

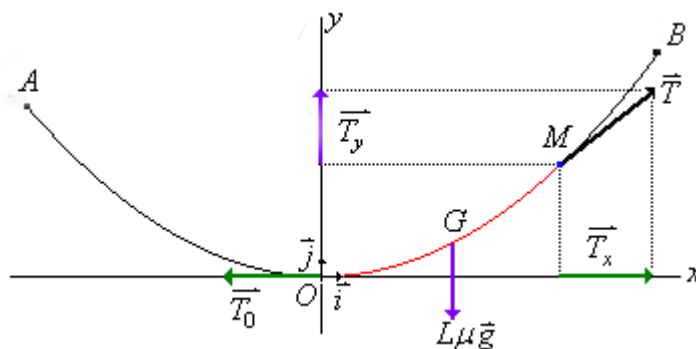
CÂBLES SUSPENDUS

Galilée, fut sans doute le premier à s'intéresser à la chaînette qu'il prit pour un arc de parabole. Jean Bernoulli, Huygens et Leibniz trouvèrent (indépendamment) en réponse au défi lancé par Jakob Bernoulli, sa véritable nature en 1691 : engendrée par un cosinus hyperbolique.



Source Chronomaths

Considérons (source: ChronoMath) pour l'étude un câble homogène, flexible, attaché en deux points A et B . Dans sa position d'équilibre, le câble pend dans un plan vertical et semble prendre une forme parabolique. En fait, pas vraiment...



Créons dans ce plan un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , où O désigne le point le plus bas du câble et notons \vec{g} le champ de pesanteur à son endroit.

Appelons \vec{T}_0 la tension au point O faisant écho à la tension en M de sorte que la portion de câble $[OM]$ de longueur L , soumise à son poids linéique au point G , soit en équilibre au sens statique:

$$\vec{T} + \vec{T}_0 + \mu L \vec{g} = \vec{0}$$

Projetons sur les axes de coordonnées en notant α l'angle $\widehat{i\vec{T}}$.

Nous avons alors les décompositions suivantes:

$$\begin{aligned}\bar{T} &= T_x \bar{i} + T_y \bar{j} = (\|\bar{T}\| \cos \alpha) \bar{i} + (\|\bar{T}\| \sin \alpha) \bar{j} \\ \bar{T}_0 &= -\|\bar{T}_0\| \bar{i} \\ \mu L \bar{g} &= -\mu L \|\bar{g}\| \bar{j}\end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire le système:

$$\begin{aligned}(\|\bar{T}\| \cos \alpha) \bar{i} - \|\bar{T}_0\| \bar{i} &= \bar{0} \\ (\|\bar{T}\| \sin \alpha) \bar{j} - \mu L \|\bar{g}\| \bar{j} &= \bar{0}\end{aligned}$$

Soit après simplification:

$$\begin{aligned}\|\bar{T}\| \cos \alpha - \|\bar{T}_0\| &= 0 \\ \|\bar{T}\| \sin \alpha - \mu L \|\bar{g}\| &= 0\end{aligned}$$

Soit:

$$\begin{aligned}\|\bar{T}\| \cos \alpha &= \|\bar{T}_0\| \\ \|\bar{T}\| \sin \alpha &= \mu L \|\bar{g}\|\end{aligned}$$

En calculant le rapport:

$$\tan \alpha = \frac{\mu L \|\bar{g}\|}{\|\bar{T}_0\|} = L \frac{\mu \|\bar{g}\|}{\|\bar{T}_0\|} = \frac{L}{k}$$

Pour obtenir une équation différentielle différentions... (là c'est subtil...):

$$d(\tan \alpha) = \frac{dL}{k}$$

Ensuite:

$$d(\tan \alpha) = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{k} = dx \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{k}$$

Mais la tangente c'est aussi la dérivée de la fonction décrivant la chaînette. Donc:

$$d(\tan \alpha) = d(y') = dx \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{k}$$

Il vient alors:

$$\frac{y''}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{k}$$

Posons $u = y'$ et cherchons la primitive du membre de gauche dans un premier temps (celle du membre droite étant évidente). Les calculs faits dans le chapitre de Calcul Différentiel Et Intégral dans la détermination des primitives et intégrales usuelles nous donne:

$$\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} dx = \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) + c^{te}$$

Nous avons donc:

$$\ln\left(y' + \sqrt{1+y'^2}\right) = \frac{x}{k} + c^{te}$$

en passant à l'exponentielle:

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{x}{k} + c^{te}}$$

en remarquant que dans notre problème en $x = 0$ nous avons bien $y' = 0$.

