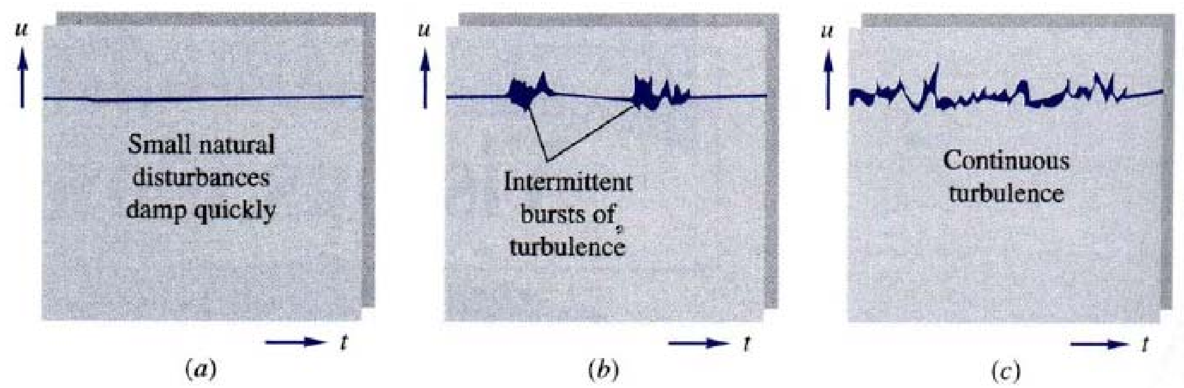
ECOULEMENT VISQUEUX DANS LES CONDUITES

Nous allons étudier dans ce chapitre l'écoulement visqueux dans les conduits et canaux et présenter les méthodes de calcul pour déterminer la chute de pression et les effets visqueux. La première étape consiste à déterminer le régime de l'écoulement, soit l'écoulement laminaire ou turbulent. Nous pouvons distinguer les deux régimes avec leurs caractéristiques suivantes :

Écoulement laminaire : la vitesse locale est indépendante de temps, mais elle peut être variable de point de vue spatial dû au cisaillement visqueux et la géométrie.

Écoulement turbulent : la vitesse locale a une moyenne constante mais elle a une composante fluctuant d'une façon statistique et aléatoire due à l'agitation chaotique dans l'écoulement.

La vitesse par rapport au temps dans les régimes laminaire, de transition et turbulent est montrée dans la figure ci-dessous :



Vitesse en régime (a) laminaire, (b) de transition, (c) turbulent.

Le paramètre principal pour caractériser le régime d'écoulement est le nombre de Reynolds, qui est défini par :

$$\mathrm{Re} = \frac{VD\rho}{\mu}$$

où ρ est la densité, V est la vitesse moyenne, D est le diamètre et μ est la viscosité dynamique.

Nous pouvons définir un nombre de Reynolds critique, Re_{cr} : pour $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{cr}$, l'écoulement est laminaire et pour $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{cr}$ il est turbulent.

Pour l'écoulement dans les conduites on trouve expérimentalement un nombre de Reynolds critique tel que : $\mathrm{Re}_{cr} \approx 2300$. En réalité, il existe un régime de transition entre les deux régimes de laminaire et turbulent, qui est caractérisé par 2300<Re<10000, suivant les conditions de mise en route de l'écoulement.

Écoulement à l'entrée des conduites

L'écoulement à l'entrée de conduite est illustré dans la figure suivante. Nous pouvons constater que l'écoulement est en développement près de la paroi due aux effets de cisaillement et d'accélération du fluide dans la région loin de la paroi. En conséquence le gradient de la distribution de pression dans la région de l'entrée est plus grand par rapport à celui de l'écoulement développé.

Pour l'écoulement laminaire la longueur de la région d'entrée est donnée expérimentalement par :

