La problématique des pertes de charge

Quelques recettes pour des valeurs plus exactes

En hydraulique, les constructeurs ne font pas beaucoup de bruit lorsque doit être abordée la problématique des pertes de charge. Ils simplifient et, pour ne prendre aucun risque, assortissent leurs calculs d'un solide «coefficient général de pertes de charge», suffisamment dimensionné pour surdimensionner tout le système. Le coût croît inutilement. Voici donc quelques recettes pour la détermination des valeurs dues aux pertes de charge dans les circuits.*

Soit un fluide *(fig. 1)* dont les couches se déplacent suivant une vitesse $\vec{v}$ de direction Ox et fonction de la hauteur z. On admet que la force F qui est exercée par une couche $abcd$ sur une couche immédiatement inférieure $a'b'c'd'$ est de la forme :

$$F = \mu S \frac{dv}{dz}. \tag{1}$$

où μ est la viscosité du fluide, S la surface d'une couche considérée, dv/dz le gradient de vitesse, c'est-à-dire l'accroissement de vitesse par unité de distance.
Par hypothèse, la force F est positive si elle est dirigée de O vers x.

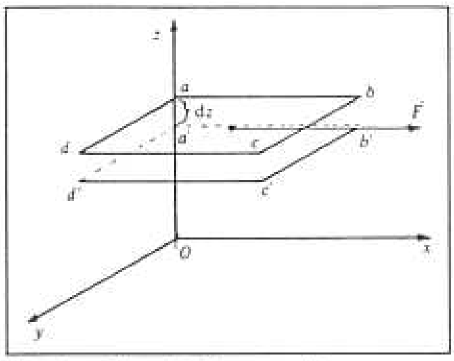

Fig. 1. — Plans fluides parallèles.

Ecoulement laminaire d'un fluide peu compressible dans un tube

Considérons une conduite cylindrique droite de diamètre d dans laquelle a lieu un écoulement laminaire. Par raison de symétrie, la vitesse v d'écoulement est la même pour toutes les particules situées à une même distance r du centre.

Considérons deux sections A_1 et A_2 *(fig. 2)* distantes de l, et soient p_1 la pression en A_1 et p_2 la pression en A_2, avec $p_2 < p_1$.
Isolons par la pensée un cylindre coaxial plein de rayon extérieur r et de section s. Il est soumis à deux forces extérieures :

1. *Force de pression*

$F_1 = s(p_1 - p_2) = \pi r^2 \cdot \Delta p$
avec $\Delta p = p_1 - p_2$;

F_1 est dirigée de la gauche vers la droite.

2. *Force de viscosité*

$$F_2 = \mu S \frac{dv}{dr},$$

avec $S = 2\pi r l$ = surface extérieure du cylindre, qui est la force exercée par l'extérieur du cylindre de rayon r sur ce cylindre ; d'après nos hypothèses sur l'équation (1), cette force est positive si elle est dirigée de la gauche vers la droite.
Ecrivons que le fluide situé à l'intérieur du cylindre est en équilibre sous l'influence de ces deux forces F_1 et F_2 (nous supposons que le régime est permanent, il n'y a pas de forces d'inerties) :

$$\pi r^2 \Delta p + \mu \cdot 2\pi r l \frac{dv}{dr} = 0.$$

ou :

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{r\,\Delta p}{2\,\mu l} \quad \text{et} \quad v = -\frac{r^2 \Delta p}{4\,\mu l} + \text{Cte}.$$

Nous admettrons qu'une mince couche de fluide adhère aux parois intérieures du tube et que par conséquent, la vitesse v pour $r = d/2 = R$ est nulle. Il vient :

$$v = \frac{\Delta p}{4\,\mu l}(R^2 - r^2). \tag{2}$$

La loi des vitesses est une loi parabolique. La vitesse maximale vaut :

$$v_{\max} = \frac{\Delta p R^2}{4\,\mu l}. \tag{3}$$

Le débit élémentaire dans une section de rayon r et d'épaisseur dr est donné par :

$$dq = v\,ds = v\,2\pi r\,dr; \tag{4}$$

or v est donné par (2), d'où :

$$dq = \frac{\Delta p}{4\,\mu l}(R^2 - r^2)\,2\pi r\,dr.$$

$$dq = \frac{\pi\,\Delta p}{2\,\mu l}(R^2 r - r^3)\,dr.$$

Le débit total est donné par :

$$q = \int_{r=0}^{r=R} dq =$$

$$= \frac{\pi\,\Delta p}{2\,\mu l}\left[\frac{R^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^R,$$

$$q = \frac{\pi R^4}{8}\frac{\Delta p}{\mu l} = \frac{\pi d^4}{128}\frac{\Delta p}{\mu l}. \tag{5}$$

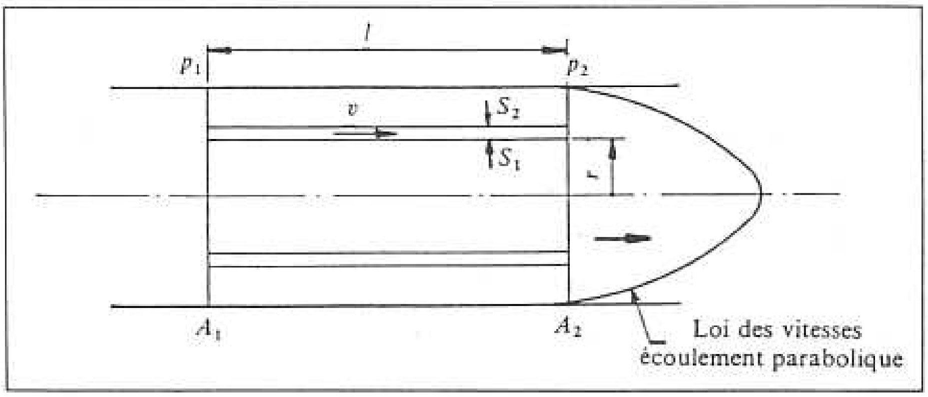

Fig. 2. — Ecoulement dans un tube.