Pour trouver y' nous utilisons une astuce: Nous savons que la fonction est symétrique. Donc si nous remplaçons x par $-x$ la tangente change aussi de signe et passe de y' à $-y'$:

$$-y' + \sqrt{1+(-y')^2} = e^{\frac{-x}{k} + c^{te}}$$

En soustrayant:

$$y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{x}{k} + c^{te}} \quad \text{et} \quad -y' + \sqrt{1+y'^2} = e^{\frac{-x}{k} + c^{te}}$$

il vient:

$$2y' = e^{\frac{x}{k} + c^{te}} - e^{\frac{-x}{k} + c^{te}} \Rightarrow y' = \frac{e^{\frac{x}{k} + c^{te}} - e^{\frac{-x}{k} + c^{te}}}{2}$$

Donc après intégration:

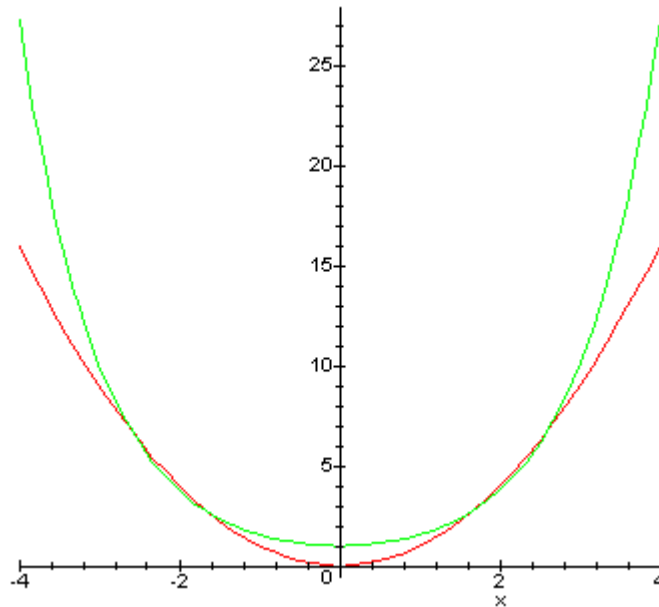
$$y = k \frac{e^{\frac{x}{k} + c^{te}} - e^{\frac{-x}{k} + c^{te}}}{2} = k \cosh\left(\frac{x}{k} + c_1^{te}\right) + c_2^{te}$$

Soit:

$$y = \frac{T_0}{\mu \cdot g} \cosh\left(x \frac{\mu \cdot g}{T_0} + c_1^{te}\right) + c_2^{te}$$

Nous voyons bien avec Maple la différence entre une parabole et la chaînette:

> plot([x^2,cosh(x)],x=-4...4);



Considérons maintenant deux points dans le plan (x_1, y_1) , (x_2, y_2) et déterminons l'équation de la chaînette de longueur L ayant ces deux points comme extrémités.

Nous avons les deux équations :

$$\begin{cases} y_1 = k \cosh\left(\frac{x_1}{k} + c_1^{te}\right) + c_2^{te} \\ y_2 = k \cosh\left(\frac{x_2}{k} + c_1^{te}\right) + c_2^{te} \end{cases}$$

Nous obtenons une troisième équation à l'aide de la longueur L qui est connue. En effet (cf. chapitre de Mécanique Analytique):

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{k} + c_1^{te}\right)} dx = \int_{x_1}^{x_2} \cosh\left(\frac{x}{k} + c_1^{te}\right) dx \\ &= k \left(\sinh\left(\frac{x_2}{k} + c_1^{te}\right) - \sinh\left(\frac{x_1}{k} + c_1^{te}\right) \right) \end{aligned}$$

où nous avons toujours:

$$k = \frac{T_0}{\mu \cdot g}$$

Ainsi nous obtenons un système non linéaire de trois équations à trois inconnues (k, c_1^{te}, c_2^{te}) :

$$\begin{cases} y_1 = k \cosh\left(\frac{x_1}{k} + c_1^{te}\right) + c_2^{te} \\ y_2 = k \cosh\left(\frac{x_2}{k} + c_1^{te}\right) + c_2^{te} \\ L = k \left(\sinh\left(\frac{x_2}{k} + c_1^{te}\right) - \sinh\left(\frac{x_1}{k} + c_1^{te}\right) \right) \end{cases}$$

Déterminons à titre d'exemple la chaînette de longueur 38 cm passant par les points $(-9, 0)$, $(9, 10)$.

