Soit S un système isolé et soit R un référentiel galiléen dans lequel on effectue les mesures. Le principe de conservation d'énergie stipule que l'énergie totale de S reste constante au cours du temps. Cette énergie est la somme de termes nombreux et variés, que l'on peut regrouper en grandes familles : énergie cinétique, énergie potentielle (élastique, gravitationnelle, électrostatique), calorifique, de rayonnement, chimique, etc… Appelons $E_{\mathrm{C}}(t)$ l'énergie cinétique totale de S à l'instant t, et $E_{\mathrm{X}}(t)$ la somme des autres termes. Le principe de conservation d'énergie permet d'écrire :

$$E_{\mathrm{X}}(t)+E_{\mathrm{C}}(t)=E_{\mathrm{T}}$$

Où E_{T} est l'énergie totale de S. E_{X} et E_{C} peuvent varier au cours du temps : lors de chocs non élastiques entre objets par exemple, l'énergie cinétique peut diminuer et l'énergie thermique augmenter. Par contre E_{T} reste constante, quoi qu'il arrive à l'intérieur de S.

Pour plus de commodité dans les calculs nous pouvons écrire :

$$\frac{dE_{\mathrm{X}}(t)}{dt}+\frac{dE_{\mathrm{C}}(t)}{dt}=0 \qquad (1)$$

Supposons que S soit constitué de n objets de masses $m_1, m_2 \cdots m_n$ animés, à un instant t, de vitesses $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_n$, alors :

$$E_{\mathrm{C}}(t)=\frac{1}{2}\left(m_1 v_1^2+m_2 v_2^2+\cdots+m_{\mathrm{n}} v_{\mathrm{n}}^2\right)$$

Utilisons maintenant un autre référentiel galiléen R', dont la vitesse mesurée dans R est $\vec{V}$. Les vitesses des mêmes objets au même instant t sont, dans ce référentiel : $\overrightarrow{w_1}=\overrightarrow{v_1}-\vec{V}$, $\overrightarrow{w_2}=\overrightarrow{v_2}-\vec{V}$ … $\overrightarrow{w_{\mathrm{n}}}=\overrightarrow{v_{\mathrm{n}}}-\vec{V}$ et l'énergie cinétique totale s'écrit donc dans R' :

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{C}}'(t) &= \frac{1}{2}\left(m_1\vec{w}_1^2+m_2\vec{w}_2^2+\cdots+m_{\mathrm{n}}\vec{w}_{\mathrm{n}}^2\right) \\ &= E_{\mathrm{C}}(t)+\frac{1}{2}\left(m_1+m_2+\cdots+m_{\mathrm{n}}\right)\vec{V}^2-\vec{V}\left(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\cdots+m_{\mathrm{n}}\vec{v}_{\mathrm{n}}\right) \end{aligned}$$

On note que $E_{\mathrm{C}}'(t)\neq E_{\mathrm{C}}(t)$ car l'énergie cinétique dépend du référentiel galiléen choisi. Comme $\left(m_1+m_2+\cdots+m_{\mathrm{n}}\right)$ et $\vec{V}$ sont des constantes on note par ailleurs que :

$$\frac{dE_{\mathrm{C}}'(t)}{dt}=\frac{dE_{\mathrm{C}}(t)}{dt}-\vec{V}\frac{d\left(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\cdots+m_{\mathrm{n}}\vec{v}_{\mathrm{n}}\right)}{dt}$$

L'énergie E_{X} est la même dans les référentiels R et R' car elle ne contient que des termes pour lesquels le changement de référentiel n'a pas d'incidence. Le principe de conservation d'énergie permet donc d'écrire, dans R' :

$$\frac{dE_{\mathrm{X}}(t)}{dt}+\frac{dE_{\mathrm{C}}'(t)}{dt}=0$$

C'est-à-dire, en remplaçant $\dfrac{dE_{\mathrm{C}}'(t)}{dt}$ par la valeur trouvée ci-dessus :

$$\frac{dE_{\mathrm{X}}(t)}{dt}+\frac{dE_{\mathrm{C}}(t)}{dt}-\vec{V}\frac{d\left(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\cdots+m_{\mathrm{n}}\vec{v}_{\mathrm{n}}\right)}{dt}=0$$

D'après (1) la somme des deux premiers termes est nulle, donc :

$$\frac{d\left(m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\cdots+m_{\mathrm{n}}\vec{v}_{\mathrm{n}}\right)}{dt}=0$$

La quantité $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\cdots+m_{\mathrm{n}}\vec{v}_{\mathrm{n}}$ reste donc constante dans le temps quoi qu'il arrive à l'intérieur de S. C'est le principe de la conservation de la quantité de mouvement.