

Forme quantitative du second principe

Au chapitre précédent, on s'est limité à l'étude des cycles thermodynamiques. On va maintenant étendre la discussion au cas des **transformations ouvertes**.

De plus, on n'a donné jusqu'à présent qu'une **formulation qualitative** du second principe. On peut aussi, et cela s'avère intéressant en pratique, en donner une **formulation quantitative**.

Ce faisant, on introduira une nouvelle variable thermodynamique, **l'entropie** ... tout comme le premier principe nous avait conduit à introduire les variables énergie et enthalpie.

L'inégalité de Clausius

L'inégalité de Clausius est un **corollaire du second principe** qui s'exprime comme suit :

Pour tout système fermé à température uniforme décrivant un cycle, on a :

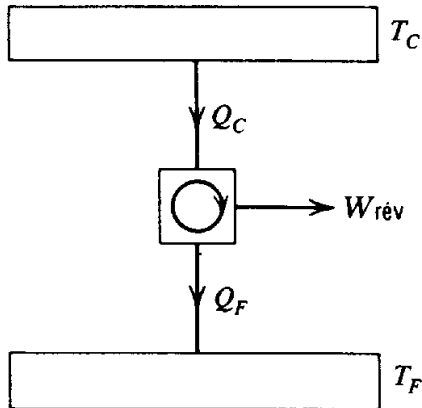
$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0$$

où δQ est l'élément de chaleur reçue sur un élément de cycle, et T la température du système à l'état correspondant.

On va à présent vérifier la validité de l'expression pour les **machines thermiques et frigorifiques réversibles et irréversibles**.

L'inégalité de Clausius

Nous commencerons par une **machine thermique réversible**. Dans la mesure où une telle machine peut être obtenue par combinaison de cycle de Carnot, on se contentera de **vérifier la validité de l'inégalité de Clausius pour un cycle de Carnot**



Comme un cycle de **Carnot est réversible**, les échanges de chaleur sont isothermes, à la température de la source avec laquelle s'effectue l'échange. Par conséquent, on écrit :

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_C}{T_C} - \frac{Q_F^*}{T_F} = 0$$

Considérons à présent un cycle parcourant le même chemin thermodynamique et prélevant la même quantité de chaleur à la source chaude Q_C , mais dont certaines parties sont parcourues de manière **irréversible**.

L'inégalité de Clausius

Le cycle étant irréversible, on a $W_{irr}^* < W_{rev}^*$ et donc $Q_{F,irr}^* > Q_{F,rev}^*$

Il en résulte

$$\int_C \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_C}{T_C} \quad \text{et} \quad \int_F \frac{\delta Q^*}{T} = \frac{Q_{F,irr}^*}{T_F} > \frac{Q_{F,rev}^*}{T_F}$$

En soustrayant, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_C \frac{\delta Q}{T} - \int_F \frac{\delta Q^*}{T} &= \int_C \frac{\delta Q}{T} + \int_F \frac{\delta Q}{T} \\ &= \oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_C}{T_C} - \frac{Q_{F,irr}^*}{T_F} < \frac{Q_C}{T_C} - \frac{Q_{F,rev}^*}{T_F} = 0 \end{aligned}$$

L'inégalité de Clausius

La validité de l'inégalité de Clausius vient donc d'être démontrée pour une machine thermique réversible ou irréversible.

Abordons maintenant le cas d'une **machine frigorifique**.

Dans la mesure où un **cycle de Carnot frigorifique** n'est d'autre qu'un cycle de Carnot inversé, il satisfait aussi :

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_F}{T_F} - \frac{Q_C^*}{T_C} = 0$$

Dans le cas d'un cycle frigorifique parcourant le même chemin thermodynamique et prélevant la même quantité de chaleur à la source froide Q_F , mais dont certaines parties sont parcourues de manière **irréversible**, $W_{irr} > W_{rev}$, et donc

$$Q_{C,irr}^* > Q_{C,rev}^*$$

L'inégalité de Clausius

Il en résulte

$$\int_F \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_F}{T_F} \quad \text{et} \quad \int_C \frac{\delta Q^*}{T} = \frac{Q_{C,irr}^*}{T_C} > \frac{Q_{C,rev}^*}{T_C}$$

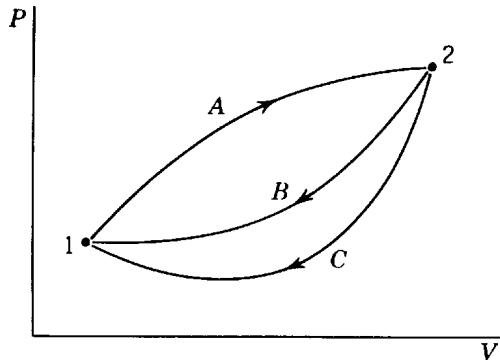
En soustrayant, on obtient cette fois :

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_F \frac{\delta Q}{T} - \int_C \frac{\delta Q^*}{T} < \frac{Q_F}{T_F} - \frac{Q_{C,rev}^*}{T_C} = 0$$

Ce qui complète la démonstration de la proposition.

