Preuve directe du grand théorème de Fermat : « $\forall$ z, y, x, n ϵ N+ , n>2 : $z^n \neq y^n + x^n$.»

1 – Etablissement d'une **règle d'exclusion :** ¬P(a,n) ∧ ¬P(b,n) → ¬P(a$_x$b,n) ,
et d'une **règle de réduction** : P(a$_x$b,n) → P(a,n) ∨ P(b,n) ,
– **Théorème F ,**
– Conditions nécessaires et suffisantes de **Validité** .
2 – Etablissement du **Théorème A** (2 versions) .

Chapitre 1 :
Règle de réduction d'une puissance de degré n égale à une somme ou une différence de deux puissances de même degré n.

Définitions :
Une propriété P ou nonP est attachée à toute puissance a^n, P(a,n) ou ¬P(a,n) :
P(a,n) =« la puissance a^n est somme ou différence de deux puissances de même degré n. »
¬P(a,n) =«la puissance a^n n'est pas somme ou différence de deux puissances de même degré n.»
a ϵ {x ; P(x,n)} :
a appartient à l'ensemble des puissances de degré n qui vérifient la propriété P(x,n) .
a ϵ {x ; ¬P(x,n)} :
a appartient à l'ensemble des puissances de degré n qui vérifient la propriété ¬P(x,n) .
<a, b> = 1 : a et b sont premiers entre eux (pgcd(a,b)=1).
N+ = N – {0} .
« Inférence : raisonnement consistant à admettre une proposition du fait de sa liaison avec d'autres propositions antérieurement admises »

Preuve directe de la règle de réduction :
Comme
(1) **pour tout** y, x, n ϵ N+ , et **n>2**,
$2^n \neq y^n + x^n$, pgcd(2, y, x) = 1, $3^n \neq y^n + x^n$, $2^n 3^n \neq y^n + x^n$, pgcd(2,3, y, x) = 1 ,
on peut écrire la propositions vraie :
(2) **il existe** a, b, n ∈ N+, pgcd(a,b)=1 et n>2
tel que a et b ϵ {x ; ¬P(x,n)}, [¬P(a,n) ∧ ¬P(b,n)] et [¬P(a$_x$b,n)]
et la **proposition toujours vraie :**
(3) **pour tout** a, b, n ∈ N+, pgcd(a,b)=1 et n>2,
si a et b ϵ {x ; ¬P(x,n)} ,
alors [¬P(a,n) ∧ ¬P(b,n) → ¬P(a$_x$b,n)∨P(a$_x$b,n)] .
La proposition :
(4) **il existe** a, b, n ∈ N+, pgcd(a,b)=1 et n>2
tel que a et b ϵ {x ; ¬P(x,n)} et [¬P(a,n) ∧ ¬P(b,n) → P(a$_x$b,n)]
est fausse, puisque sa contraposée :
(5) **il existe** a, b, n ∈ N+, pgcd(a,b)=1 et n>2
tel que a$_x$b ϵ {x ; ¬P(x,n)} et [¬P(a$_x$b,n) → P(a,n) ∨ P(b,n)]

est fausse, la prémisse (vraie) est en contradiction avec la conclusion.
(la multiplication est distributive par rapport à l'addition et la soustraction, et associative)
L'implication est donc fausse.
Par application du **raisonnement disjonctif** (dilemme) à la proposition toujours vraie (3) :

pour tout a, b, n $\in$ N+, pgcd(a,b)=1 et n>2,
si a et b $\in \{x ; \neg P(x,n)\}$,
alors $[\neg P(a,n) \wedge \neg P(b,n) \rightarrow \neg P(a_x b,n) \vee P(a_x b,n)] \wedge \neg[\neg P(a,n) \wedge \neg P(b,n) \rightarrow P(a_x b,n)]$,

la proposition toujours vraie (3) devient **la règle d'exclusion** :

(6) **pour tout** a, b, n $\in$ N+, pgcd(a,b)=1 et n>2,
si a et b $\in \{x ; \neg P(x,n)\}$,
alors $[\neg P(a,n) \wedge \neg P(b,n) \rightarrow \neg P(a_x b,n)]$

de contraposée la **règle de réduction** :

(7) **pour tout** a, b, n $\in$ N+, pgcd(a,b)=1 et n>2,
si $a_x b \in \{x ; P(x,n)\}$,
alors $[P(a_x b,n) \rightarrow P(a,n) \vee P(b,n)]$.

