut être donnée à cette question est une réponse particulière : c'est-à-dire une réponse provenant d'un individu. La question induit que cet individu aurait pour tâche de répondre au nom de tous les autres.

Cette question demande une réponse générale alors que la réponse ne peut être que particulière. Ceci n'est pas cohérent. La question posée n'a donc pas de sens. Toute les question ne sont donc pas cohérentes : en particulier, celles qui demandent des réponses alors qu'une réponse directe est impossible à trouver.

Une question cohérente tiendrait compte de cette difficulté, et se poserait plutôt ainsi :

"Quelle est le sens de votre vie ?"

En effet, dans ce cas, la question s'adresse à un individu qui peut répondre pour lui-même et de manière particulière, cette question n'exigeant pas de réponse générale.

Digression :

S'il ne peut y avoir de réponse générale au sens de la vie, ce parce que cela serait incohérent. Or, la vie "est" (existe), cela signifie que cela est possible (ou même constructible). Et elle n'a pas besoin de "sens générale" pour être, elle est parce que cela est possible, et donc cela est possible sans but général.

Si la question "Quelle est le sens de la vie ?" avait été cohérente, sa réponse aurait permis de donner une destinée ou un but à la vie de manière cohérente (grâce à un raisonnement cohérent) au fait d'être un vivant. Ceci aurait été contradictoire avec ce qui suit : c'est-à-dire le fait qu'au moins un vivant est capable de construire un énoncé tel que E (en dehors de toute règle logique) ou même qu'il est capable de produire des erreurs. En d'autres termes : la vie ne peut pas avoir à la fois un but générale cohérent applicable à tous les vivants, et à la fois donner la possibilité à au moins un vivant de s'écarter de ce but. D'ailleurs, ce vivant là aurait toujours la possibilité de donner des énoncés *vrais* et *indémontrables* à propos du sens de sa propre vie et à propos du but de sa propre vie. Il faut donc remarquer que l'incohérence de cette question permet de préserver la cohérence avec la partie "**14 Preuve de la liberté**" (page 390) à propos de la liberté (la possibilité que la liberté a d'exister).

19

Accès à la vérité : la nécessité de la pensée écologique

Comme nous l'avons vu, il n'est possible pour un observateur de comprendre véritablement l'univers qu'en se débarrassant de ses préjugés sur l'univers (ce qui inclu l'observateur lui-même) afin d'avoir une vision la plus juste et la plus réaliste possible.

Cette volonté de comprendre amène donc naturellement à acquérir le plus grand respect de l'observateur envers l'univers et tous ses constituants (ce qui inclu encore l'observateur).

Nous devons même admettre que cela amène naturellement l'observateur à se confondre avec le reste de l'univers, c'est-à-dire à s'identifier avec le reste. Nous pourrions même dire que l'observateur place un signe d'égalité entre lui et ce qu'il observe. Lorsque l'observateur a réussi à atteindre cette attitude, il lui devient donc possible d'étudier indifféremment l'univers ou lui-même, puisque les propriétés des deux sont égales.

Ceci se justifie encore par le fait que l'observateur faisant partie inévitablement de l'univers, s'observer soi-même revient à observer une partie de l'univers. Ce qui permet de comprendre que les vérités les plus profondes de cet univers sont aussi contenues en nous-même, cela devenant même une évidence.

En maintenant constamment cette attitude, il ne suffit à l'observateur que de décrire ce qu'il a en lui pour finalement décrire aussi tout le reste.

L'univers ne peut donc être compris que par le respect le plus pur de la part de l'observateur envers l'univers (ce qui inclu toujours l'observateur lui-même), ce qui implique nécessairement une philosophie qui est exactement celle de l'écologie.

C'est à travers le respect de la moindre partie de l'univers, et donc aussi à travers le respect de nous-même, que nous pouvons avoir la vision la plus juste.

Complément de réflexion :

Nous pouvons encore prolonger cette réflexion en faisant des comparaisons. L'attitude proposée dans cette partie revient en fait à imaginer que nous sommes cet observateur.

Imaginons que nous sommes immergé à moitié dans l'eau, la tête au-dessus de l'eau. Notre agitation dans l'eau fait des vagues. Or, si nous voulons véritablement comprendre ce qui se passe au fond de l'eau (est-ce le fond qui bouge ou est-ce un effet des vagues ?), nous devons cesser de nous agiter afin de percevoir les choses telles qu'elles sont. Ce qui revient à utiliser le moins d'énergie possible pour nous permettre de perturber le moins possible les observations. Ce qui se passe au fond de l'eau apparaitra donc plus clairement, et l'observation sera plus précise.

Nous pouvons même ajouter que l'observation n'atteint un maximum de précision que lorsque l'observateur utlise le minimum d'énergie nécessaire à l'observation (le minimum d'énergie nécessaire à l'observateur pour son maintien dans un état conscient).

Cette attitude trouvant de fortes similitudes avec un état proche du sommeil ou même de la "mort". Mais pour poursuivre le raisonnement et continuer ce rapprochement, je dois m'expliquer.

Tout d'abord, abordons la mort. Lorsqu'un être perd la vie, il passe nécessairement d'un état de conscience à un état de perte de conscience. Il passe donc d'un état où sa consommation d'énergie est à un niveau plus élevé pour aller vers un état ou la consomation d'énergie est la plus faible. Or, tant qu'il est conscient, cela signifie que cet être consomme l'énergie nécessaire au maintien de sa conscience. Pour passer d'un état conscient à un état inconscient, cet être passe nécessairement par une étape où la consommation d'énergie connaît un seuil permettant de passer de l'état conscient à l'état inconscient. Il existe donc nécessairement un niveau d'énergie minimum nécessaire à l'état de conscience. De plus, lorsque cet être perd la vie, il perd aussi la possibilité d'émettre des jugements fondés ou infondés : il perd donc en même temps la possibilité d'effectuer tout préjugé sur l'univers. Il passe donc nécessairement par une phase où l'univers (ce qui inclu aussi cet être) apparaît à sa conscience tel qu'il est. Cet être acquiert donc par nécessité la connaissance "véritable" de toute chose dans ces derniers instants.

Il est donc inutlie de vouloir vivre la "fin" de sa vie avant le moment qui vient naturellement puisque nous pouvons savoir d'avance comment cette "fin" apparaît à la conscience de tout être.

Ensuite, abordons l'état proche du sommeil. Car il faut tout de même très fortement remarquer que l'étape de la "fin" de la vie n'est pas une étape strictement nécessaire pour atteindre la vérité sur l'univers. En effet, puisqu'un être passe d'un état de conscience à un état d'inconscience lorsquu'il s'endort. Cet état de transition impliquant également des niveaux d'énergie différent pour des zones spécifiques du cerveau (le raisonnement est le même que précédemment). Par déduction, il existe une configuration de l'état de conscience permettant à l'observateur de comprendre l'univers, et qui doit correspondre à un état de consommation d'énergie strictement nécessaire à l'observation (ce qui implique d'être toujours conscient; cet état doit être localisable dans une ou plusieurs zones du cerveau). Dans ce cas, l'observation devient la plus juste.

Il est donc nécessaire d'éviter tout préjugé pour parvenir à cet état. Une méthode étant d'avoir la volonté de comprendre l'univers (ce qui inclu soi-même) et de trouver le point qui permet d'être le plus calme mais toujours en observation de son environnement (extérieur ou intérieur).

Pour en revenire à l'analogie avec l'immersion dans l'eau (faite au début de ce "**Complément de réflexion**") : dans le fond, les choses ne "bougent" pas, c'est dans la forme (en surface) qu'interviennent les changements.

Pour l'avoir véritablement ressenti personnellement, le sentiment qui en ressort de manière claire est un sentiment d'harmonie, de légerté (c'est-à-dire d'affranchissement du poids, ce poids qui semble alors "pénible") et de clarté. Je dirais même un sentiment d'évidence (on reconnaît ce sentiment sans l'avoir ressenti auparavant). Si nous voulons décrire l'aspect extérieur de l'observateur seulement, il donne nécessairement l'apparence de se décontracter et d'être en attente de “réponse” de la part de son environnement. Si nous voulons décrire l’aspect intérieur de l’observateur, il est véritablement en observation d’une “réponse” de la part de son environnement, ce qui passe par une sensibilité très prononcée à la présence de cet environnement, dans l’état où cet environnement se trouve (avec une volonté de ne pas perturber cet environnement), et par une prise de conscience de soi comme partie de cet environnement.

Ce qui permet ici aussi de rappeler qu’un tel état de compréhension (invoquant nécessairement l’harmonie ou l’identification de l’observateur à son environnement, sans volonté de perturber cet environnement, c’est-à-dire dans le respect cet environnement) impose de passer par une pensée écologique.

Cette pensée écologique devient inévitablement la philosophie à adopter de manière générale pour les siècles à venir. Seule cette philosophie peut amener le progrès des sciences jusqu’au plus haut point, un progrès qui devra se ramener clairement au service de l’humanité et de la nature. La conséquence est une paix durable entre tout être vivant.

Digression :

La formule $D(N)$ appliquée aux longueurs d’onde me permet d’envisager clairement que toute matière ne serait en fait constituée que de photons. Or, nous sommes des êtres constitués de matière. Par déduction, nous sommes constitués que de photons.

(il faut aussi tenir compte des règles qui lient ces photons entre eux et aussi tenir compte des “non-règles”)

De mon point de vue, la mort ne ferait que nous faire apparaître cela que comme une évidence : nous ne sommes que des êtres faits de lumière (cette conception est appuyée par le **Chapitre VI**)...

20

Impressions personnelles

J'aimerais expliquer ce que je ressents après m'être imprégné presque exclusivement de ces réflexions.

J'aimerais d'abord donner une justification sur la présence dans la même théorie de ces chapitres qui peuvent être très différents les uns des autres. Ils contiennent en effet des mathématiques, de la logique, de la philosophie, une théorie avec application de ces mathématiques à des phénomènes physiques. Je justifie la présence de tout cela en faisant remarquer que toutes ces disciplines nécessitent le raisonnement logique. Je n'ai donc finalement fait que cela : raisonner. D'une manière ou d'une autre, sous une forme ou sous une autre, la logique est la même : celle du raisonnement. Pour moi, la variété des formes de la logique étant toutes liées à la matière qui nous constitue, n'importe laquelle de ces formes de logique constitue un excellent point de départ pour une réflexion. Autrement dit, peu importe la discipline choisie, il sera toujours possible de tirer des conclusions importantes (et même fondamentales si notre réflexion est correctement guidée).

Après toutes ces réflexions, de les avoir comprises me donne le claire sentiment que ce monde (ou l'univers), c'est moi qui l'ai fait (grâce à des règles et du hasard, je participe à son organisation). Par “moi” , j'entends la matière qui me constitue. J'ai le sentiment d'avoir véritablement et profondément compris l'essentiel dans tout cela, c'est un sentiment de cohérence (j'allais écrire aussi de légèreté), qui revient presque au même que de dire quelquechose d'évident : Ce monde, c'est nous qui l'avons fait (”nous” , c'est-à-dire la matière dont nous sommes constitués), ainsi que tout le reste de la matière a fait ce monde. En d'autres termes, ce monde a la forme qu'il a parce que tout ses constituants (ce qui inclu nous-même) l'ont fait devenir ainsi.

Ainsi, chaque ensemble (chacun de nous) peut aussi l'exprimer. Ce monde, c'est nous qui l'avons fait, et qui allons continuer de le faire, à tout jamais. Nous ne devons nous satisfaire que de cela : d'un sentiment de participation. Que nous le voulions ou non, nous ne pouvons faire un choix sur ce sujet : nous participons à l'organisation du monde sans pouvoir en décider autrement.

D'où je déduis qu'il existe un minimum de "non-choix" : nous ne pouvons pas choisir de participer ou non à l'organisation de l'univers. Et donc le choix (ou la liberté) ne porte pas sur la participation à l'organisation de l'univers.

Pour continuer la réflexion (et comme nous l'avons vu au cours de ce chapitre) à propos de l'énoncé suivant :

[**je ne participe pas à l'organisation de l'univers**] est donc $faux$,

Bien qu'il soit possible d'écrire (c'est-à-dire de construire) un énoncé $faux$ (bien qu'il soit possible de l'écrire par choix, c'est-à-dire en dehors de tout raisonnement cohérent), il n'est pas possible de le réaliser (c'est-à-dire d'effectuer ce qu'il suggère).

Plus clairement, nous voici avec un nouvel exemple d'énoncé du même type que certains vus dans ce chapitre : encore une fois, l'énoncé est constructible (puisqu'un énoncé doit toujours être constructible), mais pas ce qu'il énonce (c'est-à-dire pas ce qu'il propose de faire, ou de construire).

CHAPITRE VI

Théorie physique de décomposition des phénomènes cycliques

Introduction

Ce chapitre doit plutôt être vu comme un essai d'application de la formule $D(N)$ à un phénomène ondulatoire physique. Dans celui-ci aussi se trouvent des explications qui peuvent être répétées de manières différentes, ce qui pourrait donner une impression de redondance. Mais il me semble que certaines idées sont difficiles d'accès et peuvent nécessiter quelques unes de ce type de démarche.

Ce dernier chapitre se donne pour objectif de donner une description élémentaire fiable de phénomènes physiques. Ce qui nous permettra également d'établir des liens avec des lois physiques connues, ce qui évitera donc d'avoir à aller trop loin dans les développements (des théories fiables existent déjà, cette théorie fera simplement le lien entre ces phénomènes élémentaires et ces autres théories). La motivation sous-entendue est finalement de donner la représentation géométrique réelle d'un photon.

Ce chapitre est indissociable des chapitres précédents car il tient compte des conclusions de chacun d'entre eux. Ce chapitre pourrait donc donner une interprétation générale des phénomènes physiques réels (c'est-à-dire des phénomènes cycliques mais aussi des phénomènes n'obéissant à aucune règle tel que la variable U).

Ces conclusions vont être rappelée immédiatement.

21

Principes de base

Dans l'idéal, l'objectif n'est pas d'écrire des formules tirées d'expériences physiques (bien que cela soit habituel), mais plutôt d'écrire des formules tirées de la cohérence de réflexions, et qui permettent de commencer une théorie donnant des bases solides et incontournables pour étudier la réalité telle qu'elle est. Notre plus grand laboratoire est notre pensée.