Il faut alors résoudre le système suivant :

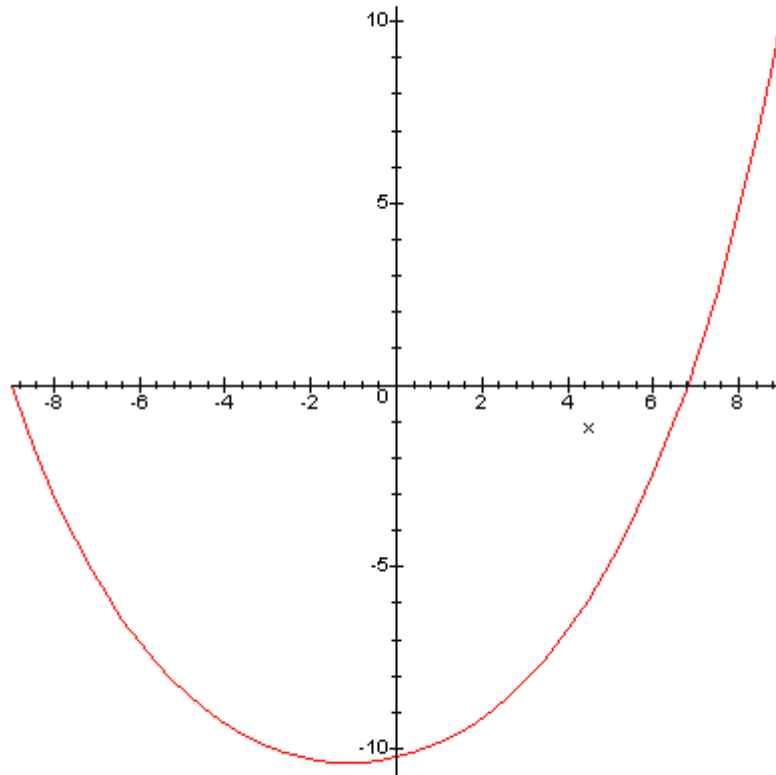
$$\begin{cases} 0 = k \cosh\left(\frac{-9}{k} + c_1^{te}\right) + c_2^{te} \\ 10 = k \cosh\left(\frac{9}{k} + c_1^{te}\right) + c_2^{te} \\ 38 = k \left(\sinh\left(\frac{9}{k} + c_1^{te}\right) - \sinh\left(\frac{-9}{k} + c_1^{te}\right) \right) \end{cases}$$

Voici les commandes Maple qui nous permettent d'obtenir le résultat.

```
e1:=0=k*cosh(-9/k+c1)+c2;
e2:=10=k*cosh(9/k+c1)+c2;
e3:=38=k*(sinh(9/k+c1)-sinh(-9/k+c1));
fsolve({e1,e2,e3},{k,c1,c2},{k=0..infinity});
```

Maple donne : $k = 4.073758798$, $c_1 = .2694982504$, $c_2 = -14.46356329$.

Graphiquement nous avons alors:



Dans le cas des lignes de chemins de fer électrifiées, nous pallions à la flèche (cf. chapitre de Génie Mécanique) rédhibitoire par un câble porteur principal de la caténaire : le câble supérieur (ci-dessous à droite) subit une flèche acceptée, ce qui diminue les tensions entre les pylônes. La caténaire reste ainsi bien linéaire grâce aux accroches auxiliaires multiples à un câble auxiliaire.

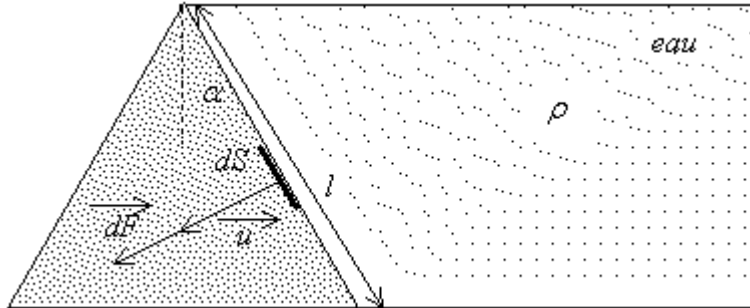


Source Chronomaths

Sinon signalons que nous retrouvons aussi les chaînettes dans tous les endroits de la vie de tous les jours où un câble est suspendu entre deux points sur une même horizontale.