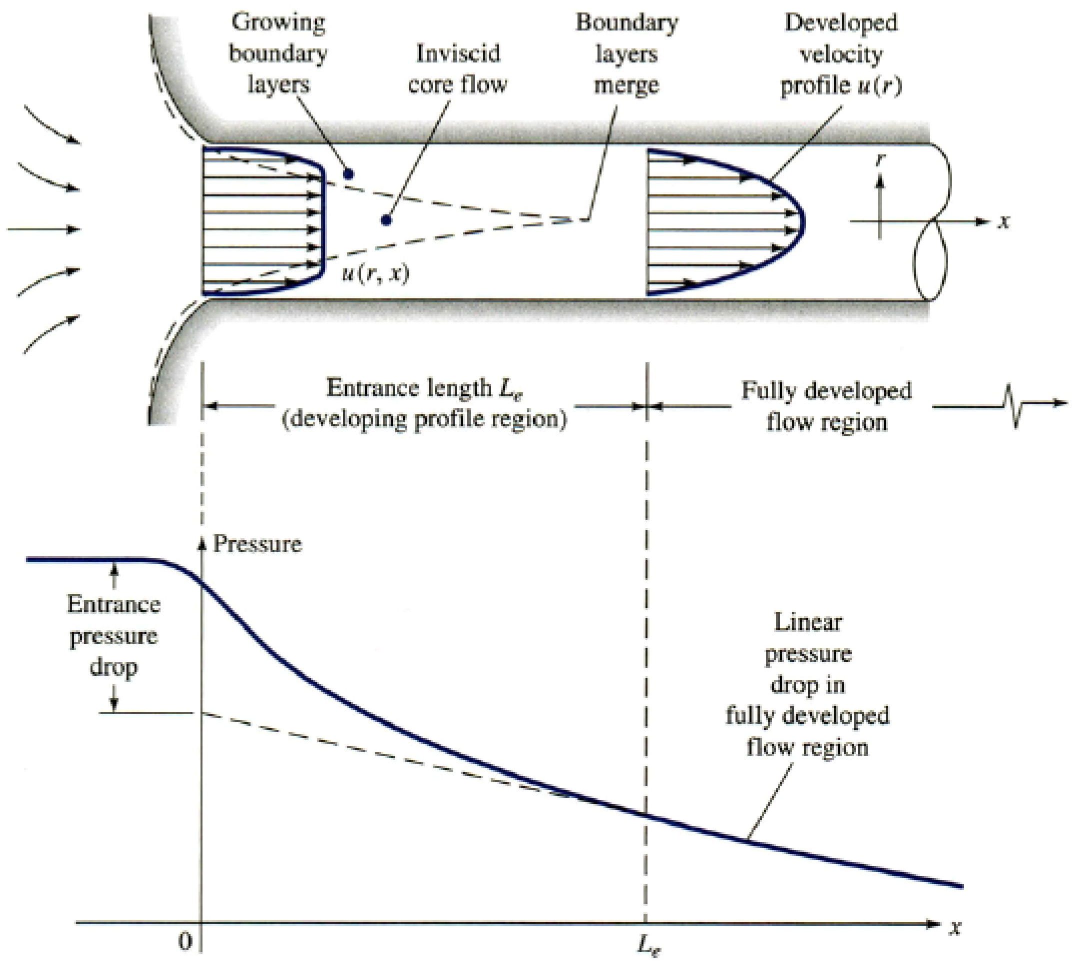
$$\frac{L_e}{D} \approx 0.06\,\mathrm{Re}\,.$$

Voir aussi :
H. L. Langhaar, "Steady Flow in the Transition Length of a Straight Tube," J. Appl. Mech., vol. 10, p. 55, 1942. Theoretically, an infinite distance is required for fully developed laminar flow to occur. The theoretical entrance transition length is measured to the section where the maximum velocity at the center of the pipe reaches 99 per cent of its theoretical maximum value.

Et pour un écoulement turbulent :

$$\frac{L_e}{D} \approx 4.4\,\mathrm{Re}^{1/6}$$

où L_e est la longueur d'établissement de l'écoulement développée.



Coefficient de Friction pour un écoulement Laminaire et Turbulent

Nous allons définir un coefficient de friction, dit 'le coefficient de friction de Darcy-Weisbach' pour l'écoulement dans les conduits droits comme :

$$f = \frac{\Delta P}{\frac{L}{2D}\rho V^2}$$

où ΔP est la chute de pression due à la friction seulement. Sa dimension est en N/m^2 ou Pa. Étant donné que *L/D* est sans dimension et que $\rho V^2/2$ a la dimension de Pa, on a donc le coefficient de friction f sans dimension.

Nous pouvons écrire cette équation pour calculer la chute de pression :

$$\Delta P = f\frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho V^2 \quad (Pa)$$

ou bien, en utilisant ΔP = ρ g h, nous pouvons l'écrire pour la chute de pression en dimension de m de colonne de fluide :

$$h = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \quad (m)$$

Note : Le coefficient de friction est défini pour l'écoulement laminaire ou turbulent, mais f doit être déterminé pour le régime de l'écoulement du problème.

Point Important : Dans l'industrie et certains autres pays, on utilise le coefficient de friction défini d'une autre façon dit 'le coefficient de friction de Fanning.' Ce coefficient est différent du celui de Darcy-Weisbach par un facteur de 4.

Sometimes called the *Darcy-Weisbach equation*. See H.Darcy, 'Sur des recherches experimentales relatives au mouvement des eaux dans les tuyaux" (Experimental Researches on the Flow of water in pipes), *Comptes rendus*, vol. 38, n° 11 t1, pp. 1109-1 2l, 1854; and Julius Weisbach, Lehrbuch der Ingenieur-undMaschinenmechanik (Textbook of EngineeringM echanics) Brunswick, Germany, 1845.

Equation is also frequently written as $h = f_D\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 4 f_F\ \frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}\ (m)$

Which is called Fannnning's equation. Obviously, Fanning,s friction factor (f_f) is onefourth of Darcy's friction factor (f_D). See J. T. Fanning , A Practical Treatise on Hydraulic and Water Supply Engineering, D. Van Nostrand, New York, 1893.

Taux de Cisaillement pour Écoulement laminaire ou Turbulent

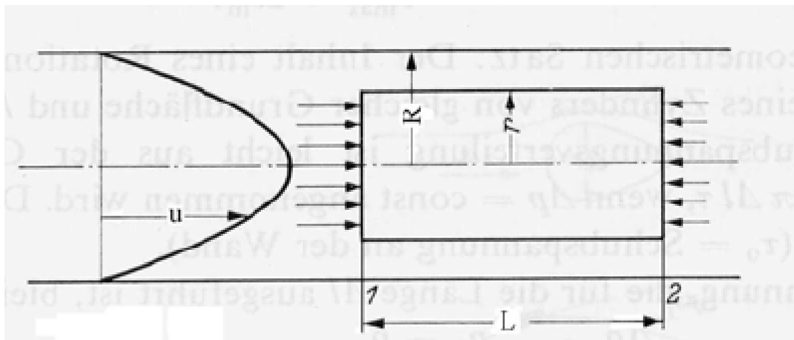
Pour un écoulement dans une conduite, en utilisant le théorème de quantité de mouvement et la définition du coefficient de friction, nous pouvons déduire la relation entre le taux de cisaillement τ_w et le coefficient de friction f comme suivant :

$$f = \frac{4\tau_W}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

Note : cette relation est valable aussi bien pour l'écoulement laminaire que turbulent, mais le coefficient de friction doit être déterminé selon le régime de l'écoulement. La rugosité de la conduite intervient également.