21.1 Hypothèse et rappels des conclusions des chapitres précédents

A la fin du **Chapitre I**, ainsi que dans le **Chapitre V**, je faisais part de mes remarques personnelles concernant mes opinions sur une théorie physique. Il me semblait qu'une théorie qui reflèterait au mieux la réalité (les règles, les non-règles, les situations constructibles, la discontinuité) tiendrait compte des conclusions de l'étude d'au moins des **3 premiers chapitres** et d'au moins des 5 premières parties du **Chapitre V**. Nous allons rappeler ces conclusions sous forme d'indications à retenir.

21.1.1 Rappels

Nous allons essayer d'échaffauder une théorie qui tienne compte de ces indications :

- La formule de décomposition $D(N)$ d'un nombre entier N en produit de facteurs premiers, démontrée dans le premier chapitre (Attention, il s'agit bien de crochets dans ces formules, et non des symboles des "valeurs absolues", ni de ceux des "parties entières" : ils ont donc la même fonction que de simples parenthèses) :

Pour $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$,

$$D(N) = N = \prod_{M=2}^{M=N} M^{\left[\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}.\prod_{v=1}^{v=3}(M-v)\right)}{\sin^2(\pi/M)}.\sum_{x=1}^{x\to+\infty} \sin^2\left(\frac{\pi.\prod_{h=1}^{h=(M^x-1)}(N-h)}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x+1\right)}}\right)\right]}$$

(dans la formule, " $+\infty$ " peut être remplacé par la formule de Restriction $RM(N)$ établie dans le premier chapitre)

Ou encore (équivalent) :

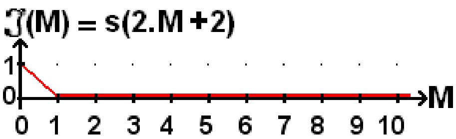
Pour $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$, et quelqesoit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq 2$,

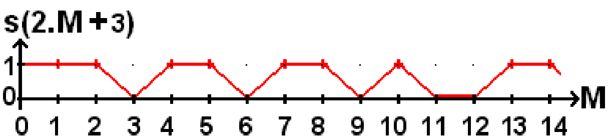
$$D(N) = N = \prod_{M=2}^{M=N} M^{\left\{ \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{M}\right)}.\sum_{x=1}^{x\to+\infty} \sin^2\left[\left(\frac{\prod_{h=1}^{h=(M^x-1)}(N-h)}{M^{\left(\frac{M^x-1}{M-1}-x\right)}}\right)^m .\frac{\pi}{M}\right]\right\}}$$

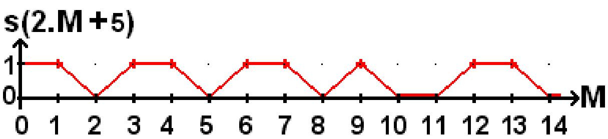
- La formule $D(N)$ (**Chapitre I**) appliquée aux longueurs d'onde des photons (hypothèse principale du **Chapitre V**), ce qui sous-entend qu'une longueur d'onde N peut être décomposée en longueurs d'ondes plus simples (fondamentales) et que ces longueurs d'onde prennent nécessairement des valeurs qui peuvent être ramenées à des nombre entiers.

- La formule $D(N)$ également appliquée aux périodes des ondes des photons (chapitre V), ce qui sous-entend qu'une période N peut être décomposée en périodes plus simples (ou fondamentales) et que ces périodes prennent nécessairement des valeurs qui peuvent être ramenées à des nombre entiers.

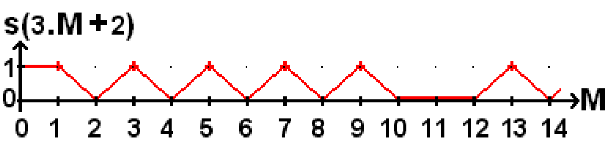
- La formule simplifiée $s(M)$, doù peuvent découler des formules légèrement différentes tels que $s(2.M+3)$, $s(2.M+5)$, $s(3.M+2)$, $s(5.M+2)$, ... et dont chaque graphique peut présenter des analogies avec ceux des spectres de lumière (lorsque la formule vaut 1 et pour M une longueur d'onde, le graphique correspondant s'apparente à des raies spectrales. Rappelons que les segments entre chaque point ne représente pas une continuité, ils sont tracés seulement pour aider à la lecture des graphiques) :

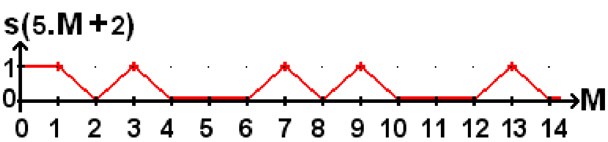






...





...

- Par extension, nous le verrons plus loin, la formule $D(N)$ pourra aussi être appliquée à la d'éléments indivisibles (chapitre VI), ce qui sous-entend qu'un ensemble de N éléments indivisibles peut être décomposé en sous-ensembles plus simples (ou fondamentaaux) et que ces quantités prennent nécessairement des valeurs qui peuvent être ramenées à des nombre entiers.

- Les liens possibles entre les ondes et la logique binaire (conclusions du **Chapitre I** et du **Chapitre V**), et donc l'implication des nombres entiers et des nombres premiers dans la logique binaire se manifestant par les phénomènes ondulatoires.

- La possibilité de former toutes les propositions du calcul propositionnel "classique" à partir de la formule $\mathfrak{I}(M)$ (conclusions du **Chapitre I**), et donc seulement à partir d'ondes et d'un système de traitement de ces ondes.

- L'existence de choses (comme les énoncés) constructibles par des règles cohérentes ou en dehors de tout système de raisonnement cohérent (conclusions du **Chapitre V**). Les tables de vérité tenant compte d'une variable binaire U dont la valeur de vérité est indéfinissable (conclusions du **Chapitre V**), justifiée par les caractéristiques qui se manifestent à la construction d'un énoncé indémontrable. En effet, pour les énoncés E_1, E_2 et E_3, il existe un cas nécessitant le théorème d'incomplétude de *GODEL* [10] tel que :

$E_1 =$ [**Tout énoncé est produit par un raisonnement cohérent, ou produit en dehors de tout raisonnement cohérent**]

$E_2 =$ [**Il est possible de construire des énoncés démontrables (tel que celui-ci)**]

$E_3 =$ [**Il est possible de construire des énoncés indémontrables (tel que celui-ci)**]

Où nous avons (en algèbre de *BOOLE* [3]) :

$$E_1 = E_2 + E_3$$

Dont la table de vérité est la suivante :

E_3	E_2	$E_1 = E_2 + E_3$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Et si nous cherchons à connaître E_3 seulement à partir de E_1 et de E_2, nous obtenons :

E_1	E_2	$E_3 = ?$
0	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Alors, nous sommes dans le cas :

$$E_3 = \overline{E_2}.E_1 + E_2.U$$

Or, puisque nous sommes aussi dans le cas où (voir le **Chapitre V** pour les détails) :

E_1 est *vrai* ($E_1 = 1$),
E_2 est *vrai* ($E_2 = 1$),

Nous sommes par conséquent dans le cas où :

$$E_3 = U$$

Où U peut valoir indifféremment 0 ou 1 (il est même possible de considérer que ces 2 valeurs sont superposées). Ce qui est bien le cas de l'énoncé E_3 puisque :

* Si E_3 est *vrai*, alors E_3 ne peut provenir d'aucun raisonnement cohérent,

* Si E_3 est *faux*, alors E_3 ne provient d'aucun raisonnement cohérent également (car aucun raisonnement cohérent ne peut produire quelque-chose de *faux*).

L'étude de la variable U justifie l'utilisation des probabilités. Cette variable ne pouvant apparaître qu'à un niveau binaire (une fois le traitement des ondes effectué par une des formules binaires fondamentales tel que $f(M;x)$, $s(M)$, $\mathfrak{I}(M)$, ... où notamment la formule $\mathfrak{I}(M)$ permet de former toutes les propositions du calcul propositionnel “classique” , or E_3 est une proposition).

- L'invariance des règles logiques (conclusions du **Chapitre V**).

- La discontinuité de l'espace, du temps et d'autres grandeurs physiques qui nécessitent des formules incluant des variables d'espace ou de temps (conclusions du **Chapitre V**), et l'existence d'un minimum de distance et d'un minimum de durée (en conformité avec la limite de longueur de *PLANCK* [8] et avec la limite de temps de *PLANCK* [8]).

- L'incohérence d'obtenir le vide total à n'importe quel instant et par conséquent l'impossibilité de déterminer une origine de l'univers dans le temps ni même une fin (**Chapitre V**)...

21.1.2 Justification de l'application de $D(N)$ aux phénomènes cycliques

Ce paragraphe a pour objet de justifier de l'application de la formule $D(N)$ à une longueur d'onde d'un photon et la la période de l'onde d'un photon. Rappelons que pour l'onde d'un photon, nous avons la formule :

$f = c/\lambda = 1/T$ avec :

λ est équivalent à la longueur d'onde,
f est équivalent à la fréquence de l'onde,
c est équivalent à la vitesse de la lumière,
T est équivalent à la période de l'onde.

Dans un système de mesures (simplifié) ramené à des unités de mesure indivisibles comme les unités naturelles de *Max PLANCK* [8], nous devons considérer que :

$c = 1$

Or,

$\lambda = c.T$

Donc, dans le cadre des unités naturelles de *PLANCK*, nous avons :

$\lambda = T$

Ce qui signifie clairement que décomposer une longueur d'onde en longueurs d'ondes fondamentales revient exactement à décomposer la période en périodes fondamentales. D'où l'on déduit que la formule de décomposition $D(N)$ est indifféremment appliquable à la longueur d'onde ou à la période de l'onde d'un photon.

Nous pouvons donc associer indifféremment :

N à λ (en notant $N = \lambda$),

Ou

N à T (en notant $N = T$).

Nous pouvons donc pour la suite de ce chapitre appliquer indifférement la formule $D(N)$ aux longueurs d'onde λ ou aux périodes T.

De cette manière, nous obtenons :

- L'application $D(\lambda)$ correspondant à la formule $D(N)$ lorsque $N = \lambda$.
- L'application $D(T)$ correspondant à la formule $D(N)$ lorsque $N = T$.

Ce qui permet l'étude de phénomènes ondulatoire de particules en translation linéaire dans l'espace (le photon) ou en "rotation sur elles-même" (ce qui peut être représenté par des cycles ou également des périodes).

Cette formule $D(N)$ est donc plus généralement applicable aux phénomènes cycliques (ou périodiques, ce qui justifie le titre de ce chapitre). Ce qui constitue la justification annoncée.

21.1.3 Premières implications

Nous resterons dans le cadre des unités naturelles de *PLANCK* [8].

L'hypothèse principale étant la décomposition d'une longueur d'onde en longueurs d'ondes fondamentales et la décomposition d'une période en périodes fondamentales grâce à la formule $D(N)$ appliquée à l'onde d'un photon (où N peut être associée à une longueur d'onde ou à une période), si nous acceptons que l'on puisse associer une onde à un photon. Ce qui implique d'admettre :

• L'application de la formule $D(N)$ qui associe N à la longueur d'onde λ d'un photon implique l'existence d'une valeur de mesure de longueur d'onde exprimable seulement par un nombre entier supérieur ou égal à 2 (car $\lambda \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda \geq 2$).

• Par conséquent, l'existence d'un minimum pour la longueur d'onde λ :

$\lambda_{min} = 2$ (c'est à dire 2 unités en "unité de longueur")

• Et donc l'existence d'une unité de mesure d'une longueur d'onde λ_0 :

$\lambda_0 = 1$ (c'est à dire 1 "unité de longueur")

(Ce qui confirme partiellement le raisonnement du **Chapitre V** concluant qu'il existe une disconuité de l'espace : partiellement car seule la longueur de l'onde est concernée, nous ne pouvons pas encore faire d'affirmation à propos des autres directions de l'espace comme l'amplitude de l'onde)

• L'application de la formule $D(N)$ qui associe N à la période T de l'onde d'un photon implique l'existence d'une valeur de mesure de période exprimable seulement par un nombre entier supérieur ou égal à 2 (car $T \in \mathbb{N}$ tel que $T \geq 2$).

- Par conséquent, l'existence d'un minimum pour la période, puisque :

  T est équivalent à la période (correspond à la mesure du temps).

  $T_{min} = 2$ (en "unité de temps")

- Et donc l'existence d'une unité de mesure pour la période d'une onde :

  $T_0 = 1$ (c'est à dire 1 "unité de temps", qui est une durée minimum)
  (Ce qui confirme le raisonnement du **Chapitre V** concluant qu'il existe une discontinuité du temps. Ce qui ne peut plus être considéré comme une hypothèse, mais comme une implication logique)

- L'invariance de la vitesse d'un photon, puisque :

  $c = \lambda/T$ avec :

  λ est équivalent à la longueur d'onde,
  T est équivalent à la période.

  Dans le cas d'une longueur d'onde minimum ($\lambda_{min} = 2$),
  la période est également minimum ($T_{min} = 2$).

  L'onde d'un photon effectue la distance λ_{min} en un temps T_{min} :

  $$c = \lambda_{min}/T_{min}$$
  $$= 2/2$$
  $$= 1 \text{ (en unité de longueur d'onde par unité de temps)}$$

  Et donc $\lambda = T$ (dans le cadre des unités naturelles de *PLANCK*)

  Il est donc possible de décomposer indifféremment la longueur d'onde ou la période.

• L'existence d'un maximum pour la fréquence, puisque :

$f = c/\lambda = 1/T$ avec :

λ est équivalent à la longueur d'onde
f est équivalent à la fréquence,
c est équivalent à la vitesse de la lumière,
T est équivalent à la période.

et pour $c = 1$, nous avons :

$f_{max} = c/\lambda_{min} = 1/T_{min}$
$f_{max} = 1/2$ (en "unité de fréquence" : 1 / temps)

• L'existence d'un maximum pour la fréquence angulaire, puisque :

$\omega = 2.\pi.f$ avec :

ω est équivalent à la fréquence angulaire,
f est équivalent à la fréquence,

$\omega_{max} = 2.\pi.f_{max}$
$\omega_{max} = \pi$ (en "unité de fréquence angulaire" : radian / temps)

• L'existence d'un maximum pour l'énergie dans le cas de la lumière monochromatique. En effet, dans ce cas, elle ne dépend que de la fréquence puisque :

$E = h.c/\lambda$ avec :

E est équivalent à l'énergie,
h est équivalent à la constante de *PLANCK*,
c est équivalent à la vitesse de la lumière.
λ est équivalent à la longueur d'onde,

et pour

$c = \lambda_{min}/T_{min} = 1$

Nous avons :

$E_{max} = h.c/\lambda_{min}$
$E_{max} = h/2$ (en "unité d'énergie")

• L'existence d'un maximum de masse lors de la conversion de l'énergie dans le cas de la lumière monochromatique, puisque :

$E = m.c^2$ avec :

E est équivalent à l'énergie,
m est équivalent à la masse,
c est équivalent à la vitesse de la lumière.

et pour

$c = \lambda_{min}/T_{min} = 1$

Nous avons donc une masse maximum lors de la conversion énergie-masse donnée par :

$m_{max} = E_{max}/c^2$
$m_{max} = E_{max} = h/2$ (en "unité de masse")

• L'existence d'un maximum pour la quantité de mouvement (aussi appelée impulsion en physique quantique) toujours dans le cas de la lumière monochromatique, puisque :

$p = h/\lambda$ avec :

p est équivalent à la quantité de mouvement,
h est équivalent à la constante de *PLANCK*,
λ est équivalent à la longueur d'onde.

