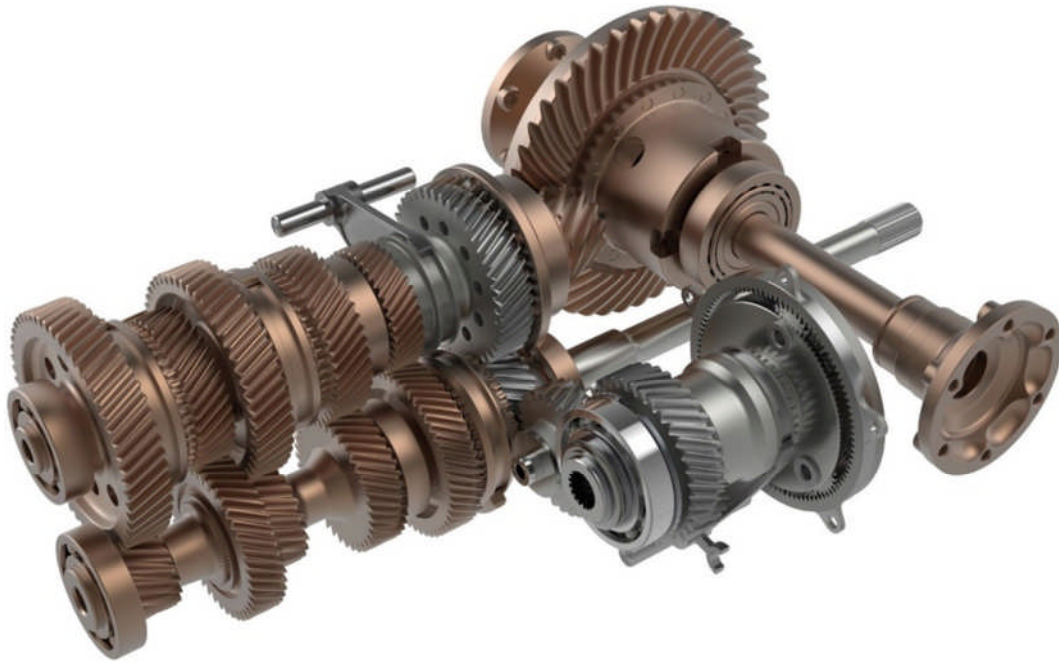


5 - TRANSMISSIONS PAR ENGRENAGES



5.1 - DÉFINITIONS

5.1.1 - Engrènement

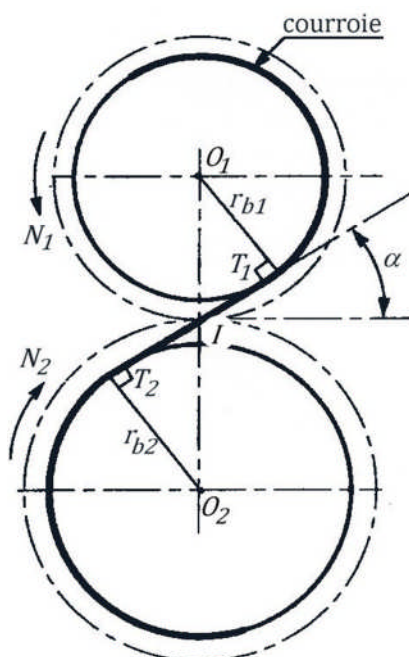
a) Analogie avec des roues de friction

Considérons deux roues de friction, de rayons respectifs r_1 et r_2 , roulant sans glisser l'une sur l'autre en un point de contact I . Cette condition de roulement sans glissement s'exprime par $V_{I,1/2} = 0$. Par composition des vitesses, il vient $V_{I,1/0} - V_{I,2/0} = 0$ et donc $V_{I,1/0} = V_{I,2/0}$. Par ailleurs, on a $V_{I,1/0} = r_1 \cdot \omega_1$ et $V_{I,2/0} = r_2 \cdot \omega_2$ où ω_i représente la fréquence de rotation des roues. On peut donc écrire $r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2$ ou encore, avec les régimes N_i (rappel : $\omega = \frac{\pi}{30} N$), $r_1 \cdot N_1 = r_2 \cdot N_2$.