Écoulement Laminaire

Nous allons étudier l'écoulement laminaire dans un conduit de section circulaire et rectiligne pour déterminer le profil de vitesse, la vitesse moyenne, le débit et la relation de coefficient de friction.
Nous allons écrire les forces agissant sur un élément cylindrique comme montré dans la figure ci-après :



Écoulement de Hagen-Poiseuille

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = \Delta p \pi r^2 = 2\pi r L \tau(r)$$

où τ est le cisaillement local exprimé par :

$$\tau(r) = -\mu \frac{du}{dr}$$

En combinant ces deux équations et solutionnant pour du, nous obtenons :

$$du = -\frac{\Delta p}{2\mu L} r dr$$

Nous pouvons l'intégrer de r = 0 à r et déterminer la constante d'intégration en utilisant la condition de u = 0 pour r = R (sur la paroi), nous obtenons alors le profil de vitesse :

$$u(r) = \frac{\Delta p}{2\mu L}(R^2 - r^2),$$

Pour r = 0, u = u_{max} ; ainsi nous pouvons obtenir le profil de vitesse sans dimension :

$$\frac{u}{u_{max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

La vitesse moyenne et le débit sont obtenus en intégrant le profil de r = 0 à r = R :

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\left(\frac{\Delta p}{L}\right), \qquad V = \frac{1}{2}u_{\max} \;, \qquad Q = \pi R^2 V = \frac{1}{2}\pi R^2 u_{\max}$$

La première et la deuxième équation donnent :

$$\frac{\Delta p}{L} = -\frac{8\mu V}{R^2}$$

En substituant $\Delta p / L$ de cette équation dans l'équation du coefficient de friction, on obtient après simplifications, la forme classique de Poiseuille :

$$f_{lam} = \frac{64\mu}{\rho VD} = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

La contrainte à la paroi est égale à : $\tau_W = \dfrac{\Delta p R}{2L}$

Écoulement Turbulent

Les méthodes empirique et semi-empirique sont disponibles pour faire l'analyse de l'écoulement turbulent dans les conduits rectilignes avec section circulaire. La relation empirique pour le coefficient de friction en fonction de Reynolds et la rugosité relative est dérivée par Colebrook en 1939. C'est une relation implicite qui représente assez bien les résultats expérimentaux obtenus par plusieurs chercheurs en utilisant différents fluides. L'équation implicite de Colebrook valable pour Re>2300 est la suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2\log_{10}\left[\frac{\varepsilon / D}{3.7} + \frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{f}}\right]$$

où ε/D est la rugosité relative.

Depuis de la publication de l'équation de Colebrook, plusieurs chercheurs ont travaillé et publié des relations qui sont ou bien plus précises mais plus complexes ou bien simples mais moins précises. Entre autres, on peut mentionner l'équation de Pecornic (1963) et de Haaland (1983) :

$$f = \frac{0.25}{\left[\log_{10}\left(15/\mathrm{Re} + \varepsilon / 3.715D\right)\right]^2}$$

qui est valable pour Re = 4E3 à 1E8 et ε/D=0.01 à 5E-6. L'erreur maximum est de 6%.

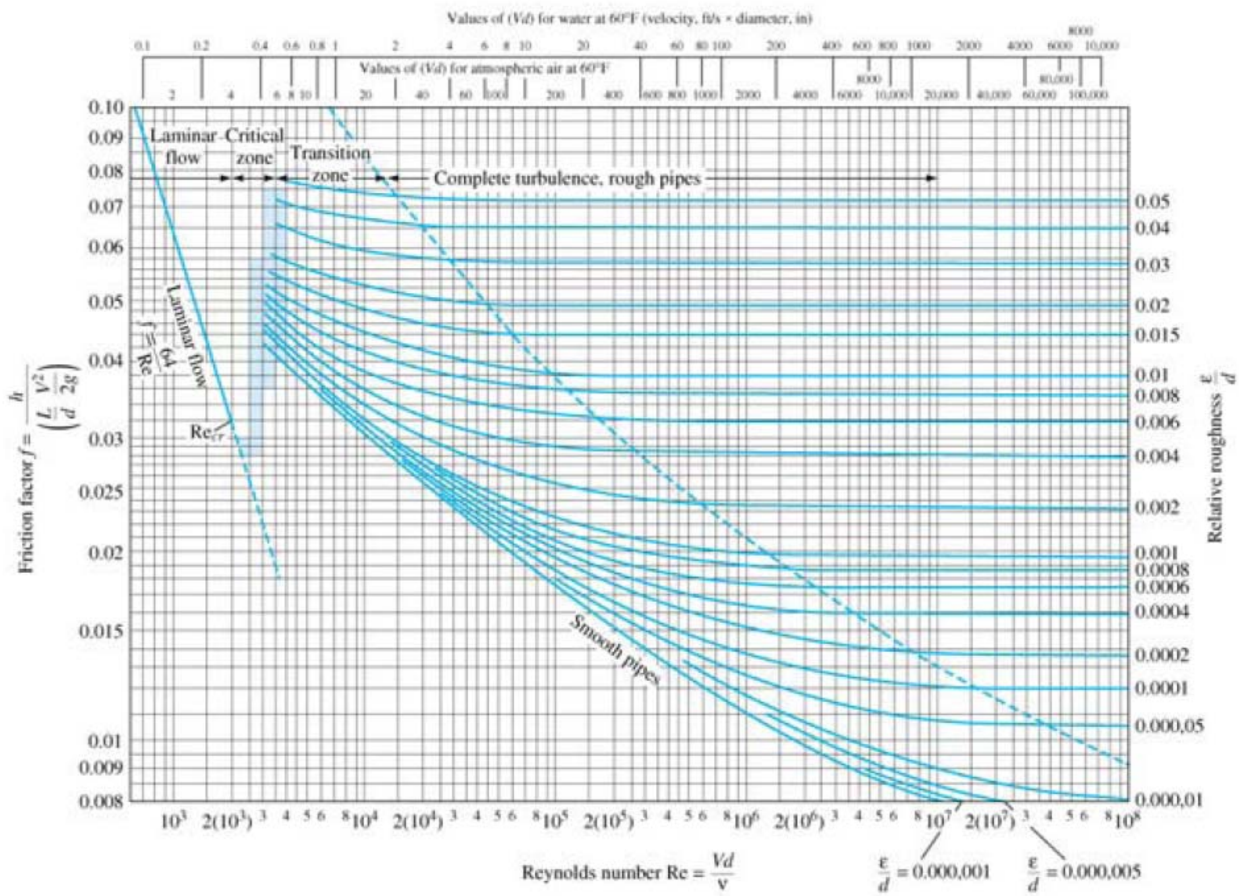
$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8\log_{10}\left[\frac{6.9}{\mathrm{Re}} + \left(\frac{\varepsilon / D}{3.7}\right)^{1.11}\right]$$