Nous avons :

$p_{max} = h/\lambda_{min}$
$p_{max} = h/2$ (en "unité d'amplitude de quantité de mouvement")

Nous pouvons donc conclure que l'application de la formule de décomposition $D(N)$ à un phénomène cyclique justifie la quantification des grandeurs physiques liées : pour la formule $D(N)$, c'est donc le domaine de définition de la variable N qui impose cette quantification (puisque $D(N)$ n'est définie que pour $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$).

La décomposition implique la quantification.

- *Repère des symboles utilisés :*

Par la suite, nous gaderons les mêmes notations que précédemment : chaque symbole utilisé désignera la grandeur physique correspondant à celle donnée précédemment.

*(Pour faciliter l'accès à cette sous-partie, ce Point de Repère est présent dans le "**Sommaire**" en partie **21**, sous le nom de " — **Repère des symboles utilisés**". Il redirige directement la lecture vers le début de cette sous-partie "**21.1.3 Premières implications**", page 458)*

21.2 Principe de décomposition d'un phénomène cyclique

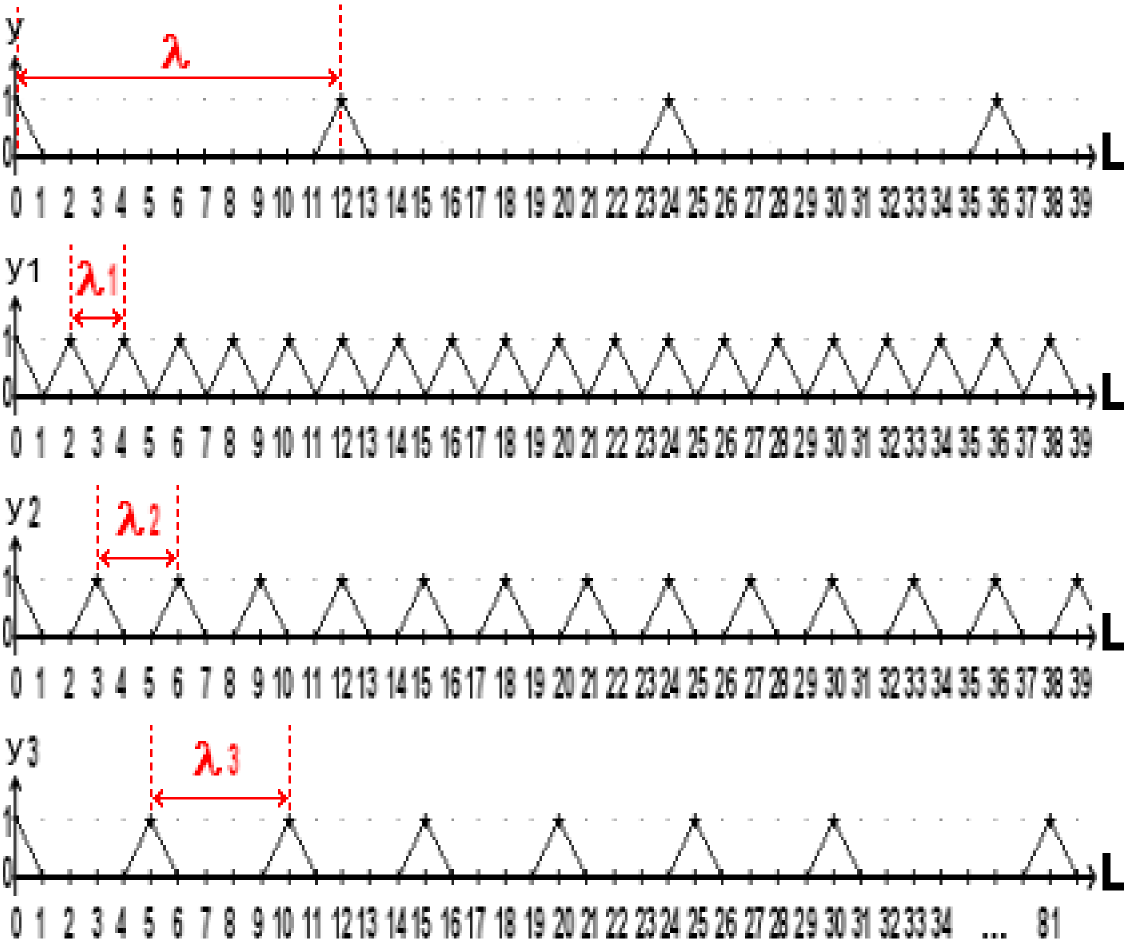
21.2.1 Application $D(\lambda)$ pour les longueurs d'onde

L'application $D(\lambda)$ correspond à la formule $D(N)$ lorsque $N = \lambda$.

Prenons pour variable la longueur d'onde (d'un photon par exemple). Couramment, la longueur d'onde est représentée par le symbole λ. La formule $D(N)$ donnée dans le **Chapitre I** permettant de décomposer un nombre entier N en produit de facteurs premiers, il devient possible de décomposer une onde lorsqu'on applique cette formule à la longueur d'onde λ. Il nous suffit de faire le lien en notant $N = \lambda$. La longueur d'onde λ est décomposable en longueurs d'ondes fondamentales pour $\lambda \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda \geq 2$, la plus courte longueur d'onde décomposable étant donc atteinte pour $\lambda_{min} = 2$. La mesure d'une longueur d'onde étant discontinue, l'unité de mesure d'une longueur d'onde vaut 1 unité.

Ainsi, dans l'exemple suivant qui utilise un graphique, le graphique liant y à la longueur d'onde ne représente pas la forme de cette onde, mais il représente de manière symbolique le début et la fin de la longueur d'une onde (chaque valeur de longueur L pour laquelle $y = 1$ permettant de donner une “borne”, où le motif de la longueur d'onde λ est complet entre 2 de ces bornes).

Graphique pour $\lambda = N = 12$:



Dans cette exemple, la longueur d'onde $\lambda = N = 12$. Il est possible de la décomposer en produit de longueurs d'ondes fondamentales (λ_1, λ_2, λ_3, ... λ_n) grâce à la formule $D(N)$ appliquée à $N = \lambda$.

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}\lambda &= {\lambda_1}^{\alpha_1}.{\lambda_2}^{\alpha_2}.{\lambda_3}^{\alpha_3}. \quad ... \quad .{\lambda_n}^{\alpha_n} \\ &= D(\lambda) = \prod_{M=2}^{M\to+\infty} M^{\alpha_M}\end{aligned}$$

(D'après la formule α_M donnée dans le **Chapitre I**)

$$\begin{aligned}D(N) &= D(\lambda) \\ &= D(12) \\ &= 2^2.3\end{aligned}$$

Où nous avons :

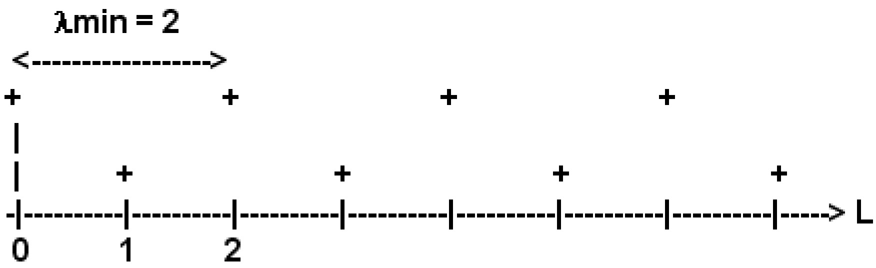
$$\begin{array}{lll l} \lambda_1 = 2 & \text{et} & \alpha_1 = 2 & \\ \lambda_2 = 3 & \text{et} & \alpha_2 = 1 & \\ \lambda_{(M-1)} = M & \text{et} & \alpha_M = 0 & \quad \text{pour tout } M \in \mathbb{N} \text{ tel que } M \geq 4 \end{array}$$

Remarque :

Comme nous l'avons établi nous devons avoir $\lambda \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda \geq 2$, et donc nous devons admettre qu'il existe une longueur d'onde minimum pour les ondes et donc une unité de mesure des longueurs (l'unité de mesure d'une longueur d'onde vaut $\lambda_0 = 1$ unité).

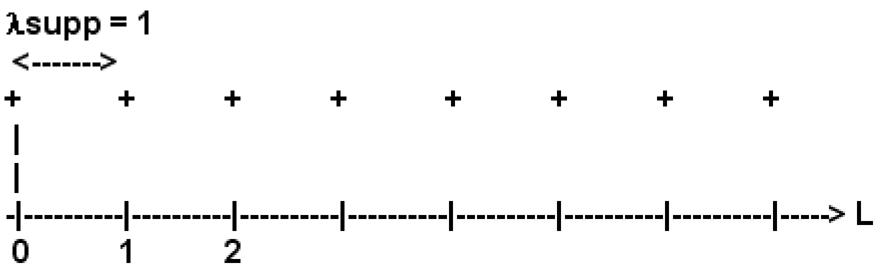
Pour comprendre ce phénomène, nous devons bien nous rappelé que la longueur d'onde représente la longueur nécessaire à la répétition de cette onde.

Le minimum d'une longueur d'onde ($\lambda_{min} = 2$) peut être représenté dans un espace plan tel que :



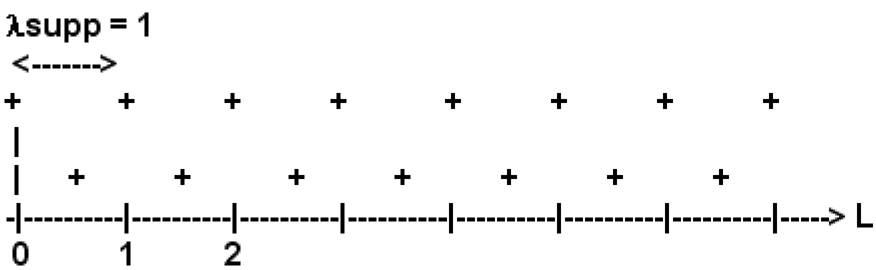
Nous voyons clairement que pour une longueur d'onde égale à 2 (le minimum), le phénomène ondulatoire se constate toujours.

Une longueur d'onde inférieure à 2 n'aurait pas de sens dans un espace où la mesure de longueur vaut 1 unité, puisque le phénomène ondulatoire serait impossible à constater. En effet, si la longueur d'onde λ_{supp} était supposée égale à 1, alors la représentation dans l'espace serait la suivante :



Nous voyons clairement que pour une longueur d'onde supposée égale à 1, le phénomène ondulatoire ne se constate plus dans un espace discontinu dont la mesure de longueur vaut 1 unité.

En effet, en supposant que le phénomène ondulatoire a toujours bien lieu, nous devrions le représenter ainsi :



Dans ce cas (ou même dans celui de longueurs d'ondes plus courtes où $\lambda_{supp} = 1/a$, avec $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \geq 1$), nous serions incapables de constater le phénomène (ni de donner une valeur précise de a) puisque notre espace plan ne permet de mesurer que les longueurs entières. Cet exemple montre que le phénomène ondulatoire ne pourrait pas être mesuré dans les dimensions (visibles) d'un espace.

21.2.2 Application $D(T)$ pour les phénomènes périodiques

L'application $D(T)$ correspond à la formule $D(N)$ lorsque $N = T$.

Pour un phénomène cyclique, la décomposition d'une période en périodes fondamentales permet aussi une décomposition en fréquence, notamment grâce à la relation simple :

$f = 1/T$

Etant donné l'application de décomposition d'une période donnée par $D(T)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} T &= {T_1}^{\alpha_1}.{T_2}^{\alpha_2}.{T_3}^{\alpha_3}. \quad \ldots \quad .{T_n}^{\alpha_n} \\ &= D(T) = \prod_{M=2}^{M\to+\infty} M^{\alpha_M} \end{aligned}$$

(D'après la formule α_M donnée dans le **Chapitre I**)

Comme précédemment, prenons par exemple $T = N = 600$:

$$\begin{aligned} D(N) &= D(T) \\ &= D(600) \\ &= 2^3.3^1.5^2 \end{aligned}$$

Où nous avons :

$T_1 = 2$	et	$\alpha_1 = 3$	
$T_2 = 3$	et	$\alpha_2 = 1$	
$T_3 = 4$	et	$\alpha_3 = 0$	
$T_4 = 5$	et	$\alpha_4 = 2$	
$T_{(M-1)} = M$	et	$\alpha_M = 0$	pour tout $M \in \mathbb{N}$ tel que $M \geq 6$

Interprétation en fréquence :

Nous pouvons donc maintenant donner une interprétation en fréquence puisque nous savons que :

$$\begin{aligned} f &= 1/T \\ &= (1/T_1)^{\alpha_1}.(1/T_2)^{\alpha_2}.(1/T_3)^{\alpha_3}. \quad ... \quad .(1/T_n)^{\alpha_n} \end{aligned}$$

Pour chaque période fondamentale T_n ramenée à des fréquences fondamentales f_n, nous avons :

$f_1 = 1/T_1$
$f_2 = 1/T_2$
$f_3 = 1/T_3$
...
$f_n = 1/T_n$

Ce qui nous permet d'obtenir une décomposition en fréquence puisque nous nous retrouvons avec la formule suivante :

$f = {f_1}^{\alpha_1}.{f_2}^{\alpha_2}.{f_3}^{\alpha_3}. \quad ... \quad .{f_n}^{\alpha_n}$

Interprétation en fréquence angulaire :

La formule $D(T)$ peut être appliquée à une onde en translation linéaire dans l'espace mais aussi aux sytèmes en "rotation sur eux-mêmes". Effectivement, puisqu'il est possible d'associer une période T équivalente à la période de rotation de ce système.

