PERONI Raphaël 35007560
MANGIS Alexandre 33000224
CAVELLA Grégory 32001629

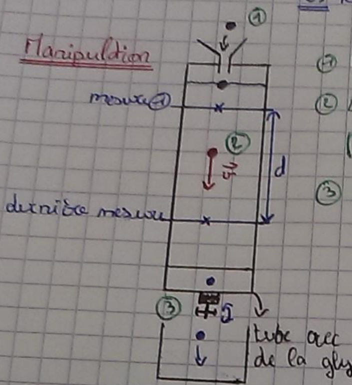
TP 4) Chute de particules dans un liquide

Introduction

Les objectifs de ce TP sont : 1) Déterminer expérimentalement la vitesse de la bille qui chute dans de la glycérol.

2) Résoudre le problème proposé dans le fascicule de TP.

Manipulation



① lâche la bille sans vitesse initiale.

② Dans sa chute la bille acquiert au bout d'un certain temps (généralement très court) une "vitesse limite" uniforme $\vec{v}$

③ une fois l'expérience terminée, on récupère la bille.

→ Soit, $d = 72,4\ cm$, $\boxed{0,724\ m}$.

→ On a un temps de chute entre la mesure ① et la dernière mesure $\boxed{t = 1,9\ s}$.

Donc, $\boxed{v = \frac{d}{t}}$

$v = \frac{0,724}{1,9}$, $\boxed{v \simeq 0,38\ m/s}$

On a déterminé t avec le logiciel.
En effet, on a : 20 pts → 1 s
38 pts → $\boxed{1,9\ s}$

Sur une distance $d = 72,4$ cm on a relevé 38 pts.

Problème

Données → $\rho = 1,257\ kg/m^3$ ↦ masse volumique de la glycérol

→ $m_{bille} = 3,53\ g \rightarrow 3,53.10^{-3}\ kg$ ↦ masse de la bille

→ $d_{bille} = 0,9\ cm \rightarrow 9.10^{-3}\ m$ ↦ diamètre de la bille

→ $g = 9,81\ m/s$

→ $V = 0,38\ m/s$ ↦ vitesse de chute de la bille dans la glycérol

- $\rho_b = \dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ → masse volumique de la bille

- $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ → volume de la bille

$$= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{9.10^{-3}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{4}{3}\pi(0,0045)^3$$

$$\Rightarrow \boxed{V = 3,817.10^{-7}\ m^3}$$

Ainsi, $\rho_b = \dfrac{3,53.10^{-3}}{3,817.10^{-7}} \simeq \underline{\underline{9248\ kg/m^3}}$

Q.1) Détermination de la viscosité η

Soit l'hypothèse, $C_x = \dfrac{24\,\eta}{\rho v d}$

Soit l'équation, $C_x = \dfrac{4(\rho_b - \rho)dg}{3\rho v^2}$

$$\Rightarrow \frac{24\,\eta}{\rho v d} = \frac{4(\rho_b - \rho)dg}{3\rho v^2}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{(\cancel{\rho} v d) \times 4(\rho_b - \rho)dg}{3\cancel{\rho} v^{\cancel{2}} \times 24}$$

$$= \frac{4(\rho_b - \rho)d^2 g}{3v \times 24} = \frac{\cancel{4}(\rho_b - \rho)d^2 g}{\underbrace{\cancel{72}}_{\Rightarrow 18} v}$$

Donc, $\boxed{\eta = \dfrac{(\rho_b - \rho)d^2 g}{18\,v}}$

A.N ⇒ $\eta = \dfrac{(9248 - 1,257)\left[(9.10^{-3})^2 \times 9,81\right]}{18 \times 0,38}$

$\Rightarrow \boxed{\eta \simeq 1,07\ Pa.s}$ Valeur théorique / vraie ⇒ $\boxed{\eta = 1,5\ Pa.s}$

On a donc une erreur relative de $\dfrac{1,5 - 1,07}{1,5} \times 100 \approx \underline{\underline{29\ \%}}$

Malgré une vitesse $v = 0,38$ m/s "très" satisfaisante, on a quand même sur la viscosité η une erreur de $\sim 30\%$, ce qui n'est pas négligeable.