On retiendra plutôt l'égalité des rapports :

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

b) Analogie avec un système poulie-courroie



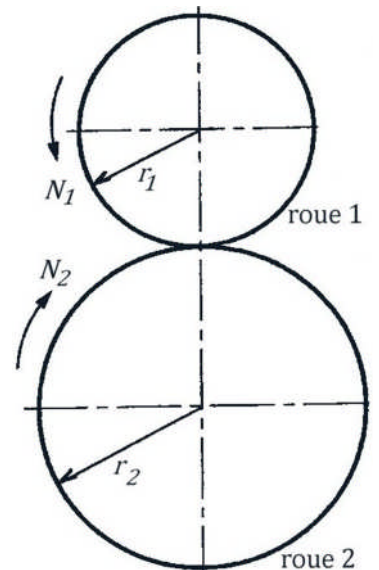
Considérons deux poulies de rayons respectifs r_{b1} et r_{b2} reliées par une courroie croisée. Notons T_1 et T_2 les points limites de contact entre la courroie et les roues, et I le point d'intersection entre la courroie et la droite (O_1O_2) . Notons enfin α l'angle que fait la courroie avec la perpendiculaire en I à cette même droite.

Géométriquement, $\cos \alpha = \frac{r_{b1}}{O_1I}$ et $\cos \alpha = \frac{r_{b2}}{O_2I}$, et donc : $\frac{r_{b1}}{r_{b2}} = \frac{O_1I}{O_2I}$.

Cinématiquement, $V_{T_1,1/0} = r_{b1} \cdot \omega_1$ et $V_{T_2,2/0} = r_{b2} \cdot \omega_1$. En supposant la courroie infiniment rigide, on aura $V_{T_1,1/0} = V_{T_2,2/0}$ et donc : $\frac{r_{b1}}{r_{b2}} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$.

De ces deux relations, on déduit $\frac{O_1I}{O_2I} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ ce qui signifie que $V_{I,1/0} = V_{I,2/0}$ (raisonnement inverse du § a) ci-dessus). Autrement dit le point I (purement géométrique et non matériel) est le point de vitesse nulle dans le mouvement d'une roue par rapport à l'autre.

Ce point I est par ailleurs tangent à deux cercles de rayons r_1 et r_2 qui définissent deux roues de friction virtuelles ayant le même comportement cinématique que le système poulie-courroie. On les nomme cercles primitifs.



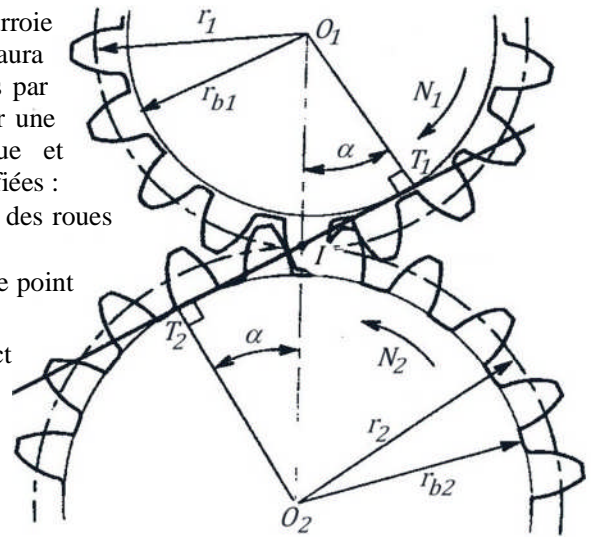
c) Principe de l'engrènement

La limite d'emploi des roues de friction ou d'un système poulie-courroie vient de ce que si le couple à transmettre est trop important, alors il y aura glissement au contact. D'où l'idée de transmettre ce couple non plus par friction mais par obstacle (dents...). Le problème est alors de définir une forme à ces obstacles, telle que la transmission soit continue et homocinétique. Elle le sera si les deux analogies précédentes sont vérifiées :

- il existe un point de vitesse nulle dans le mouvement relatif des roues (point fixe mais non matériel);
- la ligne d'action de la force transmise par contact passe par ce point et ne varie pas au cours du mouvement.

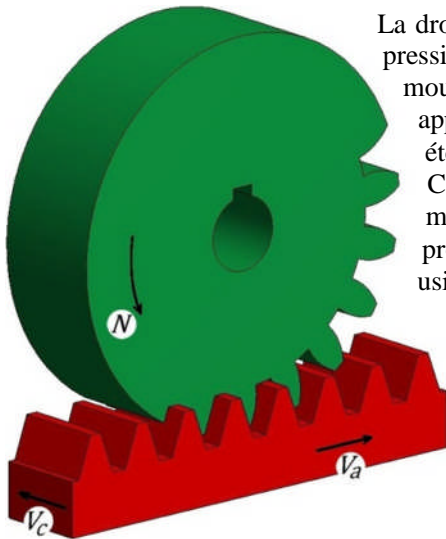
Il faut donc réaliser un profil de dents tel que le point de contact entre deux dents soit toujours sur la droite (T_1T_2) (et ce quels que soient les rayons r_1 et r_2). Un tel profil est dit "en développante de cercle".