Or, pour un système en rotation, la fréquence angulaire de ce système est directement liée à la fréquence de rotation f, et donc à la période de rotation T. Nous avons :

$\omega = 2.\pi.f = 2.\pi/T$

Ainsi, puisqu'une période est décomposable en période fondamentales, la fréquence angulaire est décomposable en fréquences angulaires fondamentales. En effet, nous avons :

$$\omega = 2.\pi.f \qquad \text{d'où} \qquad f = \frac{\omega}{2.\pi}$$

Avec, comme nous venons de le voir :

$$f = {f_1}^{\alpha_1}.{f_2}^{\alpha_2}.{f_3}^{\alpha_3}. \quad ... \quad .{f_n}^{\alpha_n}$$

Donc

$$f = \left(\frac{\omega_1}{2.\pi}\right)^{\alpha_1}.\left(\frac{\omega_2}{2.\pi}\right)^{\alpha_2}.\left(\frac{\omega_3}{2.\pi}\right)^{\alpha_3}. \quad ... \quad .\left(\frac{\omega_n}{2.\pi}\right)^{\alpha_n}$$

Et donc

$$\omega = 2.\pi.\left(\frac{\omega_1}{2.\pi}\right)^{\alpha_1}.\left(\frac{\omega_2}{2.\pi}\right)^{\alpha_2}.\left(\frac{\omega_3}{2.\pi}\right)^{\alpha_3}. \quad ... \quad .\left(\frac{\omega_n}{2.\pi}\right)^{\alpha_n}$$

De la même manière qu'il existe un minimum de période T_{min} pour une onde, il existe un maximum pour la fréquence angulaire ω_{max} donné par :

$$\omega_{max} = \pi \text{ (en "unité de fréquence angulaire" : radian / temps)}$$

Dans ce cas, nous sommes dans la limite d'une mesure de fréquence angulaire. En effet, si nous supposions que le maximum avait été de :

$$\omega_{supp} = 2.\pi \text{ (radian par unité de temps)}$$

Nous ne pourrions plus constater de mouvement, nous aurions l'impression d'étudier un point immobile, ce qui en aurait été de même si pour d'autres valeurs telles que :

$$\omega_{supp} = 2.a.\pi \text{ (avec } a \in \mathbb{N} \text{ tel que } a \geq 1).$$

Dans ce cas, parler de période pour un phénomène qui pourrait aussi être interprété comme ayant une période nulle n'a pas de sens : le cas de ω_{supp} est donc à exclure.

ATTENTION :

ω_{max} représente la fréquence angulaire maximum appliquée à un phénomène cyclique. Etant donné que l'application $D(T)$ impose l'existence d'un minimum de période pour tout phénomène cyclique, il convient donc d'effectuer l'opération suivante :

$$\omega_{max} = 2.\pi.f_{max} = 2.\pi/T_{min} = \pi$$

Et non l'opération suivante, à supposer que :

$$\omega_{supp} = 2.\pi/T_0 = 2.\pi$$

qui n'est pas appliquée à la période d'un phénomène cyclique, mais à l'unité de mesure de la période de tout phénomène cyclique. Rappelons simplement que pour un phénomène cyclique, la valeur $T_0 = 1$ est impossible à atteindre car non décomposable par la formule $D(N)$ appliquée à $N = T$.

Hypothèse :

Cette théorie pourrait aussi être appliquée à un phénomène cyclique plus complexe, dont le motif du cycle est répétitif et dont la longueur associée à la longueur de ce motif est mesurable (exemple possible pour les longueurs d'onde : l'enveloppe d'un paquet d'ondes).

21.2.3 Implication de l'application $D(T)$

Dans le cas de l'onde d'un photon, l'application de $D(T)$ à la période T de l'onde permet de traiter le mouvement de translation linéaire du photon dans l'espace mais nous donne également la possibilité de traiter le mouvement de rotation.

Il est donc possible de ramener le mouvement de l'onde d'un photon indifféremment à un mouvement de translation linéaire ou bien à un mouvement de rotation, la cohérence de l'application $D(T)$ étant toujours respectée.

Ceci étant un constat important pour la suite de la théorie. Cette remarque permet notamment de montrer qu'il devient possible de considérer qu'un photon puisse être en rotation (ce qui peut être intéressant notamment pour suggérer que toute particule absorbant des photons ne serait en fait composée que de photons en rotation dans cette particule).

Hypothèse importante :

Considérer qu'un photon puisse être en mouvement de rotation permet de supposer que cela permet la formation de particules plus complexes, c'est-à-dire qu'une particule serait formée de photons en rotation.

En considérant que cette particule soit au repos (immobile par rapport à l'observateur), le déplacement interne des photons est un mouvement de rotation à la vitesse de la lumière.

En considérant que cette particule soit en mouvement de translation linéaire par rapport à l'observateur (par exemple), le déplacement interne des photons est un mouvement de rotation qui semble se ralentir dans la particule (et semble donc inférieur à la vitesse de la lumière), alors que la résultante de la composition des vitesses de translation linéaire et de rotation interne conserverait la même mesure (c'est-à-dire la vitesse de la lumière) par rapport à l'observateur.

Par conséquent, la vitesse que pourrait atteindre cette particule serait nécessairement toujours strictement inférieure à celle d'un photon seul.

L'hypothèse est la suivante :

Toute particule de matière qui n'est pas un photon est exclusivement composée de photons.

Conséquences:

Toute particule composée de photons la rend nécessairement plus complexe et par conséquent, il n'est plus possible de considérer cette particule composée comme une particule élémentaire, à moins de définir une particule élémentaire comme étant un ensemble formé de photons en rotation.

21.3 Principe de décomposition du nombre d'éléments d'un ensemble

Supposons qu'il soit possible de "compter" le nombre d'éléments formant un ensemble. Supposons également qu'il soit possible de diviser ces éléments en sous-ensembles fondamentaux afin de les séparer.

L'application $D(Q)$ correspondant à la formule $D(N)$ lorsque $N = Q$
(Q représente ici la quantité).

D'après la formule $D(N)$ définie pour $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$, nous obtenons directement :

L'application $D(Q)$ qui associe Q à la quantité d'éléments présents dans un ensemble d'éléments donné implique l'existence d'une valeur de mesure de quantité exprimable seulement par un nombre entier supérieur ou égal à 2, dont 1 correspond à l'unité de mesure.

Ce qui signifie qu'un sous-ensemble fondamental ne peut être constitué au minimum que de 2 éléments.

Dans ce cas également, il devient possibles de parler d'ensembles décomposables en sous-ensembles fondamentaux.

Hypothèse 1 :

Cette application de la formule $D(N)$ au nombre d'élément d'un ensemble d'éléments permet de faire un rapprochement avec l'intrication quantique. En effet, dans le cas de l'intrication quantique, l'état quantique de 2 objets doit être décrit globalement, sans pouvoir séparer un objet de l'autre bien qu'ils puissent être spatialement séparés. Les 2 objets ne sont cependants pas indépendants et ils doivent être considérer comme 1 système unique (ou ensemble unique).

L'hypothèse est de considérer que l'application $D(N)$ puisse concerner les photons intriqués. N est ici la quantité de photons intriqués présents dans un ensemble donné. Ce qui amène à conclure qu'il est impossible de constituer un sous-ensemble fondamental de photons intriqués inférieur à 2 photons, puisque le domaine de définition de $D(N)$ ne le permet pas.

Hypothèse 2 :

Considérer que l'on puisse compter le nombre Q d'éléments d'un ensemble revient donc à considérer qu'il existe une limite inférieure $Q_{min} = 2$ éléments. Or, étant donné qu'il n'existe pas de limite supérieure, nous devons alors concevoir qu'il soit possible que le nombre d'élément puisse être en quantité infinie pour l'ensemble qui contient tous les éléments.

En effet, considérer qu'il existe une limite supérieure à la quantité de l'ensemble qui contient tous les éléments reviendrait à fixer une borne supérieure à l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{N}$ ainsi qu'à l'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$.

Or, il est possible de démontrer qu'il n'existe pas de limite supérieure à l'ensemble des nombres entiers $\mathbb{N}$, et qu'il n'existe pas de limite supérieure à l'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$.

D'où l'on déduit que s'il est possible de compter de manière exacte le nombre d'élément d'un ensemble, nous devons concevoir que le nombre d'éléments totale d'un ensemble qui les contient tous soit infini.

Ce raisonnement nous suggère donc finalement de concevoir que, à partir du moment où nous considérons que nous sommes capables de compter des photons, le nombre de photons de l'univers puissent être en quantité infinie.

Remarque

Pour revenir sur les réflexions du **Chapitre V**, à propos de la sous-partie "**14.4 Remarque sur les énoncés constructibles**" où une définition suggère qu'un énoncé F puisse contenir une quantité infinie de mots, un raisonnement cohérent ne permet pas d'attribuer un sens à ce genre d'énoncé étant donné que F ne peut jamais être donné dans son intégralité, il n'est donc jamais possible de raisonner sur le sens de F. De même, si nous définissons l'univers comme contenant une infinité de photons (ou de matière), nous ne pouvons attribuer un sens global à cet univers, étant donné que nous ne pourrons jamais le connaître dans son intégralité, et donc sa définition ne nous sera jamais donnée dans son intégralité.

22

Eléments de réflexion

PARTIE NON

DEFINITIVE :

EN COURS DE

REALISATION !

22.1 Rappels, réflexion et définition d'un primaryon

- *Rappels :*

Etant donné les formules d'application aux phénomènes cycliques :

$D(\lambda) = D(N)$ pour $N = \lambda$, avec λ une longueur d'onde,
$D(T) = D(N)$ pour $N = T$, avec T une période.

Qui imposent que $\lambda_{min} = 2$ et que $T_{min} = 2$.

D'où l'on déduit une unité de mesure de la longueur d'onde dans l'espace :

$$\lambda_0 = 1$$

Et d'où l'on déduit une unité de mesure de la période d'une onde dans le temps :

$$t_0 = 1$$

- *Réflexion :*

Cette discontinuité ne permet alors le repérage (par des coordonnées) dans l'espace que par des points et elle ne permet le repérage (par des coordonnées) dans le temps que par des instants. La position de toute étendue de matière ne peut donc être exclusivement repérée que par des points et des instants.

Par définition, un point ou un instant est sans dimension (respectivement sans longueur ou sans durée). Ces points sont donc tous identiques et indivisibles.

Une étendue de matière (y compris la lumière) ne pouvant être repérée que par l'un des ces points ou l'un des ces instants, il est nécessaire que cette étendue de matière soit représentée par ces points sans dimension et ces instants sans dimension. Nous ne pouvons donc concevoir une étendue de matière que comme des points placés dans l'espace et à un instant dans le temps. Nommons un de ces points sans dimension (et donc identique aux autres) un **primaryon**, constituant de toute matière et de toute lumière.

- *Définition d'un primaryon :*

Ce mot est un nom masculin, représentant la contraction du mot "**primary**" (mot anglais à prendre dans le sens du mot "primaire" ou du mot "fondamental") et du suffixe "**-on**" (suffixe servant habituellement à désigner les particules élémentaires en physique). Un primaryon est donc un élément primaire ou fondamentale, l'élément le plus "simple qui soit", constituant toute matière.

Un **primaryon** est un point sans dimension permettant un repérage de la matière dans l'espace à un point spatial donné et dans le temps à un instant donné. La présence d'un primaryon en un point d'espace donné à un instant donné est indissociable de la présence de matière à ce point donné et à cet instant donné. Par exemple, aucun primaryon sur un graphique représentant l'espace d'une taille donnée signifie aucune matière dans cet espace. Un primaryon est nécessairement indivisible. Un primaryon n'ayant pas de dimension, il est par conséquent identique à un autre.

Un primaryon ne change pas de propriétés au cours du temps, il est donc éternel. Il ne change pas de propriétés non plus en fonction de l'espace, ni en fonction de n'importe quelle grandeur physique. L'existence d'un primaryon est absolue (il représente l'idée d' "existence éternelle" conclue dans la partie "**16 Preuve de l'existence éternelle**" du **Chapitre V**).

Remarque :

De ce point de vue, la conception d'un primaryon est presque la même que celle de "l'atome" selon *Démocrite* [9] (Philosophe grec, né vers 460 avant *Jésus-Christ*). En effet, *Démocrite* considérait que les corps les plus divers étaient produits par la combinaison de particules matérielles indivisibles et éternelles, et en mouvement perpétuel.

La différence avec le primaryon est que celui-ci ne peut être considéré que comme étant un point (sans dimension), et non une particule (une particule possède une épaisseur).

22.2 Conséquences

22.2.1 A propos de la vitesse

Pour un primaryon (tel que nous venons de le définir), la seule possibilité est de parcourir une distantce minimum et un temps minimum, ce qui est le maximum autorisé pour une vitesse, mais ce qui constitue aussi la seule vitesse possible pour un primaryon.

Pour $\delta_{min} = 1$ le minimum de distance indivisible qu'un primaryon peut parcourir, et pour $t_{min} = 1$ le minimum de temps indivisible, la vitesse V_p d'un primaryon est donc :

$V_p = \delta_{min}/t_{min} = 1$

Avec $V_p = 1$ étant la seule vitesse possible pour un primaryon.

Remarque :

Si nous envisagions qu'un primaryon puisse avoir une vitesse nulle (même temporairement), cela reviendrait également à envisager qu'il puisse avoir (temporairement) une fréquence angulaire $\omega_{supp} = 2.a.\pi$ (avec $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \geq 1$). En effet, dans ce cas, ce primaryon donnerait aussi l'impression d'être resté au même point, ce qui est à exclure (comme nous l'avons déjà vu en sous-partie "**Application $D(T)$ pour les phénomènes périodiques**", page 468).

22.2.2 A propos de la quantité

Pour un ensemble de Q primaryons, l'application $D(Q)$ correspondant à la formule $D(N)$ lorsque $N = Q$ (Q représente ici la quantité) nous donne la décomposition d'un ensemble de primaryons en sous-ensembles fondamentaux. La formule $D(Q)$ n'étant définie que pour $Q \in \mathbb{N}$ tel que $Q \geq 2$, nous pouvons déduire qu'un sous-ensemble fondamental de primaryons se constitue au minimum de 2 primaryons (notons $Q_{min} = 2$). Ce qui nécessite une unité de mesure indivisible de la quantité de primaryons contenue dans un ensemble. Ceci implique également qu'un primaryon (notamment pour l'ensemble contenant $Q_{min} = 2$ primaryons) ne peut être au même point en même temps, puisque dans ce cas il serait impossible de les dissocier (la quantité $Q_{min} = 2$ ne serait plus respectée en ce point et à cet instant).

