Mécanique des fluides

Epreuve du 10 Mars 2017

Durée: 2H30 Heures

Les notes de cours sont autorisées

L'espace est rapporté à un repère cartésien O.N.D : $\mathcal{R}=O\vec{e_1}\vec{e_2}\vec{e_3}$.

Exercice

On considère un solide de forme prismatique de longeur l à base triangulaire. La section, supposée située dans le plan $(\vec{e_1}, \vec{e_3})$ a une base de longueur $2L$, et une hauteur h cf. figure (2). Le solide repose sur le fond plan d'un récipient rempli d'un fluide de masse volumique ρ jusqu'au niveau H. On désigne par p la presssion dans le fluide. La surface libre du fluide est en contact avec l'atmosphère où règne une pression, notée p_0, supposée constante.

1. Donner l'expression de la pression p en tout point du fluide.
2. Exprimer $\tan\alpha$ et $\cos\alpha$ en fonction de L et h. Déduire les expressions des normales unitaires à AB et à BC.
3. Montrer que, pour une surface parallèle au prisme et s'appuyant sur AB ou BC, l'élément de surface ds peut s'écrire sous la forme : $ds = l\frac{dz}{\cos\alpha}$
4. Trouver $\vec{\mathbf{F}}$ la résultante des efforts de pression exercés par le fluide sur le prisme.
5. Calculer le poids du fluide qui occuperait le volume du prisme.
6. Montrer que $\vec{\mathbf{F}}$ n'est pas égale à la poussée d'Archiméde $\vec{\mathbf{P}}$.
7. Calculer le vecteur $\vec{\mathbf{F}} - \vec{\mathbf{P}}$. Comment expliqueriez vous cette différence ?

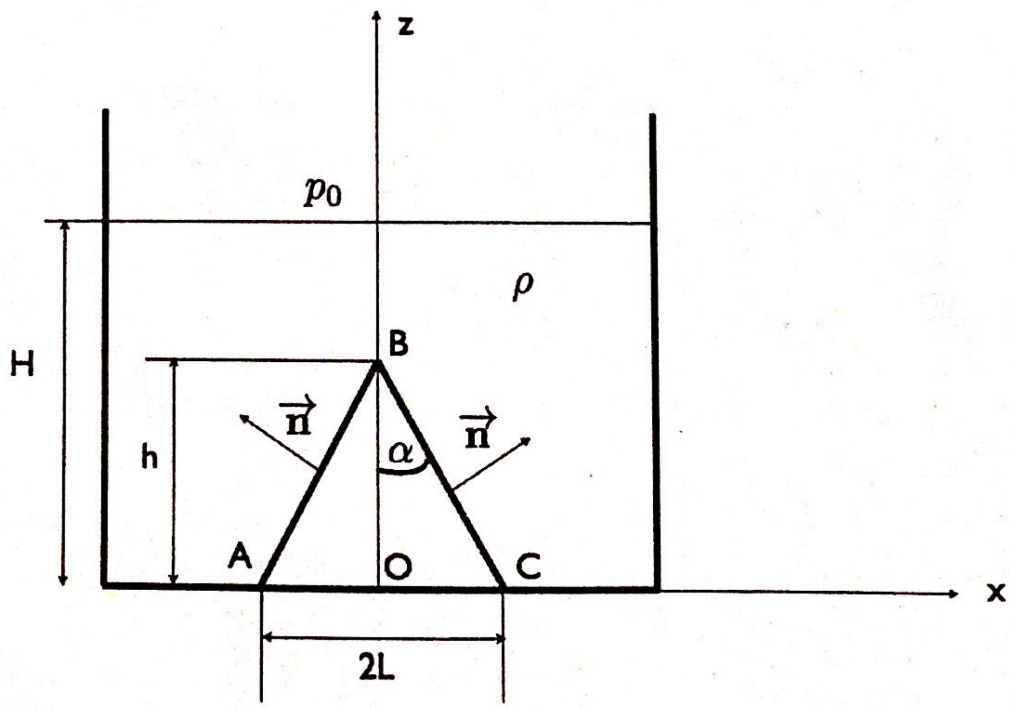

Figure 1:

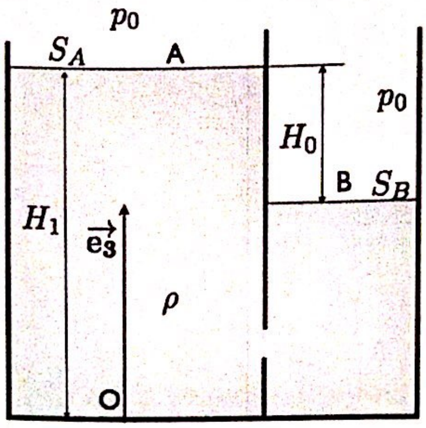

Figure 2:

Problème

Dans tout le problème, le liquide considéré est supposé parfait, incompressible de masse volumique ρ, soumis au champ de la pesanteur $\vec{g}$. L'axe $\mathbf{O}\vec{\mathbf{e_3}}$ est vertical ascendant si bien que $\vec{g} = -g\,\vec{e_3}$.
On considère un réservoir constitué de deux cylindres de révolution $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ séparées par un orifice noyé de section s cf. figure (2).
On note S_A (respectivement S_B) l'aire de la section du réservoir $\mathcal{R}_1$ (respectivement du réservoir $\mathcal{R}_2$)
A l'instant initial, les deux cylindres verticaux sont remplis d'un fluide au repos. On note H_0 la différence de niveau et H_1 la hauteur du fluide dans le réservoir $\mathcal{R}_1$ quand l'orifice est fermé. A partir de l'instant $t = 0$, l'orifice est ouvert, le fluide n'est plus alors au repos. On se propose de trouver le temps T pour que le fluide soit au même niveau en A et en B. La hauteur finale, à l'instant T, du fluide dans les deux rservoirs sera notée H_f.

Pour cela, on supposera que l'on peut appliquer le théorème de Bernoulli bien que l'écoulement ne soit pas stationnaire et on fait les approximations suivantes :

- A chaque instant les deux surfaces libres sont supposées horizontales. Les vitesses du fluide aux surfaces libres sont supposées verticales (parallèles à $\vec{e_3}$) et restent uniformes le long de chaque surface libre. On note $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ leur vecteur vitesse respective dans le réservoir $\mathcal{R}_1$ et le réservoir $\mathcal{R}_2$.
- Leur Hauteur (dépendant du temps) sont notées respectivement $z_1(t), z_2(t) \quad t \geq 0$.

Questions

1. *En utilisant l'incompressibilté du fluide, établir une relation entre les modules des vitesses $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ et les surfaces S_A et S_B.*

2. *Exprimer $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ en fonction de $\frac{dz_1}{dt}$, $\frac{dz_2}{dt}$ respectivement.*

3. *Déduire des deux questions précédentes la relation $S_A z_1(t) + S_B z_2(t) = C$, où C est une constante.*

4. *Montrer que C est donnée par : $C = (S_A + S_B)H_f$*

5. *Ecrire le thèroème de Bernoulli entre deux points A et B des surfaces libres et établir la relation :*

$$\| \vec{V_1} \|^2 = \frac{2gS_B}{S_A - S_B}(z_1 - H_f)$$

6. *Montrer que $z_1(t)$ est solution de l'équation différentielle :* $\dfrac{dz_1}{\sqrt{z_1 - H_f}} = -\sqrt{\dfrac{2gS_B}{S_A - S_B}}dt$

7. *En intégrant l'équation différentielle obtenue dans l'équation précédente, donner l'expression de T.*

On rappelle l'égalité : $\int \dfrac{dz_1}{\sqrt{z_1 - H_f}} = 2\sqrt{z_1 - H_f}$,

8. *En utilsant la conservation de la masse, montrer que $H_f = H_1 - H_0\dfrac{S_B}{S_A + S_B}$.*