On retrouve sur la figure ci-contre les notations introduites sur les systèmes roues de friction et poulie courroie précédents.



5.1.2 - Caractéristiques des dentures

a) Taillage par crémaillère



La droite (T_1T_2) est appelée ligne d'engrènement (point de vue cinématique) ou ligne de pression (point de vue dynamique). Elle ne change pas de position au cours du mouvement. La génération d'un profil en développante de cercle s'obtient avec un outil appelé *crémaillère de taille* (ou encore *crémaillère de référence* depuis que cet outil a été remplacé par d'autres procédés) dont les flans sont perpendiculaires à (T_1T_2) . Comme représenté ci-contre, cet outil est animé, par rapport à la roue à tailler, d'un mouvement de coupe (alternatif) à la vitesse V_c et d'un mouvement d'entraînement progressif à la vitesse V_a . Si le mouvement de coupe est parallèle à l'axe de la roue usinée, la denture sera droite. S'il est incliné, la denture sera hélicoïdale.

C'est donc cette crémaillère qui va définir les dimensions de la denture. Elle est caractérisée par (voir figure suivante - l'indice o signifie "de taillage") :

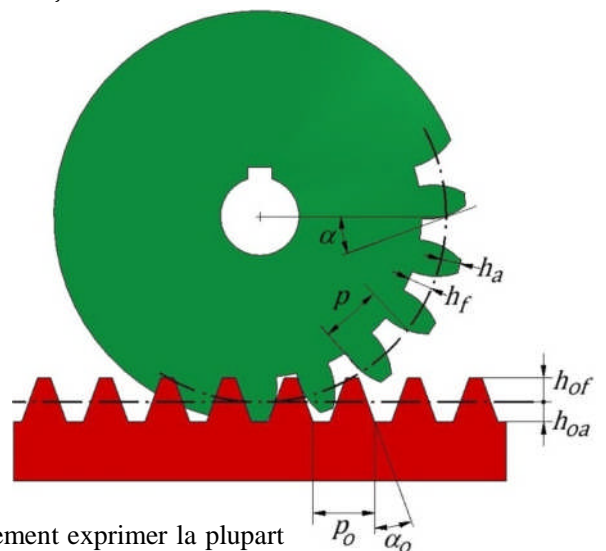
- son pas p_o (distance entre deux dents);
- son angle de profil α_o ;
- sa hauteur $h_o = h_{of} + h_{oa}$

b) Dimensions caractéristiques

Soit O le centre de la roue, il existe, à chaque instant, un point I unique de vitesse nulle dans le mouvement de celle-ci par rapport à la crémaillère. La distance OI définit le rayon primitif r de fonctionnement de la roue. Le pas p , mesuré entre deux dents consécutives sur ce cercle primitif, est égal au pas de taillage p_o . La hauteur de dent se répartit, de part et d'autre du cercle primitif, entre la saillie h_a et le creux h_f .

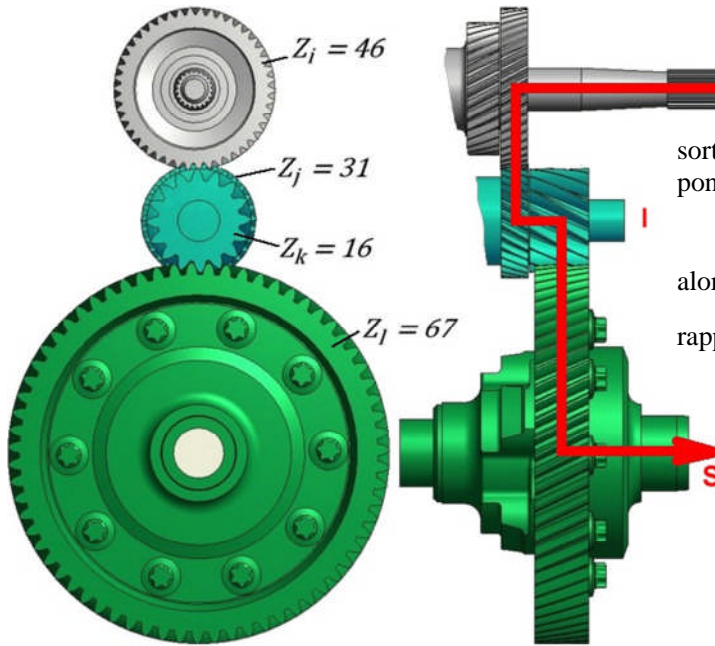
Le nombre de dents Z d'une roue ne pouvant être qu'entier, la circonférence du cercle primitif doit valoir $\pi \cdot d = Z \cdot p_o$ (avec $d = 2 \cdot r \dots$). La valeur de π étant constante mais non fractionnelle, on introduit une grandeur caractéristique $m = \frac{p_o}{\pi}$, appelée module, homogène à une longueur, et en fonction de laquelle on pourra facilement exprimer la plupart des caractéristiques dimensionnelles d'une roue. On aura, entre autre, à partir des deux relations précédentes $\boxed{d = m \cdot Z}$.