Preuve par l'absurde de la règle de réduction :
Soient la **proposition formellement vraie** :

(10) **pour tout** a, b, n $\in$ N+, pgcd(a,b)=1,
si a et b $\in \{x ; P(x,n)\}$,
alors $[P(a,n) \vee P(b,n) \rightarrow P(a_x b,n)]$,

(la multiplication est distributive par rapport à l'addition et la soustraction, et associative)
et, réciproquement, la **proposition toujours vraie** :

(11) **pour tout** a, b, n $\in$ N+, pgcd(a,b)=1,
si $a_x b \in \{x ; P(x,n)\}$,
alors $[P(a_x b,n) \rightarrow (P(a,n) \vee P(b,n)) \vee (\neg P(a,n) \wedge \neg P(b,n))]$.

Comme la proposition :

(12) **il existe** a, b, n $\in$ N+, pgcd(a,b)=1,
tel que $a_x b \in \{x ; P(x,n)\}$ et $[P(a_x b,n) \rightarrow \neg P(a,n) \wedge \neg P(b,n)]$

est fausse, puisque sa contraposée :

(13) **il existe** a, b, n $\in$ N+, pgcd(a,b)=1,
tel que a ou b $\in \{x ; P(x,n)\}$ et $[P(a,n) \vee P(b,n) \rightarrow \neg P(a_x b,n)]$

est fausse, car sa prémisse est en contradiction avec sa conclusion puisque par hypothèse :
$P(a,n) \vee P(b,n) \rightarrow P(a_x b,n)$ (10) ;
par application du **raisonnement disjonctif** (dilemme) à la proposition toujours vraie (11) :

pour tout a, b, n $\in$ N+, pgcd(a,b)=1,
si $a_x b \in \{x ; P(x,n)\}$,
alors $[P(a_x b,n) \rightarrow ((P(a,n) \vee P(b,n)) \vee (\neg P(a,n) \wedge \neg P(b,n))] \wedge \neg[P(a_x b,n) \rightarrow \neg P(a,n) \wedge \neg P(b,n)]$,

la proposition toujours vraie (11) devient, la **règle de réduction** :

(14) **pour tout** a, b, n $\in$ N+, pgcd(a,b)=1,
si $a_x b \in \{x ; P(x,n)\}$,
alors $[P(a_x b,n) \rightarrow P(a,n) \vee P(b,n)]$.

La règle de réduction, par réductions successives suivant des déductions logiquement vraies (inférences), permet d'aboutir à la **réduction terminale** :

Théorème F (F: en hommage à Fermat) **:**
$(Z^n = Y^n+X^n, Z=\Pi_{i=1}^m p_i^{\alpha}i , P(\Pi_{i=1}^m p_i^{\alpha}i,n)) \rightarrow$
$[\exists\ p_i^{\alpha}i \in E = \{ p_1^{\alpha}{}_1, p_2^{\alpha}{}_2, \ldots , p_m^{\alpha}{}_m\}$ tel que $(P(p_i^{\alpha}i,n), (p_i^{\alpha}i)^n = y^n \pm x^n , <p_i , y, x>=1)]$
où $Y, X, y, x, n, \alpha_i , m \in N+$, et $p_1, p_2, \ldots , p_m$ des nombres premiers.

Or le **théorème A** contredit la conclusion du théorème F.
Cette conclusion est fausse pour n>2 et ainsi $Z^n \neq Y^n+X^n$ pour n>2 .
Théorème A (A: en hommage à Abel) **:**
$[(\forall$ p premier (pair ou impair), $y, x, n, \alpha \in N+, n>2 : \neg P(p^{\alpha},n), (p^{\alpha})^n \neq y^n \pm x^n , , <p_i , y, x>=1)]$
$\rightarrow$
$[(\forall\ Z, Y, X, n \in N+, n>2 : Z= \Pi_{i=1}^m p_i^{\alpha}i , \neg P(\Pi_{i=1}^m p_i^{\alpha}i,n), Z^n \neq Y^n+X^n , <Z,Y,X>=1)]$

La règle d'exclusion :
Le théorème A et la règle d'exclusion (6) impliquent : $Z^n \neq Y^n+X^n$ pour n>2 .