Par contre, pour un ensemble de primaryons, il n'y a pas de limite de quantité maximum. Ce qui permettrait d'émettre une hypothèse concernant la quantité de primaryon (et donc de matière) contenue dans l'univers : la quantité Q peut tendre vers l'infini. En fait, considérer qu'il existerait une limite à Q pour le nombre de primaryons reviendrait également à considérer qu'il existerait un nombre Q maximum décomposable en produit de facteurs premiers. Or, ce n'est pas le cas, la quantité de primaryons Q doit donc être en nombre infini.

Partage d'un point de vue personnel :

De ce fait, en considérant que 2 points ne peuvent pas être situés dans la même position au même instant, j'ai plutôt tendance à concevoir la dualité onde-particule comme un ensemble de points capables de se situer à différentes positions, ce qui engendre naturellement un phénomène cyclique à partir de l'intéraction entre ces points. J'ai donc plutôt tendance à penser que les phénomènes cycliques sont dûs à des interactions entre ces points élémentaires, tous identiques, et donc à ramener ces point à des constituants fondamentaux (disons même à des constituants identiques, ce qui est une condition nécessaire pour qu'un observateur ne puisse pas faire la différence dans un cas comme celui évoqué en partie "**Représentation géométrique correspondant à la variable** U", page 486) de la matière ou même des photons. Cette vision des choses n'engage que moi, mais elle me paraît plus naturelle et plus intuitive que de concevoir de manière directe la dualité onde-particule.

Cette vision des choses permettrait de donner une représentation géométrique (spatio-temporelle) au phénomène vibratoire d'un photon.

Considérer les primaryons comme des constituants fondamentaux dénombrables de toutes forme de matière, et permettant la manifestation de phénomènes cycliques et vibratoires, permet de percevoir la dualité onde-particule de la matière comme une conséquence.

Un ensemble fondamental se composant au minimum de 2 primaryions permettrait de donner une raison aux phénomènes cycliques.

22.2.3 A propos de l'amplitude

L'ensemble fondamental minimum est constitué de $Q_{min} = 2$ primaryons. Comme la cohérence impose que ces 2 primaryons ne puissent pas être confondus, nous déduisons qu'il existe un minimum d'amplitude A entre ces primaryons. Cette amplitude est une longueur mesurable dans un espace.

Pour l'instant, nous ne disposons pas de suffisamment d'informations pour dire si cette amplitude a un minimum indivisible ou non.

- *Remarque :*

Toutes ces indications limitent déjà les possibilités de représentations des phénomènes de l'univers.

SUITE EN COURS

DE REALISATION !

22.3 Mouvements des primaryons dans un ensemble "photon"

Nous allons voir qu'un photon peut être considéré comme étant formé d'un ensemble de primaryons.

SUITE EN COURS

DE REALISATION !

22.4 Mouvements des photons dans un ensemble "particule"

Nous allons voir qu'une particule "complexe" (capable d'absorber et d'émettre des photons) peut être considérée comme étant formé d'un ensemble de photons.

SUITE EN COURS

DE REALISATION !

Remarque :

En considérant que la vitesse de la lumière soit indépassable mais aussi l'unique vitesse disponible pour les photons, pour une particule formée exclusivement d'un ensemble de photons en rotation dans cette particule, toute autre mesure de vitesse ne correspondrait alors qu'à une vitesse résultante.

Toutes ces particules correspondraient à la configuration de l'ensemble des photons qui la composent :

- Au repos par rapport à un observateur, l'ensemble de la particule a une vitesse nulle, alors que les photons qui la composent seraient tous en mouvement de rotation dans cette particule (un vecteur vitesse peut représenter cela). La vitesse des photons en rotation (dans la particule) par rapport à cet observateur doit d'ailleurs être exactement la vitesse de la lumière.

- En mouvement de translation linéaire dans l'espace par rapport à un observateur (par exemple), l'ensemble de la particule a une vitesse supérieure à 0. Ceci a pour effet que si la vitesse de la particule augmente, alors le mouvement de rotation interne des photons dans la particule doit se réduire.

Pour un observateur, l'observation de cette particule en translation linéaire dans l'espace (par rapport à cet observateur) doit l'amener à constater cette réduction du mouvement interne dans la particule (en conformité avec la **théorie de la relativité** d'*EINSTEIN*) [11], bien que la mesure de la vitesse des photons par rapport à l'observateur (et non par rapport à la particule observée) soit toujours la vitesse de la lumière.

- Ce principe exclu naturellement que la vitesse globale de la particule puisse dépasser la vitesse des photons qui la composent, d'où l'impossibilité pour les particules composées de photons de dépasser la vitesse de la lumière.

23

Représentation géométrique correspondant à la variable U

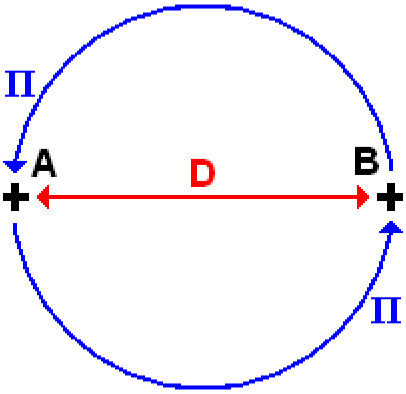
23.1 Introduction

Cette partie se propose de donner une représenation géométrique du phénomène étudié dans la partie "**14 Preuve de la liberté**" du **Chapitre V**, dans les limites de ce qui est permis par la formule $D(N)$ et notamment par son domaine de définition $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 2$, et dans les limites des règles que nous avons établi précédemment.

Nous allons aborder ce phénomène au caractère fondamentalement "indéterministe" en soulignant que la représentation graphique qui va être proposée n'est peut-être pas la meilleure ou l'unique, bien qu'elle semble fidèlement représenter un tel phénomène.

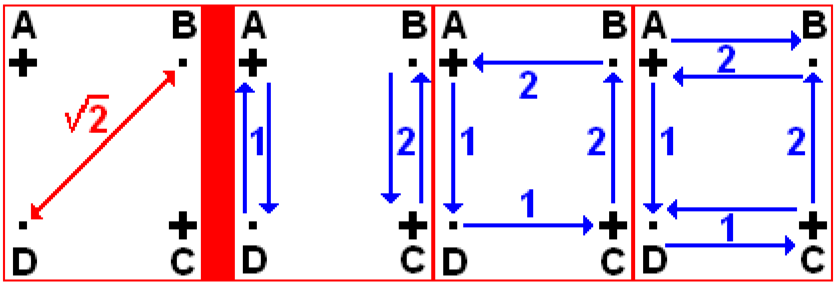
23.2 Etude du cas limite $\omega_{max} = \pi$

A propos du cas de $\omega_{max} = \pi$ radian par unité de temps, celui-ci est intéressant car il va nous donner un autre renseignement et même nous permettre de faire une comparaison avec la variable U. Dans ce cas limite (correspondant à la représentation graphique suivante), pour un phénomène cyclique, un point situé en A se retouve en B (ce qui revient à effectuer une rotation d'angle π rad) après une unité de temps :



Dans ce cas, il devient impossible de savoir si ce point a effecté la trajectoire correspondant à la demie-circonférence du cercle (en bleu) ou au diamètre D du cercle (en rouge). Si la trajectoire était celle du diamètre, la vitesse de ce point ne pouvant dépasser la vitesse de la lumière $c = 1$ unité de longueur par unité de temps, cela signifierait que ce diamètre ne mesure qu'une unité de longueur. Et donc le diamètre minimum dans ce cas serait $D_{min} = 1$.

Il est possible à partir de cette hypothèse de concevoir un nouveau cas particulier, notamment la mise en présence de 2 de ces points nommés 1 et 2 et parcourant les trajectoires correspondantes 1 et 2 sur les représentations graphiques suivantes :



En considérant un point situé en A en rotation dont la fréquence angulaire est au maximum ($\omega_{max} = \pi$ radian par unité de temps). Pour un point seul nous sommes dans la même situation que précédemment : le point se trouve en B après une unité de temps puis revient à nouveau en A après une unité de temps, et ainsi de suite.

En considérant 4 positions possibles en A, B, C et D aux sommets d'un carré où les longueurs sont données par :

$$AB = BC = CD = DA = 1$$

En mettant en présence un $2^{ième}$ un point **identique** (ce qui est une condition nécessaire pour obtenir ce qui va suivre) situé en C et dont la fréquence angulaire est la même ($\omega_{max} = \pi$), la situation devient immédiatement plus délicate, car il devient impossible de savoir quel trajectoire a été suivie par chacun des points. Comme le montrent les 3 représentations graphiques de droite, la trajectoire du point 1 peut passer par A, D, revenir à A alors que le point 2 peut passer par B, C, revenir à B. Mais pour un observateur, il est impossible de savoir si le point 1 a effectué le trajet de A vers D ou le trajet de A vers B. Idem pour le point 2 par rapport au trajet de C vers B ou le trajet de C vers D.

En effet, pour un observateur (qui observe en vue de dessus ou même en vue de dessous), à chaque instant, seules 2 possibilités peuvent être clairement dissociées : soit les points sont en position A et C, soit il sont en position B et D. Mais dans ce cas, il devient impossible de définir le trajet effectué par un seul des 2 points de manière exacte. Il n'est possible d'exprimer ce trajet que dans le cadre des probabilités. Il est ici impossible de définir précisément dans quel sens les 2 points se déplacent. Ceci étant valable à tout instant, seulement des probabilités peuvent exprimer les chances que chaque point a de passer par un trajet à tout instant. Sur une durée infiniment longue, il existe une infinité de combinaisons de trajet possibles.

Nous pouvons même clairement exprimer ces probabilités dans un cas comme celui-ci. A partir d'un instant initial $t = 0$, il devient même possible d'établir un lien entre les probabilités et une durée, ce qui permet d'exprimer une probabilité par unité de temps (pour les trajets de chaque point).

Soit un “trajet” le segment par lequel le point A peut passer (un segment tel que AB, BC, CD ou DA). Soit P la probabilité que le point 1 soit dans une des positions A, B, C ou D d'un instant à l'instant suivant. Soit C_t le nombre de combinaisons de positions possibles par lesquels peut passer le point 1 depuis $t = 0$, et donc soit P_t la probabilité que le point 1 a d'être passer par une suite de positions depuis $t = 0$.

Etant donné que le point 1 a une chance sur 2 de prendre une position ou une autre d'un instant t à l'instant $t+1$, nous avons dans tous les cas : $P = 1/2$.

- A l'instant $t = 0$:

 1 est en A (c'est-à-dire dans la position initial)

Les positions que 1 a pu occuper depuis $t = 0$ sont :

 A

$C_0 = 1$
$P_0 = 1$

- A l'instant $t = 1$:

 1 est en B ou D

Les positions que 1 a pu occuper depuis $t = 0$ sont :

 $A - B$
 $A - D$

$C_1 = 2$
$P_1 = 1/2$

- A l'instant $t = 2$:

Si 1 était en B à $t = 1$: 1 est en A ou C
Si 1 était en D à $t = 1$: 1 est en A ou C (également)

Les positions que 1 a pu occuper depuis $t = 0$ sont :

$AB - A$
$AB - C$
$AD - A$
$AD - C$

$C_2 = 4$
$P_2 = 1/4$

- A l'instant $t = 3$:

Si 1 était en A à $t = 2$: 1 est en B ou D
Si 1 était en C à $t = 2$: 1 est en B ou D

Les positions que 1 a pu occuper depuis $t = 0$ sont :

$ABA - B$
$ABA - D$
$ABC - B$
$ABC - D$
$ADA - B$
$ADA - D$
$ADC - B$
$ADC - D$

$C_3 = 8$
$P_3 = 1/8$

- A l'instant $t = 4$:

Si 1 était en B à $t = 3$: 1 est en A ou C
Si 1 était en D à $t = 3$: 1 est en A ou C

Les positions que 1 a pu occuper depuis $t = 0$ sont (à lire par colonne) :

$ABAB - A$	$ABCB - A$	$ADAB - A$	$ADCB - A$
$ABAB - C$	$ABCB - C$	$ADAB - C$	$ADCB - C$
$ABAD - A$	$ABCD - A$	$ADAD - A$	$ADCD - A$
$ABAD - C$	$ABCD - C$	$ADAD - C$	$ADCD - C$

$C_4 = 16$
$P_4 = 1/16$

- A l'instant $t = 5$:

Si 1 était en A à $t = 4$: 1 est en B ou D
Si 1 était en C à $t = 4$: 1 est en B ou D

Les positions que 1 a pu occuper depuis $t = 0$ sont (à lire par colonne) :

$ABABA - B$	$ABCBA - B$	$ADABA - B$	$ADCBA - B$
$ABABA - D$	$ABCBA - D$	$ADABA - D$	$ADCBA - D$
$ABABC - B$	$ABCBC - B$	$ADABC - B$	$ADCBC - B$
$ABABC - D$	$ABCBC - D$	$ADABC - D$	$ADCBC - D$
$ABADA - B$	$ABCDA - B$	$ADADA - B$	$ADCDA - B$
$ABADA - D$	$ABCDA - D$	$ADADA - D$	$ADCDA - D$
$ABADC - B$	$ABCDC - B$	$ADADC - B$	$ADCDC - B$
$ABADC - D$	$ABCDC - D$	$ADADC - D$	$ADCDC - D$

$C_4 = 32$
$P_4 = 1/32$

... (nous pourions continuer comme ceci à l'infini)

GENERALISATION :

• Si nous prenons en considération la globalité du système (c'est-à-dire l'ensemble $\{point\ 1; point\ 2\}$ comme un ensemble indivisible, d'où l'on ne peut séparer ces 2 points), nous pouvons savoir de manière exacte que :

- A l'instant $t = 0$:
  Les points 1 et 2 sont en A et C.

- A l'instant $t = 2.a - 1$ (avec $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \geq 1$) :
  Les points 1 et 2 sont en B et D.

- A l'instant $t = 2.a$:
  Les points 1 et 2 sont en A et C.

• Si nous ne prenons en considération que le trajet d'un seul des 2 points (par exemple, le point 1, comme vu précédemment) :

D'un instant à l'instant suivant, le point 1 a une chance sur 2 d'occuper la prochaine position : $P = 1/2$.