BARRAGES

Considérons le barrage de hauteur z , de longueur L et stockant de l'eau de densité ρ ci-dessous:



Nous avons vu dans le chapitre de Mécanique des Milieux Continus que la pression hydrostatique était donnée par:

$$P = P_0 + h \cdot \rho \cdot g$$

mais dans cette situation nous avons évidemment:

$$P = P_0 + (h - z) \cdot \rho \cdot g$$

Ainsi lorsque nous nous plaçons à la surface de l'eau en $z = h$:

$$P = P_0$$

soit la pression de l'air à la surface du lac de barrage.

Sur un élément de surface d'aire dS il s'exerce une force élémentaire:

$$\overline{dF} = P \cdot dS \cdot \vec{u} = P \cdot L dl \cdot \vec{u}$$

Or:

$$\cos \alpha = \frac{z}{l} \Rightarrow dl = \frac{dz}{\cos \alpha}$$

Ainsi:

$$\overline{dF} = P \cdot L dl \cdot \vec{u} = (P_0 + (h - z) \cdot \rho \cdot g) \cdot L \frac{dz}{\cos \alpha} \cdot \vec{u}$$

d'où après intégration

$$F = P \cdot L dl = \int_0^h (P_0 + (h-z) \cdot \rho \cdot g) \cdot \frac{L}{\cos \alpha} dz = \frac{Lh}{\cos \alpha} \left(P_0 + \frac{1}{2} \rho gh \right)$$

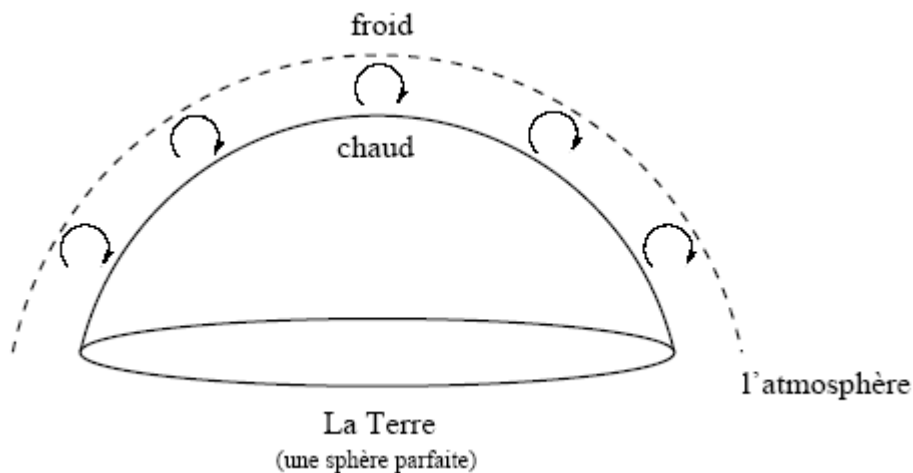
Il s'agit donc de la force exercée sur la face immergée. La force sur la face émergée (à gauche sur l'illustration) est simplement donnée en posant $\rho = 0$. Nous avons donc:

$$F = \frac{Lh}{\cos \alpha} P_0$$

ÉQUATIONS DE LORENZ

Nous allons maintenant étudier un modèle mathématique proposé par le célèbre météorologue E. Lorenz, pour modéliser certains phénomènes météorologiques dû aux phénomènes de convection dans l'atmosphère. Effectivement, comme nous l'avons déjà vu plus haut, la température de la Terre et celle de l'atmosphère crée des courants convectifs qui ont pour effet d'influencer les phénomènes météorologiques..

Nous utiliserons une approche analytique, puis une approche numérique pour obtenir l'ensemble des solutions de ce modèle.



σ , ρ et β sont des réels positifs. Les paramètres peuvent être interprétés de la manière suivante :

- x est proportionnel à l'intensité du mouvement de convection (positif pour un mouvement dans le sens des aiguilles d'une montre, une valeur plus grande indiquant une circulation plus vigoureuse)
- y est proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et les courants descendants (le paramètre est positif quand le fluide chaud est au fond du réservoir)
- z est proportionnel à la distortion du profil du gradient de température par rapport à la linéarité (une valeur nulle correspond à un gradient linéaire, tandis qu'une valeur positive indique que la température est plus uniforme dans le milieu du réservoir, et que les plus forts gradients se trouvent sur les bords du réservoir)
- t est le temps
- σ est la constante de Prandtl, qui caractérise la viscosité et la conductivité thermique du fluide
- ρ est un paramètre de contrôle, qui représente la différence de température entre le bas et le haut du réservoir
- β mesure le rapport entre hauteur et largeur du système de convection

Les équations de Lorenz

froid



chaud

Les équations de Lorenz décrivent les phénomènes de convection d'un fluide idéal à deux dimensions, dans un réservoir chauffé par le bas.