Le module étant directement proportionnel au pas, deux roues ne peuvent engrener que si elles ont même module. Le choix d'un module dans une série normalisée permettra donc de concevoir, indépendamment l'une de l'autre, des roues dentées devant engrener ensemble.



5.2 - TRAINS D'ENGRENAGES

5.2.1 - Trains simples



L'exemple donné ci-contre est celui de la transmission d'une automobile sur le rapport de 6^{ème}. On note E l'arbre d'entrée (entraîné par le moteur), I (intermédiaire) l'arbre de sortie de boîte (et donc d'entrée du pont), S l'arbre de sortie du pont (qui entraîne les roues).

Si on définit le rapport de transmission par $r = \frac{N_{sortie}}{N_{entrée}}$, alors le rapport de boîte vaut $r_b = \frac{N_I}{N_E} = \frac{Z_i}{Z_j} = \frac{46}{31} (\approx 1,484)$ et le rapport de pont vaut $r_p = \frac{N_S}{N_I} = \frac{Z_k}{Z_l} = \frac{16}{67} (\approx 0,239)$

Le rapport global vaut lui $r = \frac{N_S}{N_E} = \frac{N_S}{N_I} \cdot \frac{N_I}{N_E} = \frac{Z_k}{Z_l} \cdot \frac{Z_i}{Z_j}$

autrement dit $r = r_b \cdot r_p$

De manière générale, le rapport global d'un train simple est le produit des rapports des engrenages.

Remarques :

- On trouve dans certains ouvrages la

définition du rapport global : $r = \frac{\text{produit des dents menantes}}{\text{produit des dents menées}}$. Cette définition n'est valable que si on définit d'abord $r = \frac{N_{sortie}}{N_{entrée}}$...

- L'exemple précédent est particulier : on trouve en effet $r = \frac{16}{67} \cdot \frac{46}{31}$ soit le produit d'un rapport < 1 et d'un rapport > 1 . Autrement dit on augmente la vitesse avant de la réduire... En général, les rapports sont tous inférieurs à 1, ou tous supérieurs à 1 (cette règle se vérifie d'ailleurs pour les 4 premiers rapports d'une boîte de vitesse).
- La plupart des mécanismes sont des réducteurs... de vitesse ! Autrement dit, si $r = \frac{N_{sortie}}{N_{entrée}}$, on doit trouver $r < 1$.
- L'introduction d'un signe '-' dans l'expression du rapport permet d'exprimer l'inversion (éventuelle) du sens de rotation.

5.2.2 - Trains épicycloïdaux

a) Constitution

Dans sa forme la plus simple, un train épicycloïdal associe deux engrenages :

- planétaire - satellite(s)
- couronne - satellite(s)

entre trois axes :

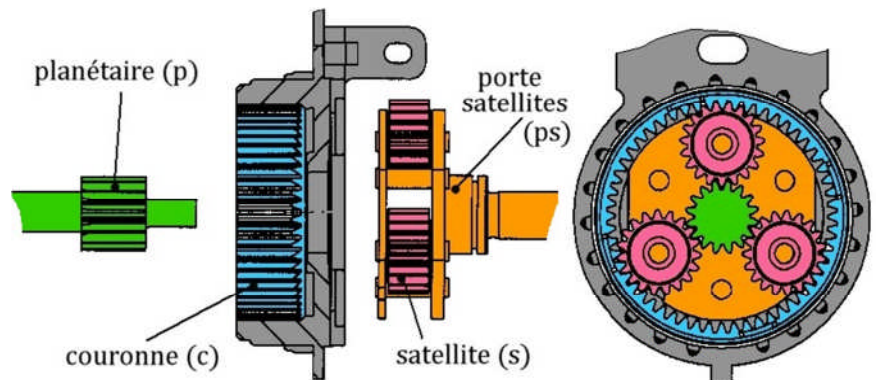
- planétaire
- couronne
- porte-satellites.

Les satellites sont animés d'un double mouvement de rotation :

- autour de leur axe propre
- autour de l'axe du porte-satellites

d'où leur nom...