- A l'instant $t = 0$:

  1 est en A

- A l'instant $t = 2.a - 1$ (avec $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \geq 1$) :

  1 est en B ou D (Que 1 aie été en A ou C à $t = 2(a - 1)$)

  $C_t = 2^t$ (est le nombre de positions que 1 a pu occuper depuis $t = 0$)

  $P_t = 1/C_t$ (est le nombre de chance que 1 a eu de passer par un des trajets)

- A l'instant $t = 2.a$:

  1 est en A ou C (Que 1 aie été en B ou D à $t = 2.a - 1$)

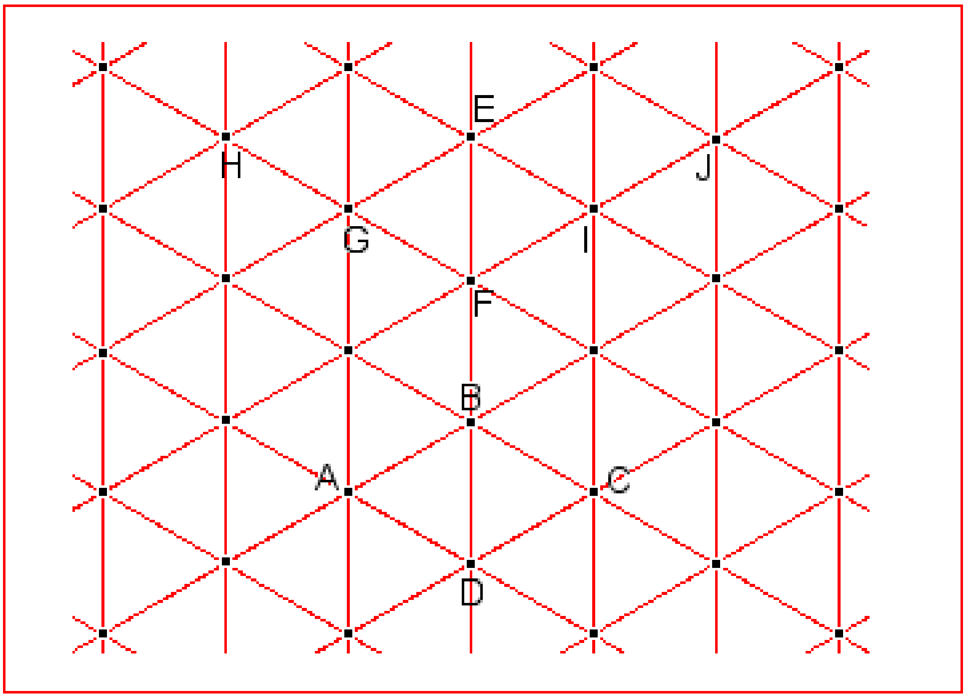
  $C_t = 2^t$ (est le nombre de positions que 1 a pu occuper depuis $t = 0$)

  $P_t = 1/C_t$ (est le nombre de chance que 1 a eu de passer par un des trajets)

<u>Suite du raisonnement :</u>

Si nous ne prenons en considération que le trajet d'un seul des 2 points, d'un point de vue des probabilités, nous pouvons alors ramener cette situation à la superposition de toutes les situations possibles, sans que cela ne pose de problème à son déroulement.

Précisons en outre que la représentation graphique précédente était une possibilité, d'autres représentations où la situation est équivalente sont possibles (il est encore trop tôt pour savoir laquelle serait la meilleure, ou même si plusieurs représentations seraient possibles). En effet, pour cacun des points 1 et 2, nous avions choisi de représenter les positions disponibles A, B, C et D aux sommets d'un carré, mais nous aurions pu aussi choisir que ces positions soient aux sommets d'un losange. Comme l'indique la représentation graphique suivante :



Pour un losange dont les sommets sont A, B, C et D, parmi un ensemble de triangles équilatéraux joints les uns aux autres, et pour des longueurs tels que :

$AB = BC = CD = DA = \lambda_0 = 1$ et
$EF = FB = EG = FG = GH = EI = FI = IJ = \lambda_0 = 1$

Pour les points 1 et 2 précédemment cités, nous nous retrouvons exactement dans la même situation, en supposant que ces points sont en position A et C et que leur fréquence angulaire est également $\omega_{max} = \pi$.

En effet, nous avons vu précédemment que lorsque les points 1 et 2 sont en position A et C, l'ensemble des 2 points $\{point\ 1; point\ 2\}$ se retrouvent l'instant suivant exactement en position B et D, sans que nous ne puissions savoir par lequel des 2 trajets possibles ces points sont passés (pour le point 1 en position A, ce trajet peut être indifféremment AB ou AD). Cela a pour conséquence que, d'un instant à l'instant suivant, il est possible de considérer indifféremment que l'ensemble des points 1 et 2 a "tourné" dans le sens trigonométrique ou dans le sens inverse.

Ce cas va devenir encore plus intéressant en introduisant un $3^{ième}$ point **identique** (nommé 3) en position E, car il va permettre de faire comprendre sur quel norme pourrait se concevoir un système "libre" (ou contenant une part de hasard, en référence au **Chapitre V**), en passant par une représentation graphique (parmi d'autres possibles). Pour simplifier l'exemple, nous n'allons étudier que le cas où nous pouvons indifféremment considérer que l'ensemble des points 1 et 2 peut tourner exclusivement dans le sens trigonométrique (c'est-à-dire sans retour en arrière) ou exclusivement dans le sens contraire.

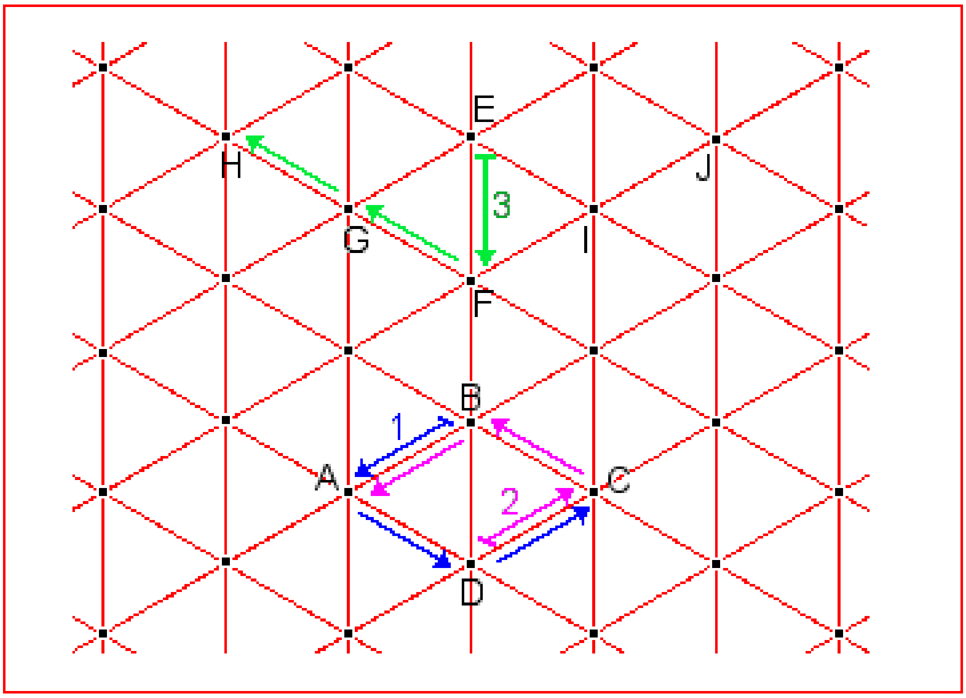
> *Remarque :*
>
> Bien que l'on considère que l'ensemble $\{point\ 1; point\ 2\}$ est en rotation uniquement dans un des 2 sens, il est encore possible d'attribuer une période à cet ensemble. Il est donc également possible de concevoir que l'ensemble $\{point\ 1; point\ 2\}$ constitue un phénomène périodique.

Considérons le cas où le point 3 est situé en position E et qu'il se déplace en position F. Ajoutons la condition qu'un point ne peut prendre la même position qu'un autre, et qu'il se déplace d'une longueur λ_0 après une durée T_0 (il ne peut pas avoir une vitesse nulle). Etablissons une chronologie de l'évolution des points pour chaque instant (pour plus de clarté), avec $t = 0$ l'instant initial de notre étude :

(voir page suivante)

- *Cas 1 :*

L'observateur considère que l'ensemble $\{point\ 1; point\ 2\}$ tourne exclusivement dans le sens trigonométrique :



pour $t = 0$:	1 est en B,	2 est en D,	3 est en E.
pour $t = 1$:	1 est en A,	2 est en C,	3 est en F.
pour $t = 2$:	1 est en D,	2 est en B,	3 est en G.
pour $t = 3$:	1 est en C,	2 est en A,	3 est en H.

Ici, le point 3 a été ejecté en G par l'ensemble de points en rotation dans le sens trigonométrique. **L'éjection est nécessaire** car sinon, il serait possible de considérer que 2 des points sont confondus. En effet, nous aurions :

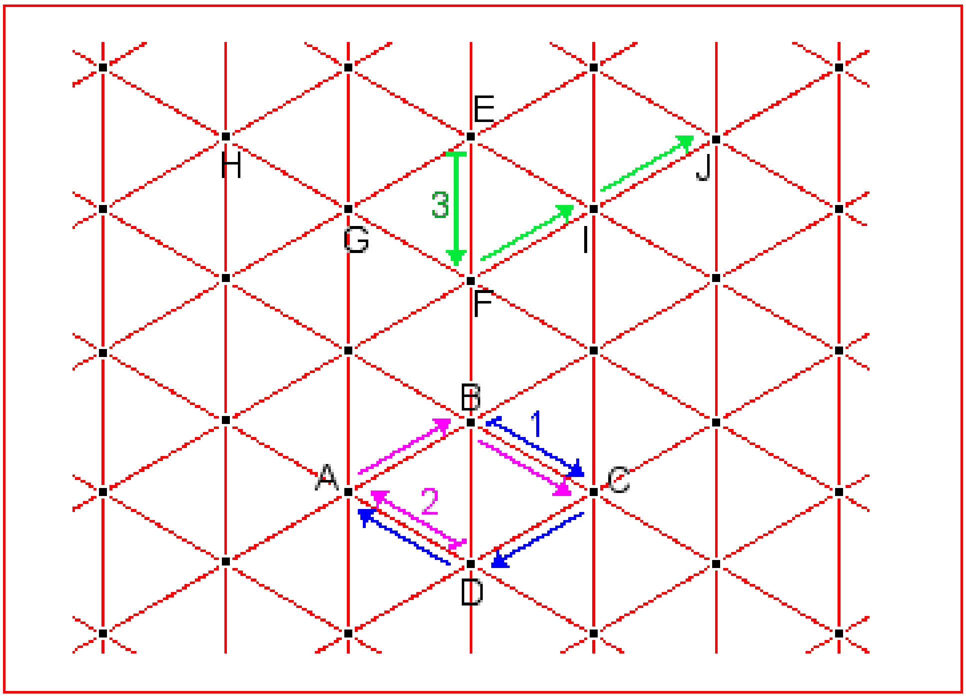
pour $t = 0$:	1 est en B,	2 est en D,	3 est en E.
pour $t = 1$:	1 est en A,	2 est en C,	3 est en F.
pour $t = 2$:	1 est en D,	2 est en B,	3 est en B.

...

Et donc pour $t = 2$, nous aurions les points 2 et 3 en B.

- *Cas 2 :*

L'observateur considère que l'ensemble $\{point\ 1; point\ 2\}$ tourne exclusivement dans le sens contraire à celui du sens trigonométrique :



pour $t = 0$:	1 est en B,	2 est en D,	3 est en E.
pour $t = 1$:	1 est en C,	2 est en A,	3 est en F.
pour $t = 2$:	1 est en D,	2 est en B,	3 est en I.
pour $t = 3$:	1 est en A,	2 est en C,	3 est en J.

Ici, le point 3 a été ejecté en I par l'ensemble de points en rotation dans le sens contraire du sens trigonométrique. Pour les mêmes raisons que pour le *Cas 1*, **l'éjection est nécessaire** ici aussi.

- *Synthèse des Cas 1 et 2 :*

Dans cet exemple de représentations graphiques (d'autres sont peut-être possibles), nous obtenons donc 2 trajets différents simplement en considérant que la rotation s'effectue dans un sens ou dans un autre.

Ce qui permet que le trajet suivi soit indéfinissable. Il peut s'agir indifféremment du trajet aboutissant à la position G ou du trajet aboutissant en position I.

Les 2 trajets étant de probabilité égale puisque la probabilité que l'ensemble de points soit en rotation dans le sens trigonométrique ou dans le sens contraire est la même (on peut indifféremment considérer que l'ensemble tourne dans un sens ou dans le sens contraire), et cela même à chaque instant. Dans notre exemple, nous avons simplifié les choses en considérant que la rotation ne se faisait qu'exclusivement dans un sens ou qu'exclusivement dans le sens contraire. Si nous revenons au cas plus complexe où à tout instant, il est indifféremment possible de considérer que la rotation s'effectue dans un sens ou dans le sens contraire, nous obtenons exactement le même résultat quant à la trajectoire possibles des points 1, 2 et 3. le seul changement étant que nous ne pouvons savoir vers laquelle des 2 positions possibles G ou I le point 3 est éjecté.

Complément de réflexion :

Il m'a semblé intéressant de signaler cette représentation géométrique car elle présente des analogies avec la variable de valeur de vérité indéfinissable U par rapport à l'énoncé E_3 (voir la sous-partie "**Justification de la variable binaire U de valeur de vérité indéfinissable**" du **Chapitre V**). Effectivement, dans cette représentation aussi nous ne pouvons jamais avoir suffisamment d'informations, notamment pour savoir quel trajet a suivi chacun des points 1 et 2 (il serait même incohérent d'avoir ces informations, puisque chaque trajet est équivalent). Chacun des 2 points peut indifféremment passer par un trajet ou un autre (lorsque un des points est en position A, un observateur peut indifféremment considérer que ce point se trouve en B ou en D l'instant suivant), ce qui donne un aspect "binaire" au nombre de possiblités (2 possiblités) à chaque instant. Pour finir, cela correspond à ce que l'on attend d'une représentation de la variable U. C'est-à-dire qu'une telle variable binaire (et donc l'apparition du niveau binaire) ne doit "apparaître" qu'à la suite d'un traitement sur les ondes (car toutes les propositions du calcul propositionnel "classique" peuvent être formées à partir de la formule $\mathfrak{I}(M)$ et donc à partir d'un traitement sur les ondes ou même sur les cycles), ce qui est bien le cas étant donné que nous avions remarqué qu'il était aussi possible de considérer que le système $\{point\ 1; point\ 2\}$ constituait un phénomène périodique.