L'équation de Haaland a environ 2% d'erreur par rapport à l'équation de Colebrook.

Moody (1944) a publié un diagramme tracé à partir de l'équation de Colebrook, appelé le diagramme de Moody-Nikuradsé, et donné par la figure suivante ; Il a une précision de ± 15 % dans la région utilisée de la figure.

Rugosité moyenne de conduites commerciales

Matériau	Condition	Rugosité absolue en mm
Acier	Feuille de métal neuve	0.05
	Acier inoxydable	0.002
	Commercial, neuf	0.046
	Rivé	3.0
	Rouillé	2.0
Fer	Fonte, nouvelle	0.26
	Forgé, nouveau	0.046
	Galvanisé, nouveau	0.15
	Fonte asphaltée	0.12
Cuivre	Tube étiré	0.002
Plastique	Tube étiré	0.0015
Verre		Lisse
Béton	Lisse	0.04
	Rugueux	
Caoutchouc	Lisse	0.012.0
Bois	Défoncé	0.5



J. Nikuradse, "Strömungsgesetze in rauhen Rohren" (Laws of Flow in Rough Pipes), VDl-Forschungsheft 361. Beilage zu Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, ausgabe B and 4, July/August 1933. Also, translated as NACA TM 1292,1950.

Écoulement dans les conduites non circulaires

L'analyse développée et utilisée pour le cas de conduits circulaires est applicable dans ce cas aussi pourvu que la conception d'un diamètre équivalent ou diamètre hydraulique soit utilisé. Le diamètre hydraulique est défini comme :

$$D_h = \frac{4(\text{section de passage du fluide})}{\text{périmètre mouillé}} = \frac{4A}{P}$$

où A = la section de passage de fluide actuelle et P = périmètre mouillé i.e. le périmètre sur lequel le cisaillement visqueux agit.

Dans ce cas, on aura :

$$f = \Phi\left(\frac{VD_h}{\nu}, \frac{\varepsilon}{D_h}\right)$$

Pertes Mineures (Minor en anglais) ou Singulières

Jusqu'à maintenant nous avons étudié l'écoulement dans les conduites rectilignes, sans changement de direction et accessoires. Dans la pratique, il y a toujours changement de direction, changement de diamètre, et accessoires (vannes, raccords et manchons, coudes, tés, etc.) sont utilisés. Ces pertes sont typiquement exprimées comme :

$$h_m = K_i \frac{V^2}{2g}$$

où hm = la perte équivalente à travers l'accessoire, V = la vitesse moyenne pour l'accessoire ayant la même grandeur de conduite, Ki = le coefficient sans dimension de perte mineure pour l'accessoire, défini comme :

$$K = \frac{h_m}{V^2 / 2g} = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}$$

La perte de pression totale devient :

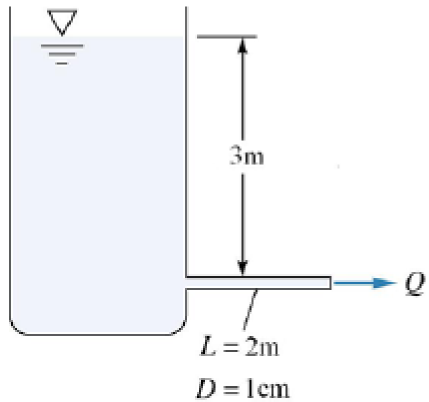
$$h_f = f \frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} + \sum K_i \frac{V^2}{2g} \quad \text{ou} \quad h_f = \left(f \frac{L}{D} + \sum K_i \right)\frac{V^2}{2g}$$

Il faut noter que cette équation est applicable pour un système de conduites d'un seul diamètre. Pour un réseau de conduites à différents diamètres, on devrait répéter le calcul pour chaque diamètre.