L'entropie

Considérons **deux cycles réversibles** composés respectivement des transformations A et B , et A et C . Puisque les deux cycles sont réversibles, on a :



$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_A + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_B = 0$$

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_A + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_C = 0$$

En soustrayant, on déduit :

$$\int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_B = \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_C$$

L'intégrale ne dépend pas du chemin parcouru (pour une transformation réversible !) et, par conséquent, $(\delta Q)/T$ _{rev} est une **différentielle exacte**.

L'entropie

On désigne par le symbole S la fonction dont la différentielle

$$dS = \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev}$$

et on lui donne le nom d'**entropie** du système. Par construction, il s'agit d'une variable d'état du système.

En intégrant de l'état initial 1 jusqu'à l'état final 2 (par exemple en suivant le chemin A), on aura donc :

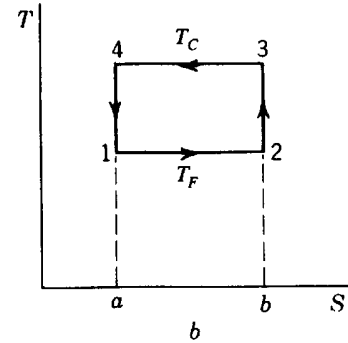
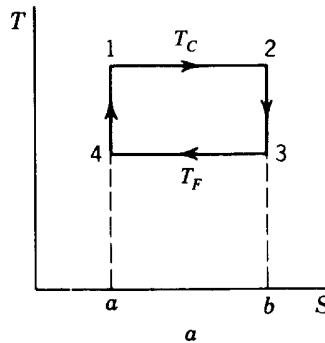
$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev}$$

Remarques

- Bien que pour calculer la variation d'entropie entre deux états 1 et 2, on soit tenu d'intégrer le terme $\delta Q/T$ le long d'une transformation réversible, l'entropie étant une variable d'état, **la différence d'entropie entre deux états est indépendante non seulement du chemin parcouru, mais aussi de la nature (réversible ou non) de la transformation subite.**
- Tout comme l'énergie, l'entropie - au vu de sa définition - n'est définie qu'à une constante près. **La valeur absolue de l'entropie n'est fixée que d'après le troisième principe de la thermodynamique** qui stipule que l'entropie d'une substance pure est nulle au zéro absolu des températures.
La valeur absolue de l'entropie n'est toutefois nécessaire qu'en cas de changement de composition, c'est-à-dire en cas de réactions chimiques.

Variations d'entropie au cours de transformations réversibles

Le cycle de Carnot se décompose en 4 transformations :



Chauffage isotherme Dans cette transformation, on a :

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_{12}}{T_C}$$

Dans le diagramme entropique (T-S), elle est représentée par l'horizontale 1 – 2. On en déduit que la chaleur échangé $Q_{12} = T_C(S_2 - S_1)$ est l'aire 1 – 2 – b – a – 1.

Variations d'entropie au cours de transformations réversibles

Détente adiabatique Cette transformation étant adiabatique et réversible, $dS = \delta Q/T = 0$, et donc l'entropie reste constante. Cette transformation représentée par le segment vertical 2 – 3 dans le diagramme entropique est appelée **isentropique**.

Refroidissement isotherme Comme pour la transformation 1 – 2, on a :

$$S_4 - S_3 = \int_3^4 \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_{34}}{T_F}$$

grandeur qui est négative puisque $Q_{34} < 0$. La chaleur cédée à la source froide $Q_F^* = -Q_{34}$ est l'aire 3 – 4 – a – b – 3.

Compression adiabatique Il s'agit de nouveau d'une **isentropique**, représentée par le segment vertical 4-1.

Variations d'entropie au cours de transformations réversibles

Le travail net du cycle W^* étant égal à la chaleur nette reçue, est représenté dans le diagramme entropique par l'aire 1 – 2 – 3 – 4, de sorte qu'**on peut exprimer le rendement thermique comme un rapport de deux aires** :

$$\varepsilon_{th} = \frac{W^*}{Q_C} = \frac{\text{aire } 1 - 2 - 3 - 4 - 1}{\text{aire } 1 - 2 - b - a - 1}$$

En inversant le sens de parcours, on obtient le cycle de Carnot frigorifique.