Q. 2) Utilisation de la loi suivante reliant le coefficient de traînée et le nombre de Reynolds

Soit, $\boxed{C_x = \frac{24}{Re}\left(1 + \frac{3}{16} Re\right)^{\frac{1}{2}}}$

On a $\Rightarrow \frac{24^2}{Re^2}\left(1 + \frac{3}{16} Re\right) = \frac{4^2}{3^2 v^4}\left[\frac{(\rho_b - \rho) d g}{\rho}\right]^2$

$$\Rightarrow 1 + \frac{3}{16} Re = \frac{4^2 Re^2}{3^2 \underbrace{24^2}_{\Rightarrow 6^2 = \frac{24^2}{4^2}} v^4}\left[\frac{(\rho_b - \rho) d g}{\rho}\right]^2$$

En remplaçant Re par son expression $\boxed{Re = \frac{\rho v d}{\eta}}$

$$\Rightarrow 1 + \frac{3 \rho v d}{16 \eta} = \frac{(\rho v d)^2}{\eta^2 3^2 6^2 v^4}\left[\frac{(\rho_b - \rho) d g}{\rho}\right]^2$$

$\times \eta^2$

$$\Rightarrow \eta^2 + \left(\frac{3 \rho v d}{16}\right)\eta = \overbrace{\frac{(\rho v d)^2}{3^2 6^2 v^4}\left[\frac{(\rho_b - \rho) d g}{\rho}\right]^2}^{(1)}$$

calcul (1)

$(1) : \frac{\cancel{\rho^2 v^2} d^2}{18^2 \cancel{v^4} v^2}\left[\frac{\overbrace{(\rho_b d g - \rho d g)(\rho_b d g - \rho d g)}^{(2)}}{\cancel{\rho^2}}\right]$

↳ On développe les termes, et, on simplifie l'expression

$\Rightarrow \frac{\rho_b^2 d^4 g^2 - 2\rho_b \rho d^4 g^2 + \rho^2 d^4 g^2}{18^2 v^2}$

↳ On calcule (2), et on développe le d^2 dans (2)

$\Rightarrow \left[\frac{(\rho_b - \rho) d^2 g}{18 v}\right]^2$

↳ On retrouve cette expression en utilisant les identités remarquables

Donc, $\eta^2 + \left(\frac{3 \rho v d}{16}\right)\eta = \left[\frac{(\rho_b - \rho) d^2 g}{18 v}\right]^2$

$$\Rightarrow \boxed{\eta^2 + \left(\frac{3 \rho v d}{16}\right)\eta - \left[\frac{(\rho_b - \rho) d^2 g}{18 v}\right]^2 = 0}$$

Ainsi, on retrouve une équation (polynôme ici) du 2nd degré.

Donc, en posant $B = \left(\frac{3 \rho v d}{16}\right)$ et $C = \left[\frac{(\rho_b - \rho) d^2 g}{18 v}\right]^2$

On a $\Rightarrow \boxed{\eta^2 + B\eta - C = 0}$

On va donc résoudre cette équation.

Remarque $\Rightarrow$ On obtiendra 2 solutions pour η, une positive et une négative. Ici, il faudra prendre uniquement pour η la valeur positive [$\eta \rightarrow$ viscosité] qui est la valeur recherchée.

On va d'abord calculer les cste B et C.

$\rightarrow B = \frac{3 \rho v d}{16} = \frac{3 \times 1{,}257 \times 0{,}38 \times 9.10^{-3}}{16}$, et, $C = \left[\frac{(\rho_b - \rho) d^2 g}{18 v}\right]^2 = \left[\frac{(9248 - 1{,}257)(9.10^{-3})^2 9{,}8}{18 \times 0{,}38}\right]^2$

$\Rightarrow \underline{B = 8{,}06.10^{-4}}$

$\Rightarrow \underline{C = 1{,}15}$

$\Rightarrow \boxed{\eta^2 + 8{,}06.10^{-4}\eta - 1{,}15 = 0}$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (8{,}06 \cdot 10^{-4})^2 - 4 \times 1 \times (-1{,}15)$

$= \underline{4{,}6 > 0 \rightarrow 2 \text{ solutions réelles}}$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

~~$x_1 = -1{,}08$~~ < 0

On prend pas cette valeur

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\underline{\underline{x_2 = 1{,}07 > 0}}$

→ On remarque ici que notre écart relatif avec la valeur attendue ne change pas.