Conditions nécessaires et suffisantes de Validité :
a, b, n $\in$ N+ , pgcd(a, b)=1 et n>2.

La règle d'exclusion : $\neg P(a,n) \wedge \neg P(b,n) \rightarrow \neg P(a_x b,n)$,
contraposée de la règle de réduction, indique que par des intégrations successives, avec $Z=a_x b$ et <a,b>=1, pour que $\neg P(Z,n)$, il suffit que tout facteur premier $p_i^{\alpha}i$ de Z soit tel que $\neg P(p_i^{\alpha}i,n)$.

La règle de réduction $P(a_x b,n) \rightarrow P(a,n) \vee P(b,n)$,
contraposée de la règle d'exclusion, indique qu'après des dérivations successives, avec $Z=a_x b$ et <a,b>=1, pour que P(Z,n) , il suffit qu'il existe au moins un facteur premier $p_i^{\alpha}i$ de Z tel que $P(p_i^{\alpha}i,n)$.

La condition pgcd(a,b)=1 est donc nécessaire pour distinguer les facteurs premiers $p_i^{\alpha}i$ de Z.

Chapitre 2 :

Démonstration du théorème A :

1 - Démonstration utilisant le développement en suites et séries numériques .

Par hypothèse (théorème F) :

$(Z^n=Y^n+X^n,\ Z^n=\prod_{i=1}^{m}(p_i^{\alpha_i})^n, P(Z,n), <Z,Y,X>=1) \rightarrow (\exists\ p_i^{\alpha}i$ tel que $P((p_i^{\alpha_i}),n), (p_i^{\alpha_i})^n=y^n \pm x^n, <p_i, y,x>=1)$

Posons $q_0^{\beta_0} = p_i^{\alpha_i}$, $(q_0^{\beta_0})^n = (p_i^{\alpha_i})^n = y^n \pm x^n = y_0^n \pm x_0^n$ et soit $q_k^{\beta_k}$ tel que $P((q_k^{\beta_k})^n)$:

$(q_k^{\beta_k})^n = y_k^n \pm x_k^n$, q_k nombre premier (pair ou impair), β_k, $n \in N^+$, $n>2$, k=0, 1, 2, … .

$<q_k, y_k, x_k>=1$.

Si $\mathbf{q_k = 2}$ alors on a : $(2^{\alpha_k})^n = y_k^n \pm x_k^n$, $< 2, y_k, x_k> = 1$, $\mathbf{n>2}$.

Comme tout entier n>2 est un multiple de 4 ou d’un nombre premier impair, il suffit de prouver le grand théorème de Fermat pour n=4 et pour chaque nombre premier impair.

Pour n impair :

L’égalité $(2^{\alpha_k})^n = y_k^n \pm x_k^n = (y_k \pm x_k)((y_k^n \pm x_k^n)/(y_k \pm x_k))$ est impossible, le premier membre de l’égalité est une puissance de 2 et, dans le produit du second membre de l’égalité , le facteur $[(y_k^n \pm x_k^n)/(y_k \pm x_k)]$ est impair. $[y_k > x_k \geq 1 \rightarrow (y_k^n \pm x_k^n)/(y_k \pm x_k) > 1]$.

Pour n = 4 :

1 - : $(2^{\alpha_k})^4 = y_k^4 + x_k^4$, $0 \equiv 2 \pmod 4$, égalité impossible, $y_k^4+x_k^4$, supérieur à 4, n’est pas une puissance de 2 .

2 - : $(2^{\alpha_k})^4 = y_k^4 - x_k^4 = (y_k^2 - x_k^2)(y_k^2 + x_k^2)$, égalité impossible, le facteur $(y_k^2+x_k^2)$, supérieur à 4, n’est pas une puissance de 2 $(y_k^2+x_k^2 \equiv 2 \pmod 4)$.

Donc, **l’égalité $(2^{\alpha_k})^n = y_k^n \pm x_k^n$, $y_k, x_k, n, \alpha_k \in N^+$, $n>2$, est impossible** et, par suite, **q_k est nécessairement impair** et un des deux nombres y_k ou x_k est pair et a, nécessairement, au moins deux facteurs premiers.