Le planétaire et la couronne ne tournent que sur eux-mêmes.



b) Relation cinématique de Willis

Par rapport au porte-satellites, on retrouve un train simple, et donc on a $\frac{N_{p/ps}}{N_{c/ps}} = -\frac{Z_c}{Z_s} \cdot \frac{Z_s}{Z_p}$

Par composition des vitesses, on a $N_{p/ps} = N_{p/0} - N_{ps/0}$ qu'on notera plutôt $N_{p/ps} = N_p - N_{ps}$. Idem pour $N_{c/ps}$

Deux ces relations on déduit une loi de vitesses par rapport au bâti : $\frac{N_p - N_{ps}}{N_c - N_{ps}} = -\frac{Z_c}{Z_s} \cdot \frac{Z_s}{Z_p}$

Cette relation se généralise sous l'appellation "formule de Willis" :

- on appelle raison basique la quantité $\lambda = (-1)^k \cdot \frac{Z_c}{Z_s} \cdot \frac{Z_s}{Z_p}$

- et la relation cinématique s'écrit $\frac{N_p - N_{ps}}{N_c - N_{ps}} = \lambda$

Le paramètre k représente le nombre de contacts extérieurs au niveau d'un satellite. Nous verrons dans les exemples futurs que la quantité $(-1)^k$ permet d'exprimer, en fin de calcul, le sens de rotation de la sortie par rapport à l'entrée. Si $k = 1$ alors $(-1)^k = -1$, si $k = 2$ alors $(-1)^k = +1$.

c) Relation cinématique de Ravigneaux

De la formule de Willis on déduit $N_p - N_{ps} = \lambda \cdot (N_c - N_{ps})$ soit $N_p - N_{ps} = \lambda \cdot N_c - \lambda \cdot N_{ps}$ et donc :

$$N_p + (\lambda - 1) \cdot N_{ps} - \lambda \cdot N_c = 0$$

d) Lois entrée-sortie

Cette relation comporte trois inconnues et on cherche un rapport, autrement dit une relation entre deux de ces inconnues. Il faut donc une condition supplémentaire pour pouvoir résoudre.

- 1^{er} cas : si $N_p = 0$ (ce qui, technologiquement, signifie que le planétaire est lié au bâti). La relation devient $(\lambda - 1) \cdot N_{ps} - \lambda \cdot N_c = 0$ d'où $(\lambda - 1) \cdot N_{ps} = \lambda \cdot N_c$ et $\frac{N_{ps}}{N_c} = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$ (ou bien $\frac{N_c}{N_{ps}} = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$ ce qui revient au même).
- 2^d cas : si $N_c = 0$ alors $N_p + (\lambda - 1) \cdot N_{ps} = 0$ et $\frac{N_p}{N_{ps}} = 1 - \lambda$ (ou $\frac{N_{ps}}{N_p} = \frac{1}{1 - \lambda}$)
- 3^{eme} cas : si $N_{ps} = 0$ alors $N_p - \lambda \cdot N_c = 0$ et $\frac{N_p}{N_c} = \lambda$ (ou $\frac{N_c}{N_p} = \frac{1}{\lambda}$)
- 4^{eme} cas : si $N_p = N_c$ (ce qui, technologiquement, signifie que le planétaire et la couronne sont liés), alors la relation initiale devient $N_p + (\lambda - 1) \cdot N_{ps} - \lambda \cdot N_p = 0$ soit $(1 - \lambda) \cdot N_p + (\lambda - 1) \cdot N_{ps} = 0$ dont on déduit que $N_p = N_{ps}$. Il y aura donc égalité des trois vitesses (on parle alors de train "bloqué"). Cette égalité est bien sûr vérifiée quels que soient les deux éléments liés au départ.
- 5^{eme} cas : il correspond à une situation où une des trois vitesses est gérée par un autre mécanisme.

e) Relation dynamique de Ravigneaux

Un train épicycloïdal est un mécanisme à trois axes. En application de la loi de conservation énergétique, la somme des puissances développées sur chacun de ces axes est nulle : $P_p + P_{ps} + P_c = 0$. Or $P = C \cdot \omega$ et $\omega = \frac{\pi \cdot N}{30}$, donc la relation précédente devient $C_p \cdot N_p + C_{ps} \cdot N_{ps} + C_c \cdot N_c = 0$

On montre à partir de cette relation et de la relation cinématique de Ravigneaux que :

$$\frac{C_p}{1} = \frac{C_{ps}}{\lambda - 1} = \frac{C_c}{-\lambda}$$