Deux relations thermodynamiques importantes

Si l'on considère une **transformation réversible d'un système fermé**, sans variation d'énergies cinétique et potentielle, on a, par le premier principe :

$$dU = \delta Q + \delta W$$

Mais, par ailleurs, la transformation étant réversible (et donc quasi-statique), on a :

$$\delta W = -p dV \quad \text{et} \quad \delta Q = T dS$$

On en déduit que, pour une telle transformation :

$$dU = T dS - p dV$$

A priori, cette équation - ne faisant intervenir que des variables d'état - doit pouvoir être intégrée entre deux états quelconques, que la transformation soit réversible ou non.

Deux relations thermodynamiques importantes

Cependant, pour pouvoir effectuer l'intégration, il faut connaître le chemin suivi, ce qui, en toute rigueur, ne peut être défini que pour une transformation quasi-statique, et donc ... réversible !

L'association de la relation $dU = T dS - p dV$ et de la définition de l'enthalpie $H = U + pV$ conduit à :

$$\begin{aligned}dH &= dU + p dV + V dp \\ &= T dS - p dV + p dV + V dp = T dS + V dp\end{aligned}$$

On en déduit les formes intensives suivantes :

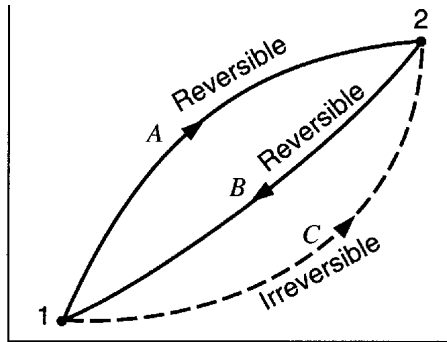
$$dh = T ds + v dp$$

$$du = T ds - p dv$$

qui portent le nom de **relations de Gibbs**

Transformations ouvertes irréversibles de systèmes fermés

Considérons un système fermé décrivant les cycles représentés ci dessous.



Le cycle composé des transformations A et B étant **réversible**, on a

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_A + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_B = 0$$

Par ailleurs, pour le cycle **irréversible** composé de la transformation irréversible C et de la transformation réversible B , l'inégalité de Clausius s'écrit :

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_C + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_B < 0$$

Transformations ouvertes irréversibles de systèmes fermés

De façon à faire disparaître l'inégalité, on peut aussi écrire

$$\int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_C + \int_2^1 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} = -\Delta S^+$$

où le terme ΔS^+ traduit l'effet d'éventuelles irréversibilités. Ce terme est toujours positif, ou nul en l'absence d'irréversibilités. En fonction de la définition de la variation d'entropie, il vient alors

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \left(\frac{\delta Q}{T} \right)_{rev} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \Delta S^+$$

Pour rappel, le membre de gauche de cette dernière relation est fixé par la seule connaissance des états 1 et 2, indépendamment du processus suivi entre ces deux états.

Transformations ouvertes irréversibles de systèmes fermés

Les termes du membre de droite dépendent par contre explicitement de la nature du processus.

Le premier terme est associé au transfert de la chaleur et peut être interprété comme un **transfert d'entropie** accompagnant ce dernier, et ce avec les mêmes conventions de signe.

Le second terme du membre de droite représente la **production nette d'entropie**. Ce terme **implique que** :

- La quantité de chaleur (positive) échangée avec une source chaude pour passer d'état 1 à un état 2 est d'autant plus faible que les irréversibilités sont présentes.
- La quantité de chaleur (négative) échangée avec une source froide est d'autant plus grande en valeur absolue qu'il y a des irréversibilités.
- La variation d'entropie d'un système au cours d'une transformation résulte de deux effets, à savoir les échanges de chaleur avec le monde extérieur et les irréversibilités.

Transformations ouvertes irréversibles de systèmes fermés

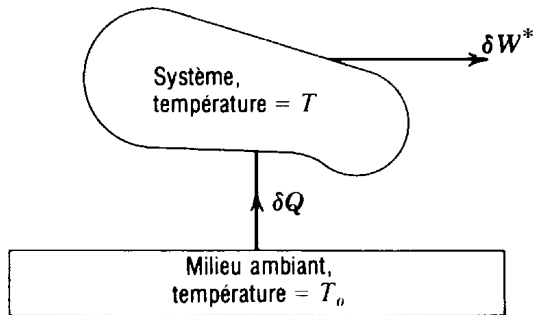
- Les échanges de chaleur peuvent conduire, selon leur signe, à une augmentation ou à une diminution de l'entropie du système.
- Les irréversibilités sont toujours responsables d'une augmentation d'entropie.
- Alors que pour une transformation réversible, les aires sous les courbes représentant la transformation dans les diagramme $T - s$ et $p - v$ sont égales respectivement, à la chaleur échangée et au travail fourni, il n'en est plus de même pour une transformation irréversible.