<u>Y-a-t-il une erreur dans les calculs ?</u>

Peut-être

Parceque normalement, il y aurait eu avoir un écart un écart relatif avec la valeur attendue, non négligeable $\boxed{\text{mais}}$ plus faible.

→ Ensuite, cet écart est dû peut-être à une modélisation imparfaite de la vitesse v

(effets de parois insuffisamment pris en compte).

Il faudrait donc utiliser des relations plus précises et une vitesse plus exacte.

CHUTE DE PARTICULES DANS UN LIQUIDE

Si on laisse tomber une particule dans un liquide, on constate que cette particule acquiert au bout d'un temps généralement très court (dépendant des caractéristiques de la particule et du liquide), une "vitesse limite" uniforme.

Ce résultat provient simplement du fait que la force extérieure FE agissant sur la particule (somme du poids et de la force d'Archimède) est constante (pour un liquide homogène) et que les forces de frottement FD sur un corps quelconque augmentent en fonction de la vitesse.

En effet, d'après la loi fondamentale de la mécanique:

$$m\frac{dU}{dt} = F_E - F_D(U) \qquad [1]$$

Supposons FE > O (particule plus dense que le liquide).
A l'instant initial :
U=0 FD(0)=0 donc

La vitesse augmente, et donc FD(U) augmente jusqu'à ce que:
FD(U)= FE

Alors $\frac{dU}{dt} > 0 \Rightarrow U = U_{limite}$

et l'équation de mouvement se ramène à :

FD(UL) = FE qui définit la vitesse limite UL.

On se propose, dans ce TP , de déterminer cette vitesse limite UL en fonction des caractéristiques de la particule et du liquide. Préalablement à toute résolution théorique ou expérimentale de ce problème, indiquons qu'il a des intérêts multiples en océanographie. Chute de particules dans les océans qui "sédimentent" au fond après avoir subi un transport horizontal dépendant du temps de chute et des courants existants.
Remontée de bulles produites par des mécanismes physico-chimiques (déferlement de vagues, etc...) ou organiques qui viennent éclater à la surface en projetant des aérosols.
Chute de divers solides dans la mer ou évaluation approximative du frottement sur un corps solide se déplaçant dans une direction quelconque. Chute d'aérosols ou de gouttes clans l'air. Etc…

I - POSITION DU PROBLEME - EQUATIONS AUX DIMENSIONS

Le problème se résume à trouver l'écoulement autour d'une particule se déplaçant selon un mouvement rectiligne uniforme (de vitesse UL) dans un fluide.

Problème qui est, évidemment, tout à fait équivalent à celui de l'écoulement autour de cette particule immobile dans un fluide en déplacement uniforme (ayant à l'infini une vitesse donnée UL). La distribution des vitesses dans le premier cas se déduit de la solution du second problème en retranchant simplement la vitesse UL alors le fluide est immobile à l'infini, et la particule se déplace avec la vitesse -UL.

Théoriquement, cette deuxième version est plus simple car on peut considérer le mouvement comme permanent.

Les équations du mouvement fluide sont les équations de la continuité et de la quantité de mouvement (Navier-Stokes)

En supposant le fluide incompressible et l'écoulement permanent :

$$\mathrm{div}\,\overline{U} = 0 \qquad [2]$$

$$\rho \overline{U}\,\overline{\mathrm{grad}}\,\overline{U} = -\,\overline{\mathrm{grad}}p + \mu\left(\Delta \overline{U}\right) \qquad [3]$$

μ est la viscosité dynamique du fluide, s'exprime en Pa.s (ou en Poiseuille (Pl) en MKSA).
On peut approximer la seconde équation en négligeant les termes d'inertie UgradU qui compliquent beaucoup ces équation en raison de leur non linéarité (approximation valable pour les faibles nombres de Reynolds).

On obtient le système

$$\mathrm{div}\,\overline{U} = 0$$
$$-\,\overline{\mathrm{grad}}p + \mu\left(\Delta \overline{U}\right) = 0 \qquad [4]$$

en écriture cartésienne, 1D, cette équation s'écrit :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0 \qquad [5]$$

avec $\overline{U}(u, v, w)$

Avant d'essayer de traiter l'un de ces systèmes d'équations, nous allons appliquer au problème une méthode très générale de résolution des problèmes physiques les concepts de similitude et d'analyse dimensionnelle.