Point Important : Comme nous avons fait avec les problèmes de conduit rectiligne, nous devons déterminer la perte de charge totale en utilisant l'équation de Bernouilli.

Exercices

Exemple 1 : Nous avons un réservoir très grand que nous voulons vidanger par gravité. Calculez le débit pour le cas (i) le fluide incompressible, (ii) l'écoulement est permanent, (iii) le diamètre du réservoir est beaucoup plus grand que celui de la conduite. SG = 0.9 (densité) et μ = 0.0328 $kg.m^{-1} s^{-1}$.



Vidange par gravité

Solution : Nous écrirons l'équation de Bernoulli avec friction entre la surface libre du réservoir et la section de sortie du fluide :

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f$$

En prenant $p_1 = p_2 = p_a$, $V_1^2 << V_2^2$, nous trouvons : $h_f = 3 - V_2^2/(2 \times 9.81)$.

Nous avons la chute de pression et en supposant un écoulement laminaire, le coefficient de friction en fonction du nombre de Reynolds est tel que :

$$h_f = f \frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \quad (m) \quad \text{où} \quad f = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$

Nous trouvons une équation quadratique en V_2 :

$$V_2^2 + 2gh_f - 3(2g) = V_2^2 + 2g\, f \frac{L}{D}\frac{V_2^2}{2g} - 6g = V_2^2 + 2g \frac{64\mu}{\rho D V_2}\frac{L}{D}\frac{V_2^2}{2g} - 6g = V_2^2 + \frac{64\mu L}{\rho D^2} V_2 - 6g$$

$$= V_2^2 + \frac{64\,(0.0328)\,2}{900(0.01)^2} V_2 - 6g = V_2^2 + 46.649 V_2 - 6g = 0$$

La solution est $V_2 = 1.229\ m/s$ ou le débit est de Q = 9.64E-5 m^3/s.

Nous pouvons maintenant vérifier si la supposition concernant le régime laminaire est correcte ou pas. En effet, on obtient Re = 336 <2300, donc elle était correcte.

Exemple 2 : Déterminez la chute de pression dans un conduite horizontale de 300 m long et de 0.20m de diamètre. La vitesse moyenne de l'eau est de 1.7 m/s, la densité de l'eau est de 999 kg/m^3, sa viscosité cinématique est de 1.12E-6 m^2/s et la rugosité absolue est de 0.26E-3 m.

Solution : Écrivons l'équation de Bernoulli entre l'entrée (section 1) et la sortie (section 2) de la conduite

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+h_f$$

où $z_1 = z_2$ et $V_1 = V_2 = 1.7\ m/s$, $h_f = f\,\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g}$ avec L = 300 m, D = 0.20 m et f peut être évalué à partir du diagramme de Moody. L'équation de Bernoulli donne :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = f\,\frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho V^2$$

Le nombre de Reynolds est donné par :

$$\mathrm{Re}=\frac{UD}{\nu}=\frac{1.7\ x\ 0.20}{1.12\ 10^{-6}}=303570$$

On a comme rugosité relative : $\frac{\varepsilon}{D}=\frac{0.00026\,m}{0.20\,m}=0.0013$

Une lecture sur le diagramme de Moody donne : $f = 0.0022$

La perte de charge est donnée par :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = f\,\frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho V^2 = 0.022\frac{300}{0.20}\frac{1}{2}999(1.7)^2 = 47637\ N/m^2\ \ (Pa)$$

La puissance dissipée est donnée par :

$$W=\Delta p.U.S=\Delta p.U.\pi D^2/4=47637.(1.7).\pi.(0.20)^2/4=2544\,Watts$$

Exemple 3 : reprendre l'exemple 2 avec $z_1 = 0\ et\ z_2 = 20\ m$. Déterminez la chute de pression en m de colonne de fluide. Utilisez l'équation de Haaland pour trouver le coefficient de friction.

Solution : L'équation de Bernoulli donne :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) + f\,\frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho V^2$$

où γ = (999)(9.81) = 9800 Nm^3, $z_1 - z_2 = 20\ m$. Nous pouvons déterminer f à partir de l'équation de Haaland comme:

Equation de Haaland

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8\log_{10}\left[\frac{6.9}{\mathrm{Re}} + \left(\frac{\varepsilon / D}{3.7}\right)^{1.11}\right] = -1.8\log_{10}\left[\frac{6.9}{304000} + \left(\frac{0.00026/0.2}{3.7}\right)^{1.11}\right] = 6.79$$

Soit : **f = 0.0217**
Donc, en substituant les valeurs numériques dans l'équation de Δp, nous trouvons :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) + f\frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho V^2 = 9800.20 + 0.0217\frac{300}{0.20}\frac{1}{2}999(1.7)^2$$
$$= 196000 + 46987\ N/m^2 = 242987\ N/m^2$$

242987/ρg = 242987/9800 = 24.8 m de colonne de fluide.
Dans ce cas la perte de charge totale consiste de la perte de charge due à l'élévation de 20 m plus la perte de charge due à la friction de **4.8 m**.