D'ailleurs, on ne peut pas - à proprement parler - définir les états intermédiaires d'une transformation irréversible puisque la notion d'état implique l'équilibre ... et que l'irréversibilité d'une transformation va de pair avec un écart par rapport à l'équilibre.

C'est la raison pour laquelle il est préférable de représenter les transformations irréversibles par des pointillés dans le diagrammes thermodynamiques.

Le principe de l'accroissement de l'entropie

Considérons un système fermé subissant une transformation infinitésimale. Au cours de cette transformation, il reçoit une certaine quantité de chaleur δQ du monde extérieur et fournit un travail.



Supposons qu'au cours de cette transformation, le système soit à une température T , et que le monde extérieur soit à une température $T_0 > T$.

Pour le système, on a

$$dS_{sys} \geq \frac{\delta Q}{T}$$

alors que pour le monde extérieur on a

$$dS_{ext} = -\frac{\delta Q}{T_0}$$

Le principe de l'accroissement de l'entropie

car, si on considère le monde extérieur comme une source, l'échange de chaleur ne modifie pas sa température, et donc la transformation est réversible.

En sommant les deux variations d'entropie, on obtient :

$$dS_{tot} = dS_{sys} + dS_{ext} \geq \frac{\delta Q}{T} - \frac{\delta Q}{T_0} = \frac{\delta Q}{T} \left(1 - \frac{T}{T_0}\right) > 0$$

Si l'on suppose au contraire que $T_0 < T$, alors l'échange de chaleur est dans le sens contraire, c'est-à-dire $\delta Q < 0$, et l'on a de même $dS_{tot} \geq 0$, de sorte que la variation d'entropie de l'ensemble système + monde extérieur est toujours positive.

Ce résultat est connu sous le nom de **principe d'accroissement de l'entropie**. Il indique que les seules transformations possibles sont celle pour lesquelles l'entropie globale augmente ou reste constante. Sauf pour ce cas limite, la transformation qui ramènerait le système et le monde extérieur dans son état initial est impossible.

L'entropie d'un gaz parfait

L'entropie d'un gaz parfait s'obtient directement des équations de Gibbs, des expressions de l'énergie interne et de l'enthalpie, et de la loi des gaz parfait. Ainsi, on obtient :

$$T ds = du + p dv = c_v dT + p dv$$

d'où, en divisant par T :

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T} dv = c_v \frac{dT}{T} + \mathcal{R} \frac{dv}{v}$$

Semblablement, à l'aide de la seconde formulation de Gibbs, on écrit :

$$T ds = dh - v dp = c_p dT - v dp$$

d'où, en divisant à nouveau par T :

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - \frac{v}{T} dp = c_p \frac{dT}{T} - \mathcal{R} \frac{dp}{p}$$

L'entropie d'un gaz parfait

En intégrant les relations

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + \mathcal{R} \frac{dv}{v} = c_p \frac{dT}{T} - \mathcal{R} \frac{dp}{p}$$

on obtient

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 c_v \frac{dT}{T} + \mathcal{R} \ln \frac{v_2}{v_1} = \int_1^2 c_p \frac{dT}{T} - \mathcal{R} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Si l'on tient compte des variations des chaleurs massiques avec la température, on peut calculer une fois pour toutes les intégrales et les tabuler en fonction de la température, par exemple :

$$\Phi^0(T) = \int_{T_0}^T c_p \frac{dT}{T}$$

La transformation isentropique d'un gaz parfait

La variation d'entropie est alors donnée par exemple par l'expression

$$s_2 - s_1 = \Phi^0(T_2) - \Phi^0(T_1) - \mathcal{R} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Et cette expression peut être utilisée pour déterminer la variation de pression pour une évolution adiabatique et réversible (et donc **isentropique**) entre deux températures :

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{\mathcal{R}} \int_{T_1}^{T_2} c_p \frac{dT}{T} = \frac{\Phi^0(T_2) - \Phi^0(T_1)}{\mathcal{R}}$$

Si l'on suppose maintenant les chaleurs massiques constantes, ces expressions se simplifient et l'on obtient :

$$s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \mathcal{R} \ln \frac{v_2}{v_1} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \mathcal{R} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

La transformation isentropique d'un gaz parfait

A l'aide de la relation de Mayer et de la définition du γ :

$$c_p - c_v = \mathcal{R} \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

ces expressions permettent enfin de déterminer les relations entre les rapports de pression, de température, et de volume massique pour une transformation isentropique :

$$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \qquad \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{p_2}{p_1} \qquad p_2 v_2^\gamma = p_1 v_1^\gamma$$

En particulier, on constate que, pour une transformation isentropique on a

$$pv^\gamma = cte$$

qui porte le nom de **loi de Laplace**.