Tout problème de mécanique des fluides peut être résolu à partir des équations de Navier-Stokes complétées par l'équation d'état du fluide. Du point de vue mathématique, la solution est déterminée si on ajoute les conditions aux limites et les conditions initiales.
Mais le système d'équations ainsi constitué est souvent trop complexe pour être résolu complètement par le calcul. On essaye alors de faire certaines approximations, qu'il faut justifier.
Par exemple, en aéronautique les essais sur modèles réduits jouent un rôle prépondérant dans l'étude de tout nouvel avion. On étudie de cette façon les caractéristiques aérodynamiques d'un appareil entier ou d'un profil d'aile. Mais les résultats des mesures expérimentales établies sur des maquettes ne sont transposables au prototype, que si les données définissant chacun des deux problèmes satisfont à un certain nombre de relations qu'on appelle conditions de similitude.
Les conditions de similitude traduisent certaines analogies entre prototype et maquette : ces analogies seront d'ordre géométrique, cinématique, dynamique et thermodynamique.

Décrire un phénomène physique revient à établir une ou plusieur relations liant les grandeurs physiques qui interviennent.
Le but commun de l'analyse dimensionnelle et de la similitude est de constituer, à partir des grandeurs physqiues dimensionnelles, des groupements sans dimension caractéristiques du phénomène.
L'intérêt essentiel de ces groupements ou nombres sans dimension est de simplifier les études expérimentales, en diminuant le nombre des investigations.
Toutefois, les expressions des relations fonctionnelles entre nombres sans dimension doivent être déterminées expérimentalement. Les processus propres au phénomène considéré ne sont pas expliqués par ces groupement sans dimension.
Pour appliquer les méthodes de l'analyse dimensionnelle, il suffit de connaître toute les grandeurs physiques intervenant, ainsi que leurs dimensions.
Par contre les méthodes de similitude imposent la connaissance des équations régissant les phénomènes.
Etablir une loi physique consiste à chercher une relation mathématique existant entre des grandeurs indépendantes.
Si une telle relation existe, elle peut se mettre sous la forme :

$$f(E_1, E_2, \dots E\ \ ) = 0$$

Le phénomène est indépendant des unités choisies pour les différentes grandeurs. Il doit en être de même pour la relation f, donc nécessairement f doit être homogène par rapport à chacune des dimensions cela donne par exemple pour un problème d'échange de chaleur les variables suivantes :

Grandeurs	Symbole	unités MKS	Eqs aux dimensions
1 diamètre du tube	D	m	[L]
2 vitesse du fluide	Ux	m/s	$[LT^{-1}]$
3 masse volumique du fluide	ρ	Kg/m^3	$[ML^{-3}]$
4 viscosité dynamique du fluide	μ	Poise	$[ML^{-1}\ T^{-1}]$
5 conductance thermique du fluide	λ	watt/m°C	$[ML\ T^{-3}\ \theta^{-1}]$
6 chaleur spécifique	Cp	Joule/kg°C	$[L^2\ T^{-2}\ \theta^{-1}]$
7 coefficient d'échange de chaleur	h	Joule/m2 s °C	$[MT^{-3}\ \theta^{-1}]$

On dénombre 7 grandeurs physiques et 4 dimensions. On peut prévoir 3 groupements sous dimension. Leur recherche systématique se fait de la manière suivante :

$$\Pi = D^a.\ \lambda^{b} u^{c}.\ \rho^{d}.\ \mu^{e}.\ Cp^{f} h^{g}$$

d'où, avec l'analyse dimensionnelle, la relation :

$$[\Pi] = [M]^{b+d+e+g}\,[L]^{a+b+c-3d-e+2f}\,[T]^{-3b-c-e-2f-3g}\,[\theta]^{-b-f-g}$$

Π devant être sans dimension, les relations qui suivent doivent être vérifiées :

$$\begin{cases} b+d+e+g=0 \\ a+b+c-3d-e+2f=0 \\ -3b-c-e-2f-3g=0 \\ -b-f-g=0 \end{cases}$$

4 équations et 7 inconnues, 3 peuvent être choisies arbitrairement si le déterminant du système n'est pas nul.
on prendra : c=d=0 et g =1
alors$\Rightarrow$ a = 1, b = -1, e = f = 0 et
$\Pi_1 = hD/\lambda$ appelé le nombre de Nusselt.