Dans l’égalité $(q_k^{\beta_k})^n = y_k^n \pm x_k^n$, avec n>2, supposons que x_k est pair, si nécessaire après une opération d’échange de signes et de dénominations : (1*) $(q_k^{\beta_k})^n = \pm y_k^n \pm x_k^n$.

Donc, **x_k est pair et a au moins 2 facteurs premiers.**

Par application du théorème F à x_k^n, on a :

$x_k = 2^{\alpha_k} a_k q_{k+1}^{\beta_{k+1}}$ et $P((q_{k+1})^{\beta_{k+1}})^n)$, q_{k+1} nombre premier impair, et l’égalité (1*) devient :

$(q_k^{\beta_k})^n = \pm y_k^n \pm (2^{\alpha_k} a_k q_{k+1}^{\beta_{k+1}})^n$,

y_k et a_k sont des nombres impairs, $a_k \geq 1$, k=0, 1, 2, … .

D’où **la suite** (± : + ou bien -) :

$(q_0^{\beta_0})^n = \pm y_0^n \pm x_0^n = \pm y_0^n \pm (2^{\alpha_0})^n a_0^n (q_1^{\beta_1})^n$

$(q_1^{\beta_1})^n = \pm y_1^n \pm x_1^n = \pm y_1^n \pm (2^{\alpha_1})^n a_1^n (q_2^{\beta_2})^n$

....

$(q_k^{\beta_k})^n = \pm y_k^n \pm x_k^n = \pm y_k^n \pm (2^{\alpha_k})^n a_k^n (q_{k+1}^{\beta_{k+1}})^n$

....

Le terme général $(q_k^{\beta_k})^n$ de la suite $\{(q_k^{\beta_k})^n\}$, q_k nombre premier impair, est tel que $(q_k^{\beta_k})^n \geq 3^n$.

Développement en série numérique :

La suite d'égalités ci-dessus permet d'associer à $(q_0^{\beta_0})^n$ une série numérique :

(1) $(q_0^{\beta_0})^n = \pm\, y_0^n \pm (2^{\alpha_0})^n a_0^n\, (y_1^n \pm (2^{\alpha_1})^n a_1^n\, (y_2^n \pm \ \dots\ \pm (2^{\alpha_k})^n a_k^n\, (y_{k+1}^n \pm x_{k+1}^n) \dots))$

D'où après développement suivant la suite donnée ci-dessus :

(2) $(q_0^{\beta_0})^n = \pm\, y_0^n \pm (2^{\alpha_0})^n a_0^n\, y_1^n \pm (2^{\alpha_0})^n (2^{\alpha_1})^n a_0^n\, a_1^n\, y_2^n \pm (2^{\alpha_0})^n (2^{\alpha_1})^n (2^{\alpha_2})^n a_0^n\, a_1^n\, a_2^n\, y_3^n \pm$
$\dots \pm (2^{\alpha_0})^n (2^{\alpha_1})^n (2^{\alpha_2})^n \dots (2^{\alpha_k})^n a_0^n\, a_1^n\, a_2^n \dots a_k^n\, y_{k+1}^n \pm \dots$.

Pour simplifier l'écriture, posons :

$c_k=\alpha_0 +\alpha_1 +\alpha_2 +\dots+\alpha_k$, $\alpha_k \geq 1$, k=0, 1, 2, … . $c_k \geq k+1$

$b_k=a_0\, a_1\, a_1 \dots a_K$, $a_K \geq 1$, $b_k \geq 1$, b_k est un nombre impair ,

d'où :

(3) $(q_0^{\beta_0})^n = \pm\, y_0^n \pm\ 2^{nc_0}\, b_0^n\, y_1^n \pm\ 2^{nc_1}\, b_1^n\, y_2^n \pm\ 2^{nc_2}\, b_2^n\, y_3^n \pm \dots \pm\ 2^{nc_k}\, b_k^n\, y_{k+1}^n \pm \dots$.

La somme de toute association d'un nombre quelconque des éléments $\pm\, 2^{nc_k}\, b_k^n\, y_{k+1}^n$, k=0, 1, 2, 3, .. , n'est jamais nulle, les coefficients 2^{nc_k} étant tous distincts et les nombres $b_k^n\, y_{k+1}^n$ étant impairs.