La transformation polytropique d'un gaz parfait

Le modèle **polytropique** permet de modéliser l'**évolution réelle** du fluide en tenant compte des **irréversibilités** ou **d'éventuels transferts de chaleur** qui influencent l'évolution de l'entropie.

Considérons dans un premier temps le cas d'une **compression adiabatique** accompagnées d'irréversibilités d'un gaz parfait à chaleurs spécifiques constantes.

Le modèle polytropique postule que l'évolution de l'entropie est proportionnelle à la variation de pression :

$$Tds = kvdp$$

En utilisant la loi de Gibbs, on obtient successivement

$$Tds = kvdp = dh - vdp$$

$$dh = c_p dT = (1 + k)vdp = (1 + k) \frac{dp}{p} \mathcal{R}T$$

La transformation polytropique d'un gaz parfait

En repartant de l'expression précédente

$$(1 + k) \frac{dp}{p} \mathcal{R}T = c_p dT$$

on obtient successivement

$$(1 + k) \frac{dp}{p} \frac{\mathcal{R}}{c_p} = \frac{dT}{T}$$

$$(1 + k) \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} + \frac{dv}{v}$$

$$\left[(1 + k) \frac{\gamma - 1}{\gamma} - 1 \right] \frac{dp}{p} = \frac{dv}{v}$$

et enfin

$$\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} \frac{\gamma}{\gamma - (1 + k)(\gamma - 1)} = 0$$

La transformation polytropicque d'un gaz parfait

En posant

$$m = \frac{\gamma}{\gamma - (1 + k)(\gamma - 1)} = \frac{\gamma}{1 - k(\gamma - 1)} > \gamma$$

on écrit en définitive :

$$\frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} m = 0$$

En intégrant cette dernière relation, on obtient :

$$pv^m = cte \quad \text{ou encore} \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{m}{m-1}}$$

qui formule la **loi polytropicque** pour une **compression adiabatique s'accompagnant d'irréversibilités**.

Dans le cas d'une **détente**, on pose $Tds = -kvd p$ et on obtient $m < \gamma$.

La transformation polytropique d'un gaz parfait

Considérons à présent un système fermé qui subit une **compression réversible avec échange de chaleur**. Si le fluide est refroidi, on pose $T ds = -k v dp$, et l'exposant (m) de la polytropique est inférieur à γ . Le travail spécifique à fournir pour comprimer le fluide est égal à :

$$\begin{aligned} w_{12} &= - \int_1^2 p dv = -p_1 v_1^m \int_1^2 v^{-m} dv = -p_1 v_1^m \frac{v_2^{1-m} - v_1^{1-m}}{1-m} \\ &= \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{m-1} = \frac{\mathcal{R}(T_2 - T_1)}{m-1} \quad m \neq 1 \end{aligned}$$

On peut de même calculer la chaleur spécifique échangée au cours de la transformation. En supposant c_v constant, on obtient :

$$u_2 - u_1 = c_v(T_2 - T_1) = \frac{\mathcal{R}(T_2 - T_1)}{\gamma - 1} = \frac{p_2 v_2 - p_1 v_1}{\gamma - 1}$$

La transformation polytropicque d'un gaz parfait

La quantité de chaleur échangée s'obtient par application du premier principe :

$$q_{12} = (u_2 - u_1) - w_{12} = \frac{m - \gamma}{(\gamma - 1)(m - 1)}(p_2 v_2 - p_1 v_1)$$

Lorsque $m = 1$, ce qui correspond à une transformation isotherme, les expressions précédentes ne sont plus valables. Dans ce cas, on a :

$$w_{12} = -p_1 v_1 \int_1^2 v^{-1} dv = -p_1 v_1 \ln \frac{v_2}{v_1} = \mathcal{R}T_1 \ln \frac{p_2}{p_1}$$

et comme la variation d'énergie interne est nulle, la chaleur échangée est l'opposée du travail :

$$q_{12} = -w_{12} = -\mathcal{R}T_1 \ln \frac{p_2}{p_1}$$

Le second principe pour les systèmes ouverts

Dans le cas d'un **système ouvert**, il est possible de démontrer que le travail échangé lors d'une **transformation réversible** vaut :

$$w = \int_e^s v dp + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e)$$

Dans le **cas particulier** d'une transformation **sans échange de travail** (comme l'écoulement dans une canalisation, une tuyère), cette expression devient :

$$\int_e^s v dp + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e) = 0$$

équation connue en mécanique des fluides sous le nom d'**équation de Bernoulli**.