Problème 1 : Un conduit d'acier de 150 mm de diamètre est utilisé pour transporter de l'air. Il est horizontal et rectiligne avec une longueur de 200 m. On donne la rugosité absolue comme 0.075 mm, et la densité comme 1.18 kg/m^3, la viscosité cinématique de l'air comme 15E-6 m2/s. (a) déterminez le coefficient de friction pour une vitesse moyenne de 20 m/s, (b) calculez la chute de pression en Pa, (c) calculez la puissance de pompe théorique en kW. Rép. : (a) f = 0.019, (b) Δp = 5980 Pa, (c) W = 2.1 kW

Solution :
Le nombre de Reynolds est donné par :

$$\mathrm{Re} = \frac{UD}{\nu} = \frac{20\ x\ 0.15}{15.10^{-6}} = 200000$$

On a comme rugosité relative : $\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.075}{150} = 0.0005$

Une lecture sur le diagramme de Moody donne : $f = 0.019$

La perte de charge est donnée par :

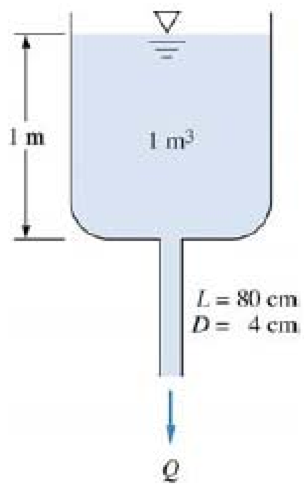
$$\Delta p = p_1 - p_2 = f\frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho V^2 = 0.019\frac{200}{0.150}\frac{1}{2}1.18(20)^2 = 5979\ Pa$$

La puissance dissipée est donnée par :

$$W = \Delta p.U.S = \Delta p.U.\pi D^2/4 = 5980.20.\pi.(0.150)^2/4 = 2113\,W = 2.113\,kW$$

Problème 2 : Un fluide avec le poids spécifique de 9790 N/m^3 est vidangé d'un réservoir ayant une hauteur de 100 cm par un tube de section circulaire vertical attaché au fond du réservoir. Le diamètre du tube est de 4 cm et sa longueur est de 80 cm. Voir figure ci-dessous. La viscosité cinématique de fluide est de 1.01E-6 m^2/s, la rugosité absolue de tube est de 0.0015 mm. Calculez le débit en m^3/h
(a) en utilisant le diagramme de Moody,
(b) en utilisant l'équation de Haaland

Hypothèses : (i) fluide incompressible, (ii) écoulement permanent, (iii) le diamètre de réservoir >>le diamètre de tube. Rép. : (a) 23.39 m^3/h, (b) 23 49 m^3/h.



Solution : L'équation de Bernoulli généralisée donne :

$$\frac{p_1}{\gamma} + \frac{V_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + z_2 + h_f$$

Avec $\gamma =$ 9790 Nm^3, $p_1 = p_2 = p_a, V_1 << V_2$, et $z_1 - z_2 = 1.8\ m$

Nous trouvons : $h_f = 1.8 - \frac{V_2^2}{2g}$.

Nous avons la chute de pression et le coefficient de friction en fonction du nombre de Reynolds est tel que :

$$h_f = f\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 1.8 - \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\text{Soit } f(\text{Re})\frac{L}{D}\frac{V_2^2}{2g} + \frac{V_2^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g}\left(1 + f(\text{Re})\frac{L}{D}\right) = 1.8$$

Nous trouvons une équation non linéaire par f(Re) = f(V_2) à résoudre par approximation en tenant compte de la rugosité relative :

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0.0015}{40} = 0.0000375$$

On peut alors trouver : $V_2 = 5.17\ m/s$, un Reynolds de $\mathrm{Re} = \frac{V_2 D}{\nu} = \frac{5.17\ x\ 0.04}{1.01\ \ 10^{-6}} = 204800$

Ce qui équivaut à f = 0.016

Si on utilise l'équation de Haaland par itération, il faut approximer Re de manière à caler à f et V_2

sur $\frac{V_2^2}{2g}\left(1 + f(\mathrm{Re})\frac{80}{4}\right) = 1.8$ soit : $V_2^2\left(1 + 20 f(\mathrm{Re})\right) = 3.6g$

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8\log_{10}\left[\frac{6.9}{\mathrm{Re}} + \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7}\right)^{1.11}\right] = -1.8\log_{10}\left[\frac{6.9}{204800} + \left(\frac{0.0015/40}{3.7}\right)^{1.11}\right] = 7.906$$

Problème 3 : L'air est transporté par un canal d'acier de section carré de 30x30 cm et d'une longueur de 150 m. La vitesse moyenne de l'air est de 25 m/s. calculez (a) la chute de pression en m de colonne de fluide, (b) la chute de pression en Pa, (c) la puissance de ventilateur en kW si son rendement est de 60%. On donne la rugosité absolue de l'acier = 0.046 mm, la densité de l'air = 1.205 kg/m^3, la viscosité dynamique de l'air = 1.8E-5 m^2/s. Rép. : (a) 239 m de colonne d'air, (b) 2820 Pa, (c) 10.6 kW.

Solution : nous avons une conduite de section carrée non circulaire
Le diamètre équivalent ou diamètre hydraulique doit être utilisé. Le diamètre hydraulique est défini comme :

$$D_h = \frac{4(\text{sec}\,tion\ de\ passage\ du\ \ fluide)}{périmètre\ mouillé} = \frac{4A}{P}$$

où A = la section de passage de fluide actuelle et P = périmètre mouillé i.e. le périmètre sur lequel le cisaillement visqueux agit. Soit L la longueur du côté de la section carrée.