Ainsi le reste $R_k = \pm\, 2^{nc_k}\, b_k^n\, y_{k+1}^n \pm\ 2^{nc_{k+1}}\, b_{k+1}^n\, y_{k+2}^n \pm \dots$ est de valeur absolue :

$|R_k| \geq 2^{nc_k} \geq 2^{n(k+1)}$, d'où $\lim |R_k| \longrightarrow \infty$ $(k \longrightarrow \infty)$, ce qui conduit à une égalité impossible puisque le nombre $(q_0^{\beta_0})^n$ est fini.

Donc l'égalité $(q_0^{\beta_0})^n = \pm\, y_0^n \pm\ x_0^n$ est impossible pour n>2.

Autre formulation :

Le terme général de la série est de valeur absolue égale à : $2^{nc_k}\, b_k^n\, y_{k+1}^n \geq 2^{nc_k} \geq 2^{n(k+1)}$.

Comme $\lim 2^{n(k+1)} \longrightarrow \infty$ $(k \longrightarrow \infty)$, la série est divergente.

La condition nécessaire de convergence de Cauchy (1789-1857) n'étant pas satisfaite, la sommation totale de la série ne peut être égale à la limite assignée $(q_0^{\beta_0})^n$.

Donc l'égalité $(q_0^{\beta_0})^n = \pm\, y_0^n \pm\ x_0^n$ est impossible pour n>2.

L'hypothèse $(q_0^{\beta_0})^n = (p_j^{\alpha_j})^n = y^n \pm\ x^n$, déduite avec le théorème F de l'hypothèse initiale $Z^n=Y^n+X^n$, étant fausse pour n>2, l'égalité $Z^n=Y^n+X^n$ est impossible pour $Z,Y,X,n \in N^+$ et n>2.

2 - Démonstration utilisant le caractère de divisibilité des nombres et le développement en suites et séries numériques :
Par hypothèse $Z^n = Y^n + X^n$, d'où P(Z,n), P(Y,n), P(X,n) et P((ZYX),n), <Z,Y,X>=1, donc nécessairement, au moins trois facteurs premiers distincts vérifient la propriété P(a,n) .
Soit q^β , un facteur premier impair de ZYX tel que $P(q^\beta,n)$ et soit 2^α , le facteur premier pair de ZYX tel que, supposons, $P(2^\alpha,n)$.

Comme tout entier n>2 est un multiple de 4 ou d'un nombre premier impair, il suffit de prouver le grand théorème de Fermat pour n=4 et pour chaque nombre premier impair.

Soit $(2^\alpha)^n = y^n \pm x^n$, y, x, n, $\alpha \in N^+$, <2, y, x>=1,
n impair >2 :
L'égalité : $(2^\alpha)^n = y^n \pm x^n = (y \pm x)[(y^n \pm x^n)/((y \pm x)]$ est impossible, le premier membre est une puissance de 2 et dans le produit du second membre, le facteur $[(y^n \pm x^n)/((y \pm x)]$est impair .
$[y> x \geq 1 \rightarrow (y^n \pm x^n)/(y\pm x) > 1]$.
n = 4 :
1 - : $(2^\alpha)^4 = y^4+ x^4 \equiv 2 \pmod 4$, égalité impossible, ($y^4 + x^4$, supérieur à 4, n'est pas une puissance de 2) .
2 - : $(2^\alpha)^4 = y^4 - x^4 = (y^2 - x^2)(y^2 + x^2)$, égalité impossible, le facteur $(y^2 + x^2)$, supérieur à 4, n'est pas une puissance de 2, ($y^2+ x^2 \equiv 2 \pmod 4$)).

Donc, l'égalité $(2^\alpha)^n = y^n \pm x^n$, où y, x, n, $\alpha \in N^+$, <2, y, x>=1 et n>2, est impossible.

Soit $(q^\beta)^n = y^n \pm x^n$ **, où y, x, n** $\in N^+$ **, <q, y, x>=1 et n>2 , q nombre premier impair :**