Les rendements des transformations adiabatiques

Dans le **cas particulier** de fluides à **masse volumique constante**, elle se simplifie encore :

$$\frac{p_s - p_e}{\rho} + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e) = 0$$

L'expression du **second principe** pour un **système ouvert** et une **transformation réversible**

$$w = \int_e^s v dp + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e)$$

est donc largement employée pour tous les systèmes ouverts avec échange de travail comme les **turbomachines**.

Dans de nombreux cas, les variations d'énergie cinétique et potentielle sont négligeables, de sorte que le travail par unité de masse est simplement :

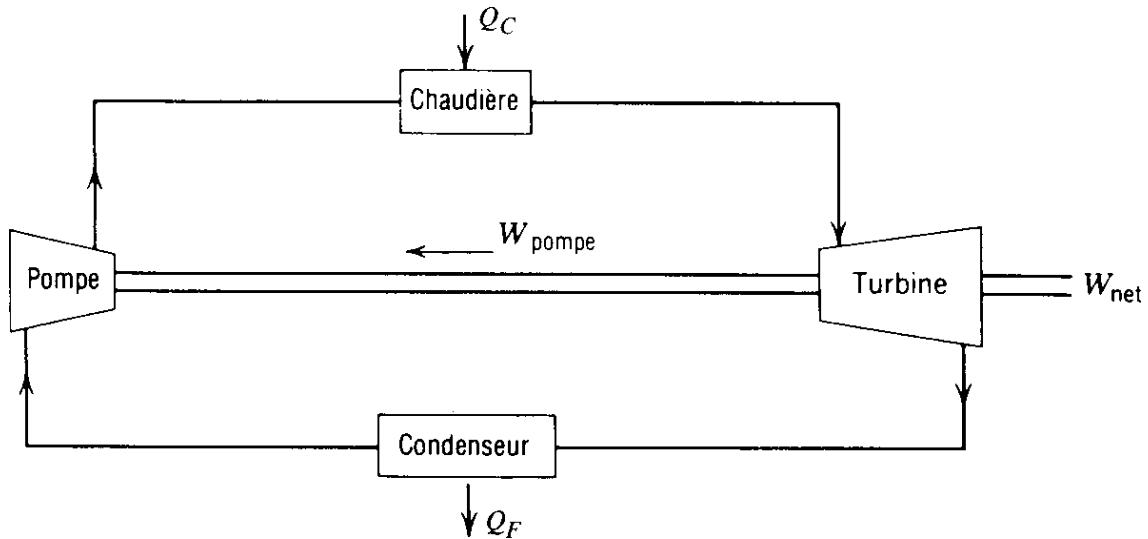
$$w = \int_e^s v dp = \int_e^s \frac{dp}{\rho}$$

Les rendements des transformations adiabatiques

On constate donc que le travail transmis à l'arbre d'une turbomachine est directement lié au volume massique du fluide la traversant.

Par conséquent, dans le cas d'une centrale thermique à vapeur telle qu'idéalisée ci-après, la pression reste constante dans les composants où aucun travail n'est échangé, et donc l'augmentation de pression dans la pompe est égale à la chute de pression dans la turbine.

Les rendements des transformations adiabatiques



De plus, puisque la pompe comprime du liquide dont la masse volumique est très grande par rapport à celle de la vapeur détendue dans la turbine, la puissance consommée par la pompe est nettement inférieure à celle fournie par la turbine, la différence étant la puissance nette fournie par la centrale

Les rendements des transformations adiabatiques

Comme on l'a vu précédemment, l'efficacité d'un cycle est bornée par l'efficacité du cycle de Carnot, qui ne dépend que des températures des sources (chaude et froide), et donc ne donne en soi aucune information quant au degré de perfection d'un dispositif ou de ses composants. Nous allons à présent **définir l'efficacité (le rendement) des composants d'un cycle**. On ne considère ici que des **systèmes ouverts en régime permanent**.

Pour les **systèmes avec échange de travail**, le rendement est défini par :

- $\eta = \frac{w_{ideal}}{w}$ pour une machine réceptrice (pompe, ventilateur, compresseur)
- $\eta = \frac{w^*}{w_{ideal}^*}$ pour une machine motrice (turbine)

où $w_{ideal}^{(*)}$ serait le travail reçu (fourni) par une machine idéale. Les diverses définitions du rendement diffèrent quant à la définition de la machine idéale.