Pour faire une curieuse analogie avec le langage, nous pouvons faire la synthèse de tout cela en comparant les 2 situations :

- Pour l'énoncé $E_3 = U$:

  peu importe le sens ($vrai$ ou $faux$), aucun raisonnement cohérent ne peut produire E_3 et lui atttribuer une unique valeur de vérité (et donc un sens unique).

- Pour l'ensemble des points 1 et 2 :

  peu importe le sens (de rotation : trigonométrique ou contraire), aucune théorie exclusivement déterministe ne peut produire le système $\{point\ 1; point\ 2\}$ et lui atttribuer un sens unique de rotation.

Tout ceci ne signifie pas pour autant que cette représentation graphique soit la meilleure ou l'unique représentation de U possible * (voir suite "**Autre représentation graphique possible**"). Bien que l'hypothèse d'un élément ponctuel identique avec d'autres permette de mettre en avant un phénomène remarquable (ce qui en fait tout de même une hypothèse forte).

Remarque 1 :

Restreindre le sens de rotation du point 1 par rapport au point 2 (comme vu sur le 1^{ier} schéma au tout début de cette partie "**23.2 Etude du cas limite $\omega_{max} = \pi$**" page 487), permet toujours l'apparition de ce phénomène. Par exemple, en supposant que le point 1 se rend de A vers B dans un sens de rotation donné mais pour lequel $\omega_{max} = \pi$, nous pouvons restreindre le sens de rotation du point 2 qui se rend de C vers D en supposant qu'il est opposé à celui du point 1. Pour la suite du raisonnement, même en supposant que le sens de rotation du point 1 (permettant le déplacement d'une position à une autre) et le sens de rotation du point 2 sont contraires, nous aboutissons au même constat concernant les combinaisons que l'ensemble des 2 points peuvent adopter. En introduisant le $3^{ième}$ point, les 2 trajets possibles apparaissent donc toujours.

De plus, considérer que tous photons puissent être constitués exclusivement de primaryons permet de nous amener à penser que ce phénomène correspondant à la variable U pourrait être très répandu, et peut-être même présent dans chaque photon. Cela pourrait peut-être permettre d'expliquer le phénomène d'intrication quantique.

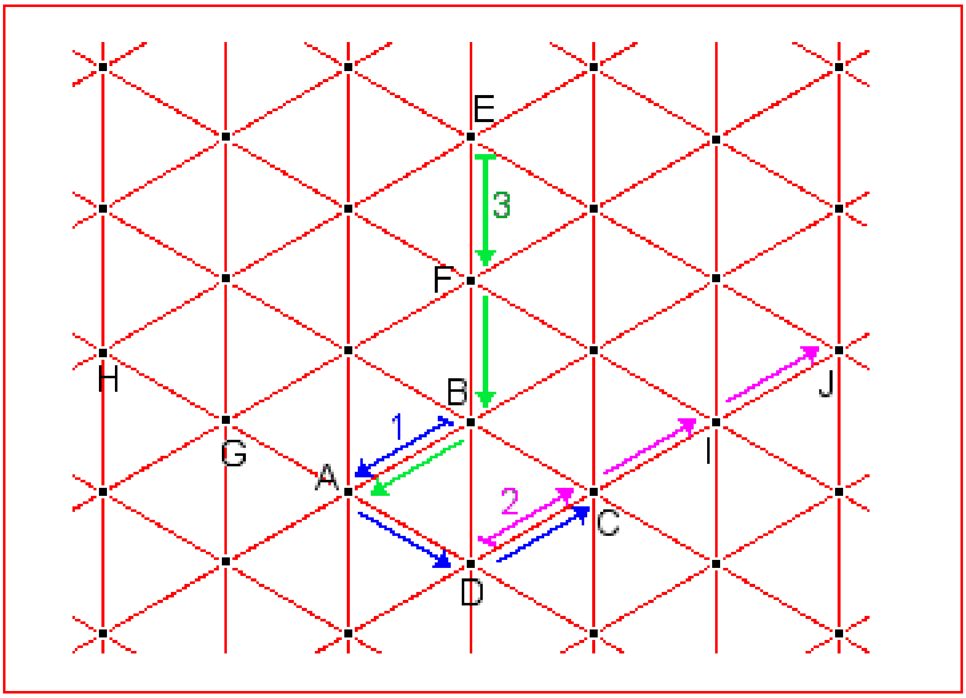
** Autre représentation graphique possible :*

Nous allons donner un autre exemple de représentation graphique qui permette de faire le lien avec la variable binaire U de valeur de vérité indéfinissable. Ici aussi, nous aboutirons à 2 trajets équiprobables. Reprenons la même structure de triangles équilatéraux que précédemment, nous avons :

$AB = BC = CD = DA = \lambda_0 = 1$ et
$EF = FB = AG = GH = CI = IJ = \lambda_0 = 1$

- *Cas 3 :*

L'observateur considère que l'ensemble $\{point\ 1; point\ 2\}$ dans le losange $ABCD$ (le même que pour le "*Cas 1*") est en rotation exclusivement dans le sens trigonométrique :

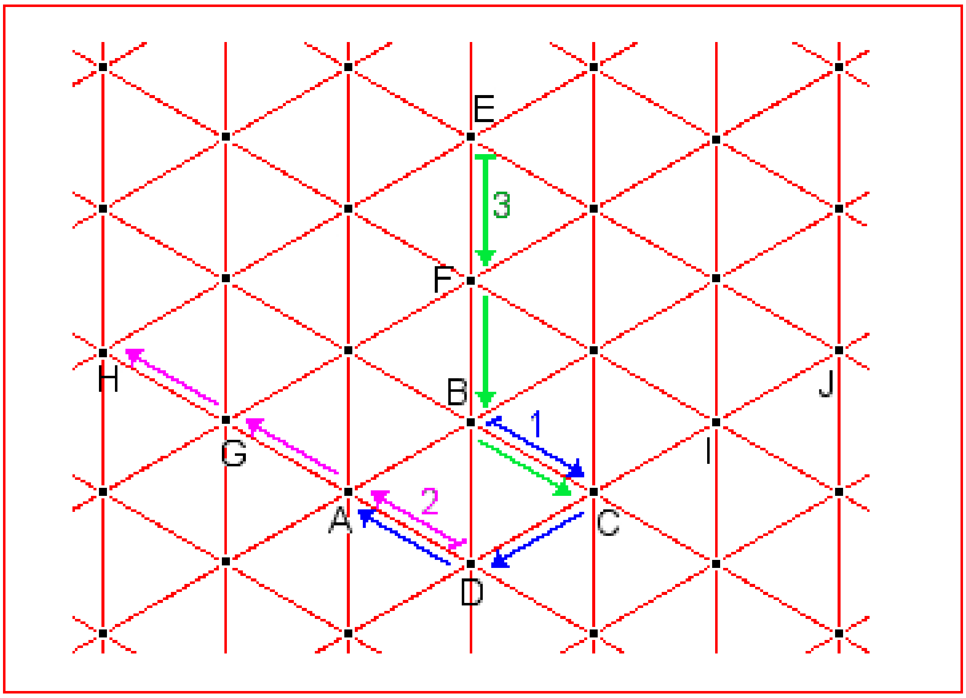


pour $t = 0$: 1 est en B, 2 est en D, 3 est en E.
pour $t = 1$: 1 est en A, 2 est en C, 3 est en F.
pour $t = 2$: 1 est en D, 2 est en I, 3 est en B.
pour $t = 3$: 1 est en C, 2 est en J, 3 est en A.

Ici, le point 2 a été ejecté en I et remplacé par le point 3 dans l'ensemble des points en rotation. **L'éjection est nécessaire** car sinon, il serait possible de considérer que 2 des points sont confondus (notamment à $t = 2$, les points 2 et 3 auraient été confondus au point B).

- *Cas 4 :*

L'observateur considère que l'ensemble $\{point\ 1; point\ 2\}$ dans le losange $ABCD$ (le même que pour le "*Cas 2*") est en rotation exclusivement dans le sens contraire du sens trigonométrique :



pour $t = 0$:	1 est en B,	2 est en D,	3 est en E.
pour $t = 1$:	1 est en C,	2 est en A,	3 est en F.
pour $t = 2$:	1 est en D,	2 est en G,	3 est en B.
pour $t = 3$:	1 est en A,	2 est en H,	3 est en C.

Ici, le point 2 a été ejecté en G et remplacé par le point 3 dans l'ensemble des points en rotation. Pour les mêmes raisons que le "*Cas 3*", **l'éjection est nécessaire** ici aussi.

- Synthèse des Cas 3 et 4 :

Ici aussi, étant donné que nous ne pouvons savoir dans quel sens de rotation tourne l'ensemble de départ $\{point\ 1; point\ 2\}$, nous ne pouvons pas savoir quel trajet va empreinter le point 2 lors de l'éjection. Le point 3 remplace le point 2 dans l'ensemble $\{point\ 1; point\ 2\}$ pour former un nouvel ensemble $\{point\ 1; point\ 3\}$ équivalent dans le losange $ABCD$.

Nous pouvons tout de même constater une différence entre le "*Cas 1*" et le "*Cas 3*" : malgré le sens de rotation identique au départ de l'ensemble $\{point\ 1; point\ 2\}$, le trajet suivi par le point éjecté est opposé et avec un décalage spatiale. Même remarque entre le "*Cas 2*" et le "*Cas 4*".

Remarque 2 :

Le "*Cas 1*" et le "*Cas 2*" forment une représentation graphique possible, le "*Cas 3*" et le "*Cas 4*" forment une autre représentation graphique possible, Il serait préférable de pouvoir trancher en faveur de l'une ou l'autre, voire en faveur d'une nouvelle représentation s'il s'avérait que celles-ci n'étaient pas les meilleures.

SUITE EN COURS
DE REALISATION !

24

Possibilité de codage des actions d'un système libre

Supposons qu'un système soit partiellement constituer d'un "assemblage de matière" pouvant être décrit à partir d'une représentation telle que nous venons de l'aborder dans la partie précédente. Appelons un tel système un "système libre".

Nous allons simplifier au maximum afin de rendre compréhensible une possibilité de codage des actions d'un système libre.

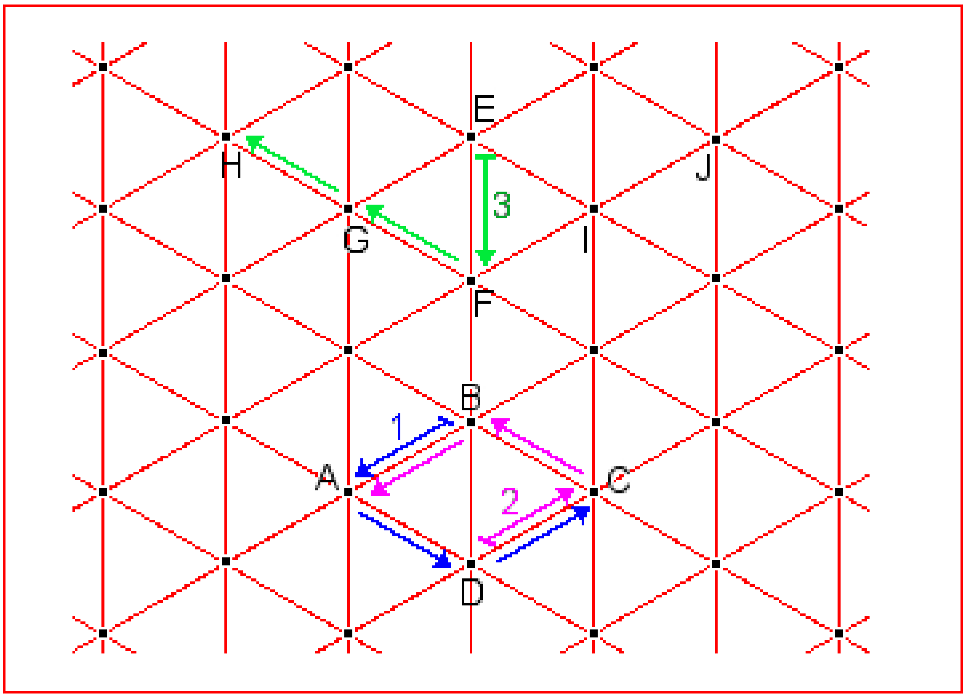
Pour y parvenir, nous allons attribuer les valeurs des états binaires de l'algèbre de *BOOLE* [3] (0 ou 1) aux 2 principales situations que nous avons abordé précédemment.

Reprenons également les mêmes notations que dans la partie précédente (à propos des points 1, 2 et 3).

- *Première situation :*

En considérant que l'ensemble $\{point\ 1; point\ 2\}$ tourne exclusivement dans le sens trigonométrique, le point 3 démarre en E et fini par être éjecté en H.

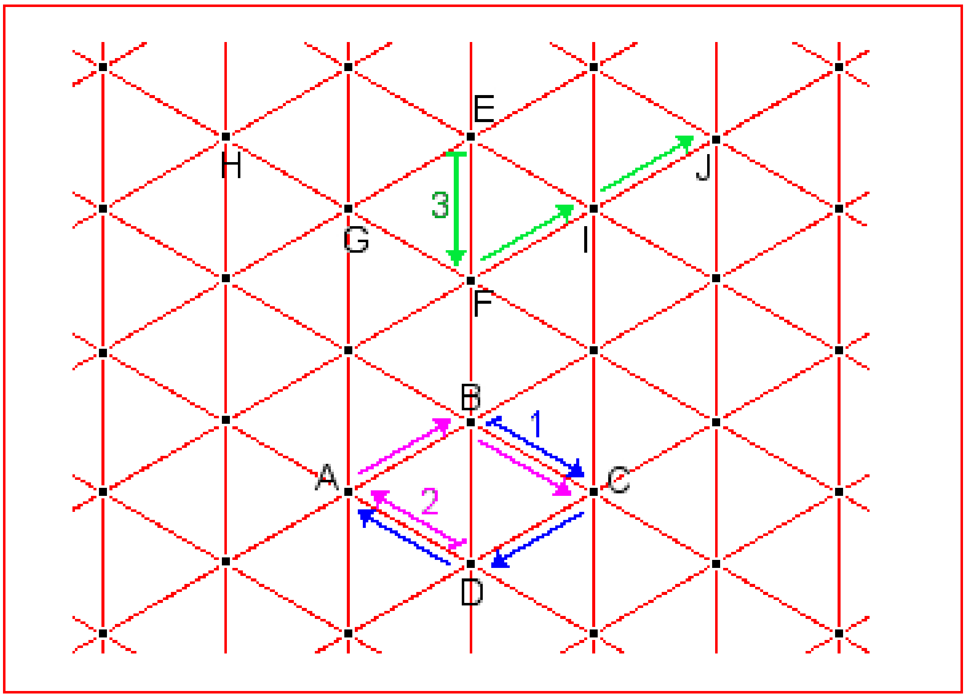
Attribuons la valeur 0 à cette situation.