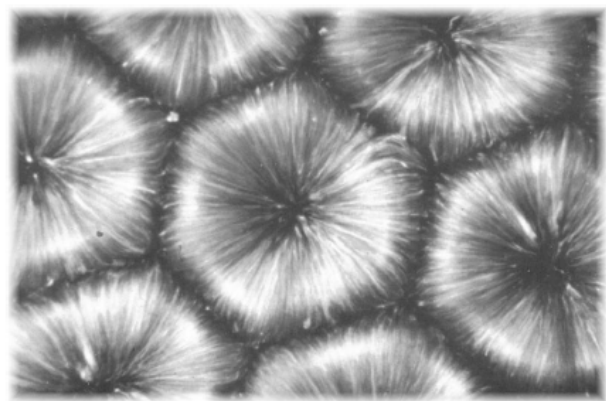
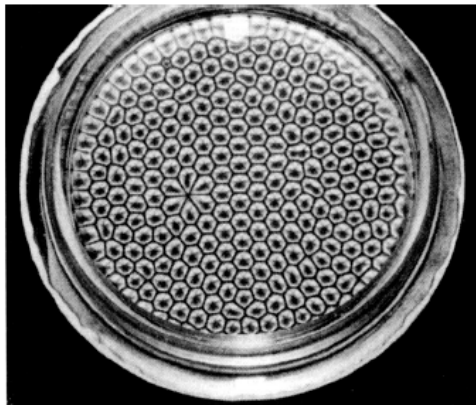
$$\frac{dx}{dt} = \sigma (y-x)$$

$$\frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz$$

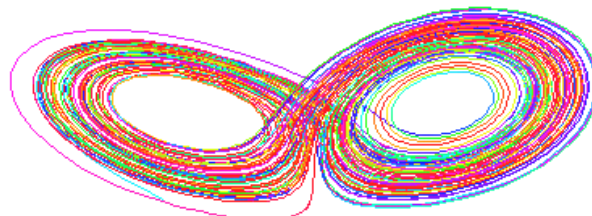
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

On considère une mince couche de fluide coincée entre deux plaques : une chaude en bas et une froide en haut.

Le fluide situé au niveau dans le bas de la couche est plus chaud et donc moins dense que le fluide situé en haut. La force d'Archimède va donc avoir tendance à faire remonter le fluide situé en bas. Dans certains cas, le fluide effectue ce mouvement en s'organisant en petites cellules hexagonales dans lesquelles, par exemple, le fluide chaud remonte au milieu et le fluide froid redescend par les cotés (voir images) . C'est un phénomène de convection. Quand on augmente trop la différence de température, ces cellules régulières disparaissent et laissent place à de la turbulence (en gros : ça bout).



```
with(DEtools):
lorenz :=
diff(x(t),t) = 10*(y(t)-x(t)),
diff(y(t),t) = 28*x(t)-y(t)-x(t)*z(t),
diff(z(t),t) = x(t)*y(t)-8/3*z(t):
DEplot3d({lorenz}, [x(t),y(t),z(t)], t=0..100, stepsize=0.01, [[x(0)=10, y(0)=10, z(0)=10]],
orientation=[-35,75], linecolor = t, thickness = 1);
```



Toujours à l'aide de **Maple**, on peut aussi montrer que le système bien que réduit au minimum est lui aussi sensible aux conditions initiales. Examinons le comportement d'une des trois variables suite à une infime variation de la condition initiale du système. Considérons par exemple la variable x en prenant comme condition initiale $x_0=10, y_0=10, z_0=10$ puis en prenant comme condition initiale $x_0=10, y_0=10.01, z_0=10$ soit une légère variation de 0.01 sur la valeur de y_0 .

```
DEplot({lorenz}, [x(t), y(t), z(t)], t=0..15, stepsize = 0.01, [[x(0)=10, y(0)=10, z(0)=10],[x(0)=10, y(0)=10.01, z(0)=10]], scene = [t,x], linecolor = [blue,green], thickness = 1);
```