Les rendements des transformations adiabatiques

On a vu que le travail échangé lors d'une transformation **adiabatique réversible** d'un système ouvert vaut :

$$w = \int_e^s v dp + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e)$$

alors que le travail échangé lors d'une transformation **adiabatique réelle** vaut, par application du premier principe pour un système ouvert :

$$w = h_s - h_e + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2} + g(z_s - z_e)$$

Pour les machines à **fluide incompressible**, le **travail massique idéal** s'évalue aisément. En effet, comme le volume massique est approximativement constant on a $\int_e^s v dp \approx (p_s - P_e)/\rho$. D'autre part, le **travail massique réel** peut s'évaluer en mesurant la différence d'enthalpie entre les sections d'entrée et de sortie.

Les rendements des transformations adiabatiques

Pour les machines à **fluide compressible**, les choses sont plus complexes. Pour évaluer le travail massique idéal, il faut calculer $\int_e^s v dp$ et donc connaître le chemin thermodynamique parcouru lors de la transformation.

Une solution consiste à choisir une transformation adiabatique réversible (et donc isentropique).

Le rendement ainsi défini est appelé rendement isentropique, noté η_{i_s} .

Cette transformation de référence a le même état initial et la même pression que la transformation réelle. L'état final de la transformation idéale de référence diffère cependant de l'état final réel, car la vitesse de sortie correspondante c_{s,i_s} n'est pas exactement égale à la vitesse de sortie réelle.

Les rendements des transformations adiabatiques

Compte tenu du fait que

$$\int_e^{s,is} v dp = \int_e^{s,is} dh = h_{s,is} - h_e$$

l'expression du rendement isentropique est donc (en négligeant les variations d'énergie potentielle) :

$$\eta_{is} = \frac{h_{s,is} - h_e + \frac{c_{s,is}^2 - c_e^2}{2}}{h_s - h_e + \frac{c_s^2 - c_e^2}{2}} \quad \text{machine réceptrice}$$

$$\eta_{is} = \frac{h_e - h_s + \frac{c_e^2 - c_s^2}{2}}{h_e - h_{s,is} + \frac{c_e^2 - c_{s,is}^2}{2}} \quad \text{machine motrice}$$

Les rendements des transformations adiabatiques

On peut donner une forme alternative de cette expression en introduisant les notions de conditions totales d'un écoulement compressible.

On définit l'**enthalpie totale** h^0 et la **température totale** T^0 au sein d'un écoulement de fluide compressible de la façon suivante :

$$h^0 = h + \frac{c^2}{2} = C_p T + \frac{c^2}{2} = C_p T^0$$

$$T^0 = T + \frac{c^2}{2C_p}$$

Les rendements des transformations adiabatiques

La **pression totale** p^0 est définie à partir de la température totale, sous l'hypothèse que l'écoulement initialement en mouvement dans un état 1 est arrêté en un état 2 selon un processus adiabatique réversible (et donc isentropique)

On obtient ainsi le système d'équations:

$$h_1 + \frac{c_1^2}{2} = h_2 \qquad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Ce qui nous permet d'écrire successivement :

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_1^0}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{T_2^0}{T_1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \frac{p_2^0}{p_1}$$

Les rendements des transformations adiabatiques

Et donc :

$$\frac{p_2^0}{(T_2^0)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = \frac{p_1}{(T_1)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} = \frac{p_2}{(T_2)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

$$\frac{p_2^0}{p_2} = \left(\frac{T_2^0}{T_2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

En toute généralité, on écrit :

$$\frac{p^0}{p} = \left(\frac{T^0}{T} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Les rendements des transformations adiabatiques

A l'aide de la définition de l'enthalpie totale les expressions du rendement isentropique deviennent :

$$\eta_{is} = \frac{h_{s,is}^0 - h_e^0}{h_s^0 - h_e^0} \quad \text{machine réceptrice}$$

$$\eta_{is} = \frac{h_e^0 - h_s^0}{h_e^0 - h_{s,is}^0} \quad \text{machine motrice}$$

Enfin, si les variations d'énergie cinétique sont négligeables, et que $c_{s,is} \approx c_s$, on obtient :

$$\eta_{is} = \frac{h_{s,is} - h_e}{h_s - h_e} \quad \text{machine réceptrice}$$

$$\eta_{is} = \frac{h_e - h_s}{h_e - h_{s,is}} \quad \text{machine motrice}$$

Les rendements des transformations adiabatiques

Le modèle polytropique conduit à la notion de **rendement polytropique** qui est complémentaire à celle de rendement isentropique.