n = 4 : $(q^\beta)^4 = y^4 \pm x^4$,
1 - : $(q^\beta)^4 = y^4 - x^4 = (y^2 - x^2)(y^2 + x^2)$,
les deux facteurs (impairs ≠ 1) du produit du second membre étant premiers entre eux et leur produit étant égal à une puissance d'un nombre premier, cette égalité est donc impossible.
2 - : $(q^\beta)^4 = y^4 + x^4$,
Posons
$(q_k^{\beta k})^4 = y_k^4 + x_k^4$, k=0, 1, 2, … , $q_0 = q$, $\beta_0 = \beta$, $y_0 = y$, $x_0 = x$, $<q_k, y_k, x_k>=1$.
D'où
$y_k^4 = ((q_k^{\beta k})^2 - x_k^2)\ ((q_k^{\beta k})^2 + x_k^2)$, $x_k^4 = ((q_k^{\beta k})^2 - y_k^2)\ ((q_k^{\beta k})^2 + y_k^2)$
et les nombres y_k et x_k ont chacun au moins deux facteurs premiers.
Comme $P(y_k,4)$ et $P(x_k,4)$, on en déduit $x_k = a_k q_{k+1}^{\beta k+1}$ tel que $P(q_{k+1}^{\beta k+1},n)$, $a_k \in N+$, $a_k \geq 2$ et l'on a $(q_k^{\beta k})^4 = y_k^4 + a_k^4 (q_{k+1}^{\beta k+1})^4$, k= 0, 1, 2, ….. .
D'où la **suite :**
$(q_0^{\beta 0})^4 = y_0^4 + x_0^4 = y_0^4 + a_0^4(q_1^{\beta 1})^4$
$(q_1^{\beta 1})^4 = y_1^4 + x_1^4 = y_1^4 + a_1^4(q_2^{\beta 2})^4$
……..

$(q_k^{\beta k})^4 = y_k^4 + x_k^4 = y_k^4 + a_k^4(q_{k+1}^{\beta k+1})^4$

………..

Comme $(q_0^{\beta_0})^4 > (q_1^{\beta_1})^4 > (q_2^{\beta_2})^4 > .... > (q_k^{\beta_k})^4 > ....$, la suite $\{(q_k^{\beta_k})^4\}$ est décroissante indéfiniment. Cette « descente infinie » est impossible, les nombres premiers impairs q_k étant supérieurs à 2 . L'égalité $(q_0^{\beta_0})^4 = y_0^4 + x_0^4$ est impossible .
Donc, l'égalité $(q^{\beta})^4 = y^4 \pm x^4$ est impossible .

Soit $(q^{\beta})^n = y^n + x^n$:
(Abel, in « Analyse indéterminée », par Robert D. Carmichael, 1929)
$(q^{\beta})^n = y^n + x^n = (y + x)[(y^n + x^n) / (y + x)]$ où le facteur $[(y^n + x^n)/(y+x)]$ peut s'écrire sous la forme :
$[(y^n + x^n) / (y + x)] = [[(y + x) - x]^n + x^n] / (y + x)$
$= [(y + x)^n - n(y + x)^{(n-1)}x + ... + n(y + x)x^{(p-1)}] / (y + x)$
$= (y + x)Q(y,x) + nx^{(p-1)}$ où $Q(y,x)$ est un polynôme en y et x à coefficients entiers .
Posons n=p, p premier impair .
Comme y et x sont premiers entre eux, les deux facteurs :
$(y + x)$ et $[(y + x)Q(y,x) + px^{(p-1)}]$ ont pour p.g.c.d 1 ou p .
Si p.g.c.d = 1, les deux facteurs du second membre, $(y + x)$ et $[(yp + xp) / (y + x)]$, sont premiers entre eux et leur produit admettant une décomposition en un seul facteur premier, l'égalité $(q^{\beta})^p = y^p + x^p$ est impossible .
Si p.g.c.d = p , alors p=q , et l'on a : $(q^{\beta})^q = (y + x)[(y + x)Q(y,x) + qx^{(p-1)}]$.
Les deux facteurs du second membre, $(y + x)$ et $[(y + x)Q(y,x) + qx^{(p-1)}]$, doivent être des puissances de q . Le terme $(y + x)Q(y,x)$ étant divisible par q^2 et $< q,y,x > =1$, le facteur $[(y + x)Q(y,x) + qx^{(p-1)}]$ n'est pas divisible par q^2 et donc n'est pas une puissance de q contrairement à l'hypothèse. L'égalité $(q^{\beta})^q = y^q + x^q$ est impossible .
Ainsi, l'égalité $(q^{\beta})^n = y^n + x^n$ est impossible .