Dans ce cas, on aura : $D_h = \frac{4A}{P} = \frac{4L^2}{4L} = L$, on sait que $f = \Phi\left(\frac{VD_h}{\nu}, \frac{\varepsilon}{D_h}\right)$; aussi d'après le diagramme de Moody :

$$f = \Phi\left(\frac{VD_h}{\nu}, \frac{\varepsilon}{D_h}\right) = \Phi\left(\frac{25\,x\,0.3\ x\ 1.205}{1.8E-5}, \frac{0.046}{300}\right) = \Phi(502800, 0.000153) = 0.015$$

La perte de charge est donnée par :

$$\Delta p = p_1 - p_2 = f\,\frac{L}{D}\frac{1}{2}\rho V^2 = 0.015\frac{150}{0.300}\frac{1}{2}1.205(25)^2 = 2824\ Pa$$

$$h_f = f\,\frac{L}{D_h}\frac{V^2}{2g} = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{2824}{1.205\ x\ 9.81} = 239\ m\ de\ colonne\ d'air$$

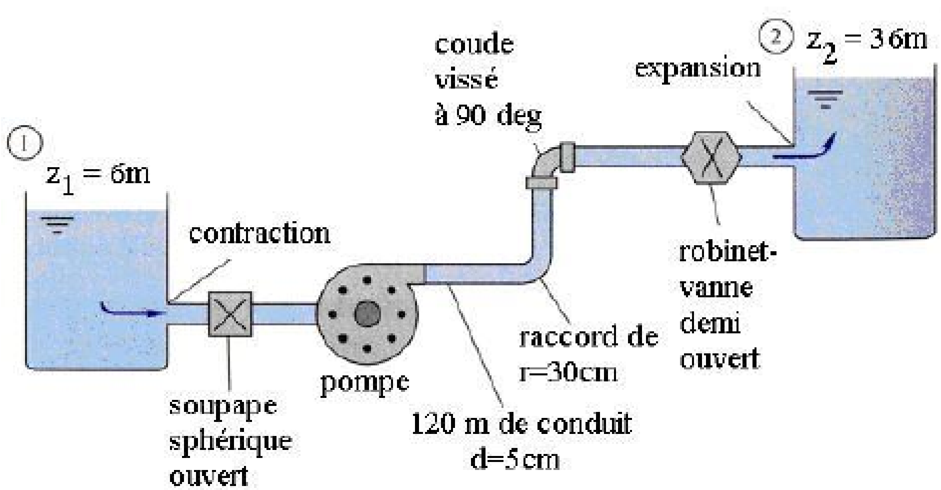
La puissance théorique dissipée est donnée par :

$$W_{TH} = \Delta p.V.S = \Delta p.U.L^2 = 2824.25.(0.3)^2 = 6354\,W = 6.354\ kW$$

Mais ne représente que 60 % vu le rendement. Aussi la puissance réelle nécessaire est de :

$$W_R = \frac{W_{TH}}{60}.100 = 10590\,W = 10.59\ kW$$

Exemple 4 : l'eau (γ = 9790 N/m^3, ν = 1.005E-6m^2/s) est pompée du réservoir 1 au réservoir 2 en utilisant un conduit de diamètre de 5cm et de longueur de 120m comme montré sur la figure ci-dessous. Le débit est de 0.006 m^3/s. La rugosité relative est de ε/D = 0.001. Calculez la puissance théorique de la pompe.



Solution : Écrivons l'équation de Bernoulli avec friction, incluant les accessoires et la pompe :

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+h_f+\sum h_m-h_P$$

Où h_P est l'augmentation de pression à travers de la pompe. Dans ce problème, $p_1 = p_2$ et $V_1 = V_2 = 0$; nous pouvons le solutionner pour h_P :

$$h_P = z_2 - z_1 + h_f + \sum h_m = 36-6+\left(f(\mathrm{Re})\frac{L}{D}+\sum K_i\right)\frac{V^2}{2g}$$

La vitesse moyenne est calculée du débit :

$$V=\frac{Q}{A}=\frac{0.006}{\pi(0.05)^2/4}=3.056\ m/s$$

Le nombre de Reynolds est donné par :

$$\mathrm{Re}=\frac{VD}{\nu}=\frac{3.056\ x\ 0.05}{1.005E-6}=152027$$

Nous serons en écoulement turbulent et la rugosité relative est de ε/D = 0.001

Le diagramme de Moody donne f(Re, ε/D) = f(152000,0.001) = 0.021

Nous pouvons à présent lister lister les coefficients de pertes mineures/singulières comme dans le tableau ci-dessous :

Accessoire	**K**
Contraction à l'entrée	0.5
Soupape sphérique ouverte	6.9
Raccord de r = 30 cm	0.15
Coude de 90°	0.95
Robinet-vanne demi-ouvert	2.7
Expansion à la sortie	1.0
Total	**12.2**

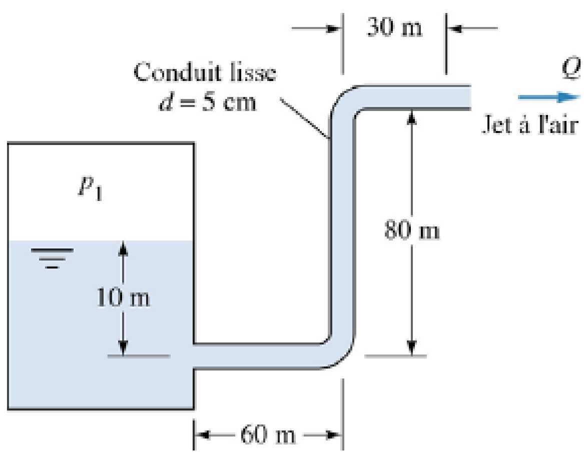
En substituant f dans l'équation résultante de Bernoulli, nous trouvons :

$$h_P = z_2 - z_1 + h_f + \sum h_m = 30\,m + \left(0.021\frac{120}{0.05} + 12.2\right)\frac{(3.056)^2}{2.(9.81)} = 59.8\ m$$