- <u>*Seconde situation :*</u>

En considérant que l'ensemble $\{point\ 1; point\ 2\}$ tourne exclusivement dans le sens contraire à celui du sens trigonométrique, le point 3 démarre en E et fini par être éjecté en J.

Attribuons la valeur 1 à cette situation.



- *Codages des actions :*

En attribuant les valeurs 0 et 1 à chaque situation, il devient possible de coder les actions d'un tel système.

Nous devons pour cela préalablement convenir de règles de syntaxe :

La suite des valeurs consécutives 0110 marque le début et la fin d'un code d'action. Appelons ce code "ordre".

Le code binaire attribué à une action correspond à une suite de valeurs binaires consécutives 0 ou 1, ce code ne peut pas contenir la suite des valeurs consécutives attribuée au code "ordre" (donné ci-dessus), afin d'éviter qu'il puisse être confondu avec un ordre.

Si la suite des valeurs correspond à plusieurs 0 consécutifs entre les marqueurs de début et de fin (repérés par le code "ordre"), aucun changement n'est demandé.

- *Exemple :*

Attribuons des Actions à des suites de valeurs binaires.

La suite de valeurs 00001 est attribuée à l'*Action* 1.
La suite de valeurs 00010 est attribuée à l'*Action* 2.
La suite de valeurs 00100 est attribuée à l'*Action* 3.
La suite de valeurs 00101 est attribuée à l'*Action* 4.
La suite de valeurs 01000 est attribuée à l'*Action* 5.
La suite de valeurs 01001 est attribuée à l'*Action* 6.
La suite de valeurs 01010 est attribuée à l'*Action* 7.
La suite de valeurs 10000 est attribuée à l'*Action* 8.
La suite de valeurs 10001 est attribuée à l'*Action* 9.
La suite de valeurs 10010 est attribuée à l'*Action* 10.
La suite de valeurs 10100 est attribuée à l'*Action* 11.
La suite de valeurs 10101 est attribuée à l'*Action* 12.
...

Poursuivons en associant une tâche à chaque action :

l'*Action* 1 correspond au démarrage de la *Tâche* 1.
l'*Action* 2 correspond à l'arrêt de la *Tâche* 1.
l'*Action* 3 correspond au démarrage de la *Tâche* 2.
l'*Action* 4 correspond à l'arrêt de la *Tâche* 2.
l'*Action* 5 correspond au démarrage de la *Tâche* 3.
l'*Action* 6 correspond à l'arrêt de la *Tâche* 3.
l'*Action* 7 correspond au démarrage de la *Tâche* 4.
l'*Action* 8 correspond à l'arrêt de la *Tâche* 4.
...
l'*Action* n correspond au démarrage de toutes les tâches en même temps.
l'*Action* $(n+1)$ correspond à l'arrêt de toutes les tâches en même temps ("arrêt d'urgence", par exemple).

Ce système a donc la possibilité d'exécuter des tâches en parallèle (parmi celles qui lui auront été prédéfinies).

Ainsi, ce système libre peut intervenir sur l'ordre d'apparition des valeurs 0 et 1. Certaines suites de valeurs pourront correspondre aux marqueurs de début et de fin d'un code d'action, d'autres suites de valeurs pourront correspondre à des actions prédéfinies, et enfin, un autre ensemble de suite de valeurs ne correspondra à aucune action prédéfinie.

Il devient alors possible d'enchaîner une suite de valeurs qui permettront d'engendrer un enchaînement de tâches.

Par exemple, et selon les notations précédentes :

Le code : 0110000010110 permet d'exécuter le démarrage de la *Tâche* 1 uniquement.
Le code : 011000001011000000000000110 permet également d'exécuter uniquement la *Tâche* 1.
Le code : 0110000100110 permet d'exécuter l'arrêt de la *Tâche* 1 uniquement.
Le code : 01100000101100010001100000000000000000000110000100110 permet d'exécuter le démarrage de la *Tâche* 1, puis de la *Tâche* 2, puis une pause, puis l'arrêt de la *Tâche* 1.
...

- *Remarque 1 :*

La longueur du code croît avec la quantité d'actions que l'on souhaite attribuer à ce système.

Cependant, il n'est pas exclu qu'un codage plus simple puisse être plus efficace.

- *Remarque 2 :*

En restreignant volontairement les tâches que peut exécuter le système, cela devrait permettre d'éviter d'occasionner une gêne sur son environnement.

En effet, il convient d'être vigilant, étant donné qu'il serait toujours possible d'imaginer qu'un système libre aie un champ d'action plus important, c'est-à-dire avec des tâches définies telles qu'elles pourraient permettre la construction de nouvelles tâches, ce qui permettrait à ce système libre d'élargir lui-même son propre champ d'action. Dans ce cas, nous ne saurions anticiper une tâche potentiellement nuisible qu'à partir d'une surveillance importante de ce système.

Un problème à résoudre est de savoir si la surveillance de ce système peut être déjouée par ce sytème. Il faut donc être très vigilant dès le départ, c'est-à-dire dès la définition des tâches que pourra accomplir un tel système.

25

Avis éthique et implication personnelle

Avis personnel :

Au regard de tout cela, je pense que l'univers est compréhensible de manière exacte (même lorsqu'il s'agit d'utiliser les probabilités puisque nous savons exactement pourquoi il est inévitable de le faire dans certains cas : voir la variable de valeur de vérité indéfinissable U du **Chapitre V**), j'évite donc si possible toute approximation des formules pour garder cette exactitude (ou au moins, je garde les formules sous une forme qui pourrait permettre d'effectuer un développement en série connu, en évitant d'autres approximations qui feraient perdre des informations au cours d'un raisonnement).

De plus, j'ai maintenant l'intime conviction que les règles (la formule $D(N)$ entre autres, impliquant la discontinuité du temps et de l'espace, et impliquant une unité de mesure indivisible) et les "non-règles" (représentées par U) auxquels obéit notre univers n'auraient pas pu être différentes, et les constantes non plus. Dans le fond, tout est tel qu'il doit être, et cela de manière immuable. Dans la forme, la diversité des assemblages de matière est permise par l'inévitable indétérminisme qui résulte de la variable U. Autrement dit, d'autres univers possibles ne pourraient donc être qu'exclusivement des univers obéissants aux mêmes règles et "non-règles" que le nôtre, la seule différence serait que les "non-règles" permettrait une diversité (dans la mesure du possible) des formes d'assemblage de la matière (géométrie).

Dans un cas comme celui-ci, je soutiens donc que les mathématiques appliquées à la physique, ainsi que la logique permettent de comprendre l'ensemble de notre univers. Nous pourrions même dire que mathématiques et logique s'appliquent d'elles-mêmes à notre univers, sans que nous y puissions quoi que ce soit dans le fond (nos choix interviennent seulement sur la forme, c'est-à-dire sur la forme d'assemblages de matière...), et qu'il ne peut en être autrement.

Hypothèses et implications personnelles :

Cette théorie peut être vue comme un point de rencontre avec d'autres théories physiques qui se sont bâties d'après les expériences physiques, mais avec une base mathématique (et il est très important de le signaler).

Elle doit être perçue comme le point de départ le plus fondamentale, qui permettrait de rejoindre toutes les autres disciplines.

Cette théorie permet d'établir le lien entre longueurs d'ondes (ou période) et logique binaire, et de elle permet de considérer que les formules binaires (comme $f(M;x)$, $s(M)$, $\mathfrak{I}(M)$, ... utiles à la structure de la formule $D(N)$) peuvent être perçues comme des systèmes contenant un énoncé et qui attribue une valeur de vérité (une valeur binaire 0 ou 1) à une variable.

Ce qui permet de ramener le traitement des longueurs d'ondes (ou des périodes) au traitement d'énoncés, et donc au traitement d'informations. Par extrapolation, ceci doit permettre une traduction dans un langage compréhensible des informations qui peuvent être représentées par un ensemble de photons, et donc un assemblage de matière.

Ceci pourra permettre de comprendre, par le biais de ce langage de traduction, les assemblages de matière tel que les chaînes d'ADN. D'où j'ai bon espoir que dans le cas de “maladies génétiques” (et même de maladies en générale), nous pourrions découvrir les incohérences dans les informations contenues, source de problème. Et finalement, par le biais de ce langage, j'ai bon espoir que cela permette de traduire (dans l'autre sens) un remède exactement adapté à la maladie sous la forme d'un assemblage de matière strictement nécessaire. Ce qui éviterait les effets secondaires dûs à la présence de composés chimiques pouvant contenir des informations incohérentes (ou en tout cas incompatibles). Ce qui éviterait également d'avoir à se servir de cobayes vivants afin de tester les effets sur des organismes vivants. J'ai bon espoir que cette théorie soit d'abord utile à cette fin. Pour être claire, l'utiliser ne serait-ce même que partiellement à des fins militaires serait à l'exact opposé de la cohérence et même en dehors de toute intelligence. Je développe d'ailleurs ce point de vue par la suite, qui révèle même l'évidence de ce propos.

J'ai véritablement conscience de ce que cela implique d'avoir acquis la connaissance d'une formule telle que $D(N)$ et de pouvoir l'appliquer aux longueurs d'ondes et donc aux expériences physiques, ainsi que la logique liée à la notion de liberté. En effet, si quelqu'un avait la possibilité d'atteindre les bases de notre réalité par une théorie, alors que cela n'aurait jamais été fait, cette personne devient nécessairement la première à le faire. Et dans un cas comme celui-ci, elle devient nécessairement la dernière, puisque après ceci, plus personne n'aura besoin de le faire. Ce qui implique la plus grande responsabilité quant à guider les choix des personnes qui utiliserons les travaux d'une telle théorie. Car il est toujours possible de faire des choix cohérents ou des choix incohérents.

C'est pour cette raison que je pense que tout travail, ne serait-ce que supposé important par la personne qui le produit (la supposition inclu les cas où il est possible de s'être trompé), demande une implication personnelle. Or, si je pense avoir découvert une telle théorie, je la suppose nécessairement importante, je dois donc nécessairement m'impliquer en affirmant mes convictions personnelles afin d'éviter une mauvaise exploitation ou une exploitation détournée. De mon point de vue, c'est aussi parce que j'ai ces convictions que j'ai pu atteindre un tel degré de lucidité me permettant entre autres de trouver cette formule $D(N)$.

Par conséquent, s'il s'avérait exact que cette théorie puisse être utile à la compréhension de tout phénomène physique réel, j'affirme que le traitement des maladies devrait être la plus grande priorité. Cette théorie doit être perçue comme devant rendre service à l'humanité. je n'accorderai donc strictement aucun crédit (et j'insiste sur ce point) à des travaux qui se développeraient à partir de cette théorie, mais à des fins néfastes pour le reste de l'humanité et de la nature (il n'y a qu'à s'intéresser à certaines périodes l'histoire pour comprendre).

A ce sujet, le choix de chacun implique nécessairement sa propre responsabilité, même de manière strictement individuelle : nous ne sommes jamais obligé de participer à des choix incohérents, nous pouvons même à chaque instant choisir de ne pas y participer.

Cette théorie doit être exclusivement considérée comme un moyen potentiel d'être bénéfique à chaque organisme vivant, dans le respect de chaque organisme vivant, dans le respect de la nature, et dans le respect des choix de chaque individu. Par hypothèse, ceci inclu le respect des choix d'autres formes de vie consciente, cela va de soi.

L'aboutissement à une telle théorie n'a pu se faire que par le plus grand respect, elle ne peut donc pas être réduite à un aspect purement mathématique, elle s'accompagne nécessairement d'une philosophie se rapportant à l'écologie (vue dans le **Chapitre V**). Le respect de toute chose permettant l'émergence d'une vision juste des choses, seul le respect peut donc permettre de progresser vers l'optimisation de nos actions. C'est donc de manière évidente que je soutiens que le progrès ne pourrait plus se faire "en quantité suffisante" sans être accompagné d'une pensée écologique : il atteindrait même une limite plus rapidement s'il se passait de cette philosophie (car seul un état d'esprit respectueux peut conduire à comprendre les subtilités de la réalité).

Pour être accessible, un tel niveau de connaissance, ou même un niveau de connaissance supérieur impose tout cela.

Remarque importante :

Cette partie est indissociable du reste des travaux de la théorie complète (en 6 chapitres) intitulée :

"THEORIE DE DECOMPOSITION DES PHENOMENES CYCLIQUES"

Bibliographie

[1] Wikipédia : *Théorème de WILSON.*
http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Wilson&oldid=45672958

[2] Wikipédia : *Distribution de DIRAC.*
http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Distribution_de_Dirac&oldid=44197939

[3] Wikipédia : *Algèbre de BOOLE (logique).*
http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Alg%C3%A8bre_de_Boole_(logique)&oldid=46378177

[4] Wikipédia : *Formule de MINÁC-WILLANS.*
http://www.sens-neuchatel.ch/bulletin/no20/exc1.htm

[5] Wikipédia : *Fonction zêta de RIEMANN.*
http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Fonction_z%C3%AAta_de_Riemann&oldid=46256968

[6] Wikipédia : *Produit Eulérien.*
http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Produit_eul%C3%A9rien&oldid=46009496

[7] Wikipédia : *Conjecture de GOLDBACH.*
http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Conjecture_de_Goldbach&oldid=45847708

[8] Wikipédia : *Unités de PLANCK.*
http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Unit%C3%A9s_de_Planck&oldid=44063730

[9] DIDIER, Julia : *DICTIONNAIRE DE LA PHILOSOPHIE*. Larousse, 1984. ISBN 2-7242-4862-7.

[10] *Théorème d'incomplétude de GODEL.*
http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Th%C3%A9or%C3%A8me_d%27incompl%C3%A9tude_de_G%C3%B6del&oldid=45902223

[11] *Principe de relativité d'EINSTEIN.*
http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Principe_de_relativit%C3%A9&oldid=46360536