Soit $(q^{\beta})^n = y^n - x^n$:
Posons : $(q_k^{\beta_k})^n = y_k^n - x_k^n$, k = 0, 1, 2, ..., $q_0=q$, $\beta_0=\beta$, $y_0=y$, $x_0=x$.
L'égalité $(q_k^{\beta_k})^n = y_k^n - x_k^n = (y_k - x_k)[(y_k^n - x_k^n)/(y_k - x_k)]$ implique nécessairement $y_k - x_k = 1$ et l'on a $y_k > x_k > q_k^{\beta_k}$, $y_k^n = x_k^n + (q_k^{\beta_k})^n$.
Le nombre x_k a au moins deux facteurs premiers sinon on aurait la contradiction :
$y_k - x_k =1$ et $y_k^n = x_k^n + (q_k^{\beta_k})^n$ impliquant $y_k - q_k^{\beta_k} = 1$ et $x_k = q_k^{\beta_k}$, ce qui est impossible puisque $<q_k,y_k,x_k>=1$.
Posons $x_k = a_k q_{k+1}^{\beta k+1}$ tel que $P(q_{k+1}^{\beta k+1},n)$, $a_k \in N+$, $a_k \geq 2$, et
$(q_k^{\beta_k})^n = y_k^n - a_k^n(q_{k+1}^{\beta k+1})^n$, $q_k^{\beta k}$ premier impair, k= 0, 1, 2, ...
D'où la **suite :**
$(q_0^{\beta_0})^n = y_0^n - x_0^n = y_0^n - a_0^n(q_1^{\beta 1})^n$
$(q_1^{\beta_1})^n = y_1^n - x_1^n = y_1^n - a_1^n(q_2^{\beta 2})^n$
....
$(q_k^{\beta_k})^n = y_k^n - x_k^n = y_k^n - a_k^n(q_{k+1}^{\beta k+1})^n$
....

Le terme général $(q_k^{\beta_k})^n$ de la suite $\{(q_k^{\beta_k})^n\}$ est tel que $(q_k^{\beta_k})^n \geq 3^n$.

Développement en **série numérique alternée :**

La suite d'égalités ci-dessus permet d'associer à $(q_0^{\beta_0})^n$ une série numérique :
(1) $(q_0^{\beta_0})^n = y_0^n - a_0^n(y_1^n - a_1^n(y_2^n - a_2^n(y_3^n - .... - a_k^n(y_{k+1}^n - x_{k+1}^n) ....)))$

D'où le développement en série alternée :
(2) $(q_0^{\beta_0})^n = y_0^n - a_0^n y_1^n + a_0^n a_1^n y_2^n - a_0^n a_1^n a_2^n y_3^n + \;\; \ldots. \;\; + (-1)^{k+1} a_0^n a_1^n a_2^n \; \ldots \; a_k^n y_{k+1}^n \;\; \ldots.$

Pour simplifier l'écriture, posons : $b_k = a_0 a_1 a_2 \; \ldots \; a_k$; $a_k \geq 2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$
D'où :
(3) $(q_0^{\beta_0})^n = y_0^n - b_0^n y_1^n + b_1^n y_2^n - b_2^n y_3^n + \;\; \ldots. \;\; + (-1)^{k+1} b_k^n y_{k+1}^n \;\; \ldots.$

Le terme général de la série a pour valeur absolue : $b_k^n y_{k+1}^n > 2^{n(k+1)}$.
Comme $2^{n(k+1)} \to \infty$ $(k \to \infty)$, la série est **divergente**.
La condition nécessaire de convergence (Cauchy) n'étant pas satisfaite, la sommation totale de la série ne peut être égale à la limite assignée $(q_0^{\beta_0})^n$.
Donc, l'égalité, $(q_0^{\beta_0})^n = y_0^n - x_0^n$ est impossible .

Les hypothèses, $(p_j^{\alpha j})^n = y^n \pm x^n$, $q_0^{\beta_0} = p_j^{\alpha j}$, $y_0=y$, $x_0=x$, $(q_k^{\beta_k})^n = y_k^n \pm x_k^n$, (k=0, 1, 2, …) (où p_j et q_k sont des nombres premiers) , déduites de l'hypothèse initiale $Z^n = Y^n + X^n$, n >2 , étant fausses, l'égalité $Z^n = Y^n + X^n$, Z,Y, X $\in$ N+ et n >2 , est impossible .

Ahmed Idrissi Bouyahyaoui