La puissance théorique est

$$W = \Delta p.Q = \rho g h_P.VS = 9790.(59.8).(3.056)\pi(0.05)^2/4 = 3513\,W$$

Problème 4 : L'écoulement dans le système montré à la figure suivante est achevé par l'air comprimé. Déterminez la pression manométrique p_1 pour avoir un débit de Q = 60 m^3/s. Les données : ρ = 998 kg/m^3, μ = 0.001 kg/m.s, K_E = 0.5, K_S = 1, K_{COUDE} = 0.15



Solution : Nous calculons la vitesse et le nombre de Reynolds :

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi D^2/4} = \frac{60/3600}{\pi(0.05)^2/4} = 8.5\ m/s,\quad \mathrm{Re} = \frac{VD\rho}{\mu} = \frac{(8.5)(0.05)(998)}{0.001} = 424150$$

Nous obtenons par l'équation de Haaland pour le conduit lisse f = 0.0135.
La loi de Blasius donnerait : f = 0.0124

L'équation de Bernoulli avec friction s'exprime par :

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+h_f+\sum h_m$$

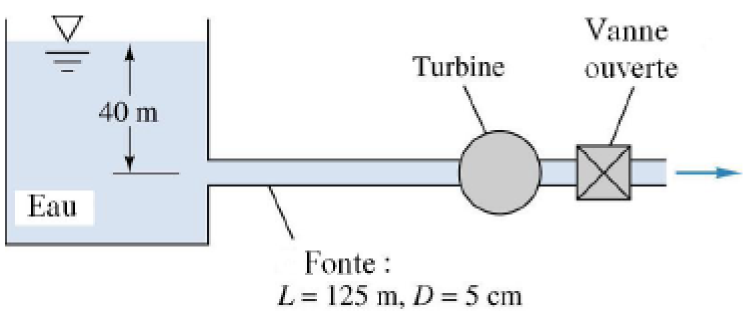
où $V_1 = 0$, $z_1 = 10$ m, $p_2 = 0$, $V_2 = 8.5$ m/s, $z_2 = 80$ m et $h_f = f\,(L/D)\,(V^2/2g)$.

$$\sum h_m=\sum K_i\frac{V^2}{2g} \quad \text{et} \quad \sum K_i = K_E + 2K_{COUDE} + K_S = 0.5+2*0.15+1=1.80$$

Nous solutionnons pour

$$p_1=\gamma\left[z_2-z_1+\left(1+f\frac{L}{D}+\sum K_i\right)\frac{V^2}{2g}\right]=(998)(9.81)\left[80-10+\left(1+0.0135\frac{170}{0.05}+1.80\right)\frac{(8.5)^2}{2(9.81)}\right]=2.44E6\ Pa$$

Problème 5 : Pour le système donné ci-dessous, la contraction à l'entrée du conduit est de $K_E = 0.5$ et $K_{VANNE} = 6.9$. Le débit est de 0.008 m^3/s. Les données : ρ = 998 kg/m^3, μ = 0.001 kg/m.s, ε = 0.26 mm. Calculez la puissance développée par la turbine en W. Rép. : 2400 W.



La vitesse de débit est donnée par : $V=\frac{Q}{S}=\frac{Q}{\pi D^2/4}=\frac{0.008}{\pi(0.05)^2/4}=4.074\ m/s$

Le nombre de Reynolds vaut : $\mathrm{Re}=\frac{VD\rho}{\mu}=\frac{(4.074)(0.05)(998)}{0.001}=203310$

La rugosité relative est de : $\frac{\varepsilon}{D}=\frac{0.26}{50}=0.0052$

On déduit du diagramme de Moody que le coefficient de perte de charge vaut : f = 0.03

Écrivons l'équation de Bernoulli avec friction, incluant les accessoires et la pompe :

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}+z_1=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+z_2+h_f+\sum h_m-h_P$$

Où h_P est l'augmentation de pression à travers de la pompe. Dans ce problème, $p_1=p_2$ et $V_1=0\,;V_2=2.037\ m/s$ et nous pouvons solutionner pour h_P :

$$h_P=z_2-z_1+\frac{V_2^2}{2g}+h_f+\sum h_m=0-40+\left(1+f(\mathrm{Re})\frac{L}{D}+\sum K_i\right)\frac{V_2^2}{2g}$$

$$\sum h_m=\sum K_i\frac{V^2}{2g}\quad \text{et}\quad \sum K_i=K_E+2K_{VANNE}=0.5+6.9=7.4$$

Nous solutionnons pour

$$\Delta P_{POMPE}=\gamma h_p=\gamma\left[z_2-z_1+\left(1+f\frac{L}{D}+\sum K_i\right)\frac{V_2^2}{2g}\right]=$$

$$(998)(9.81)\left[-40+\left(1+0.03\frac{125}{0.05}+7.4\right)\frac{(4.074)^2}{2(9.81)}\right]=0.261E6\ Pa$$

$$W=\Delta p_{POMPE}.Q=\rho g h_P.VS=0.261E6(4.074).\pi(0.05)^2/4=2088\,W$$