Le rendement polytropique est défini comme le rendement isentropique, mais pour une variation infinitésimale de pression (d'où le nom de *small stage efficiency* dans la littérature anglophone). Pour une **compression**, on a :

$$\eta_p = \frac{dh_{is}}{dh} = \frac{v dp}{C_p dT} = \frac{\mathcal{R}}{C_p} \frac{dp/p}{dT/T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp/p}{dT/T}$$

En intégrant cette relation entre deux états e et s , et en supposant que γ et le rendement polytropique sont uniformes, on obtient :

$$\eta_p = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\ln(p_s/p_e)}{\ln(T_s/T_e)} \quad \text{ou} \quad \frac{T_s}{T_e} = \left(\frac{p_s}{p_e} \right)^{\frac{1}{\eta_p} \frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

Les rendements des transformations adiabatiques

Cette dernière relation montre qu'il est **aisé d'obtenir une estimation du rendement polytropique en mesurant les pressions et température aux bornes de la machine**. Le même rendement peut-être défini à partir des conditions totales de pression et de température.

L'hypothèse d'un rendement polytropique uniforme équivaut à supposer que les "tranches" infinitésimales de la machines sont construites sur la même technologie, quantifiée par le rendement polytropique. Cette hypothèse est justifiée par la définition de la polytropique :

$$T ds = k v dp \quad \eta_p = \frac{dh_{iS}}{dh} = \frac{v dp}{dh} = \frac{v dp}{T ds + v dp} = \frac{1}{1 + k}$$

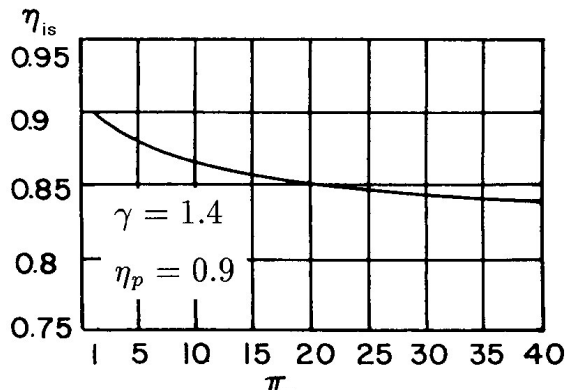
et donc

$$\eta_p = \frac{m}{m-1} \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{m-1}{m} = \frac{1}{\eta_p} \frac{\gamma-1}{\gamma}$$

Les rendements des transformations adiabatiques

Le rendement isentropique défini plus haut s'exprime en fonction du rendement polytropique :

$$\eta_{is} = \frac{\pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}{\pi^{\frac{1}{\eta_p} \frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}$$



Cette relation est illustrée ci-contre pour un compresseur caractérisé par un η_p 0.9. On voit que le rendement isentropique diminue lorsque le rapport de compression augmente, pour une valeur fixée de η_p . Ce comportement correspond à celui d'une famille de compresseurs modulaires dont on pourrait faire varier le nombre d'étages en fonction du rapport de pression à fournir.

Les rendements des transformations adiabatiques

Si l'on se place maintenant dans le cadre d'une machine motrice (une turbine), c'est-à-dire dans le cas d'une **détente**, on obtient des relations similaires :

$$\eta_p = \frac{dh}{dh_{is}} = 1 - k = \frac{m-1}{m} \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

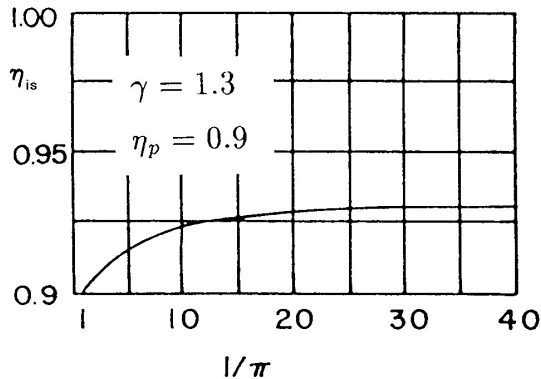
$$\eta_p = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\ln(T_s/T_e)}{\ln(p_s/p_e)}$$

$$\frac{T_s}{T_e} = \left(\frac{p_s}{p_e}\right)^{\eta_p \frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{p_s}{p_e}\right)^{\frac{m-1}{m}}$$

Les rendements des transformations adiabatiques

Ici encore le rendement isentropique s'exprime en fonction du rendement polytropique, mais de la façon suivante :

$$\eta_{is} = \frac{1 - \pi^{-\eta_p \frac{\gamma-1}{\gamma}}}{1 - \pi^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$



La figure ci-contre illustre la relation entre le rendement isentropique et le rendement polytropique pour une turbine. On constate que le rendement isentropique augmente avec le taux de détente, pour