Appliquons cette méthode à notre problème en supposant la particule sphérique, (on se ramènera ensuite à ce cas pour des particules de forme quelconque).

Adimensionnalisation des équations de Navier-Stokes.

Nous allons reprendre les équations précédentes en changeant de variables, nous utiliseront des variables réduites, définies par :

$$x_+ = \frac{x}{D},\ u_+ = \frac{u}{U_L},\ t_+ = \frac{U_L}{D}t,\ p_+ = \frac{p}{\rho U_L^2}$$

ces nouvelles variables sont sans dimension. On obtient les relations suivantes :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial\left(\rho U_L^2 p_+\right)}{\partial(D\,x_+)} = \frac{\rho U_L^2}{D}\frac{\partial p_+}{\partial x_+}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\left(U_L u_+\right)}{\partial(D\,x_+)} = \frac{U_L}{D}\frac{\partial u_+}{\partial x_+}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\left(U_L u_+\right)}{\partial(D\,x_+)^2} = \frac{U_L}{D^2}\frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2}$$

Ce qui donne en remplaçant ces termes dans Navier-Stokes :

$$\frac{U_L^2}{D}\frac{u_+\partial u_+}{\partial x_+} = -\frac{1}{\rho}\frac{\rho U_L^2}{D}\frac{\partial p_+}{\partial x_+} + \frac{\mu}{\rho}\frac{U_L}{D^2}\frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2} \quad \text{soit}$$

$$\frac{u_+\partial u_+}{\partial x_+} = -\frac{\partial p_+}{\partial x_+} + \frac{\mu}{\rho}\frac{1}{U_L D}\frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2} \qquad [6]$$

Le terme

$$\frac{\rho U_L D}{\mu} \text{ est le nombre de Reynolds } = Re = \frac{\text{forces d'inertie}}{\text{forces de viscosité}}$$

Il caractérise l'écoulement d'un fluide. Ce coefficient est sans dimension, sa valeur numérique ne dépend donc pas du système d'unités choisies.

On a similitude entre deux écoulements si les nombres de Reynolds de ces deux écoulements sont identiques. Pour un écoulement donné, on peut constituer une infinité de nombres de reynolds différents, puisque U et D sont des grandeurs prises arbitrairement. Mais si on compare les nombres de Reynolds entre deux écoulements différents il est absolument indispensable de les constituer tous les deux avec des grandeurs homologues prises en des endroits homologues à des instants homologues.

Dans le cas général, les seules quantités intervenant dans le problème sont :

F_L, U_L, D, μ et ρ

D = diamètre sphère
μ = viscosité dynamique du fluide
ρ = masse volumique du fluide

En utilisant l'analyse dimensionnelle on peut démontrer les relations suivantes :

$\frac{D\mu U_L}{F_E}$ = constante et donc que la vitesse limite U_L est donnée par la formule :

$U_L = k\frac{gd^2\Delta\rho}{\mu}$ k étant une constante à déterminer théoriquement ou expérimentalement

$\Delta\rho = \rho_S - \rho$

La même méthode permet de relier UL au coefficient de traînée. L'écoulement présente un axe de symétrie et les forces de résistances se réduisent aux seules forces de frottement FD proportionnelles à la surface que présente la particule au fluide ainsi qu'à sa vitesse au carré.
Par définition le coefficient de traînée est :

$$C_d = \frac{F_E}{(\pi D^2/4)\frac{1}{2}\rho U_L^2} = f(R_e)$$

Sachant que F_E est la somme du poids et de la poussée d'Archimède déterminer Cd .

Deux autres nombres sans dimensions sont important également les nombres :

$$N_u = \frac{R_e}{C_d} \quad \text{et} \quad N_d = C_d R_e^2$$

Ces deux nombres sont reliés entre eux par la relation :

$$N_u^{1/3} = g(N_d^{1/3})$$

f ou g (au choix) étant à déterminer théoriquement ou expérimentalement.

II - RESOLUTION EXPLICITE POUR UNE PARTICULE SPHERIQUE AVEC L'APPROXIMATION DES FAIBLES NOMBRES DE REYNOLDS

L'écoulement autour de la sphère est donné par le système d'équations (4).

Avec Re « 1 et les conditions aux limites