* Ces «recettes» ont été tirées d'*Hydraulique et Electrohydraulique*, un livre de l'ingénieur français Jacques Faisandier paru aux Editions Dunod (n° ISBN 2-04-012074-2).

Cette formule est utilisée pour la détermination des viscosités.
La vitesse moyenne est donnée par:

$$v_{moy} = \frac{q}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8}\,\frac{\Delta p}{\mu l}. \qquad (6)$$

La comparaison des formules (3) et (6) donne:

$$v_{moy} = \frac{v_{max}}{2}.$$

Application:
$R = 1$ mm,
$\Delta p = 1$ bar $= 10^6$ baryes $= 10^5$ Pa,
$l = 1$ m,
$\mu = 0{,}2$ poise $= 0{,}02$ Pa.s.
Dans le système C.G.S., la formule (5) donne:

$$q(\text{cm}^3/\text{s}) = \frac{\pi R^4}{8}\,\frac{\Delta p}{\mu l} =$$
$$= \frac{\pi \times (0{,}1)^4}{8} \times \frac{0{,}2 \times 100}{10^6} \approx 2 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

Si nous utilisons le système S.I. nous avons:

$$q\ (\text{m}^3/\text{s}) = \frac{\pi \times (10^{-3})^4 \times 10^5}{8 \times 0{,}02 \times 1} \approx$$
$$\approx 2 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}.$$

Ecoulement laminaire en mince épaisseur

Cet écoulement est celui qui régit principalement les fuites internes dans les appareils hydrauliques par les jeux mécaniques des pièces en mouvement ou non.
Considérons la *figure 3*; le liquide s'écoule entre deux parois parallèles distantes de ε et immobiles l'une par rapport à l'autre, et soient S_1 et S_2 deux sections perpendiculaires à l'écoulement et de pressions respectives p_1 et p_2, avec $p_1 > p_2$.
Si l'on considère une tranche de liquide comprise entre $+y$ et $-y$, S_1 et S_2 et de largeur λ, la force exercée par les pressions p_1 et p_2 vaut:

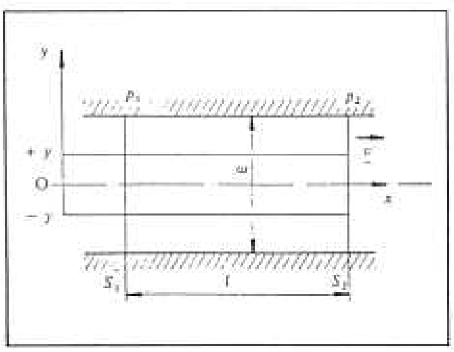

Fig. 3. — Le liquide s'écoule entre deux parois parallèles.

$$F_1 = 2y\lambda(p_1 - p_2) = 2\,y\lambda\,\Delta p,$$

et celle exercée par la viscosité:

$$F_2 = 2\,\lambda l \cdot \mu\,\frac{dv}{dy}.$$

Ecrivons que la somme de ces deux forces est nulle:

$$y\Delta p = -\,l\mu\,\frac{dv}{dy};\ \frac{dv}{dy} = -\,\frac{\Delta p}{l\mu}\,y,$$

d'où:

$$v = -\,\frac{\Delta p}{l\mu}\,\frac{y^2}{2} + \text{Cte}.$$

La vitesse étant nulle pour $y = \varepsilon/2$, il vient:

$$v = \frac{\Delta p}{2 l\mu}\left(\frac{\varepsilon^2}{4} - y^2\right).$$

Le débit élémentaire en volume d'une tranche d'épaisseur dy est:

$$dq = \lambda v\,dy = \frac{\lambda \Delta p}{2\,l\mu}\left(\frac{\varepsilon^2}{4} - y^2\right)dy.$$

Le débit de la tranche est:

$$q = 2\int_{y=0}^{y=\varepsilon/2} dq =$$

$$= 2\int_0^{\varepsilon/2} \frac{\lambda \Delta p}{2\,l\mu}\left(\frac{\varepsilon^2}{4} - y^2\right)dy,$$

$$q = \frac{\lambda \Delta p}{l\mu}\left[\frac{\varepsilon^2 y}{4} - \frac{y^3}{3}\right]_0^{\varepsilon/2},$$

$$q = \frac{\lambda \Delta p \varepsilon^3}{12\,l\mu}. \qquad (7)$$

a) Section annulaire
Dans le cas où la paroi se présente sous la forme d'une section circulaire de diamètre moyen d et de jeu diamétral j entre les deux sections *(fig. 4)*, la formule précédente s'écrit avec $\varepsilon = j/2$ et $\lambda = \pi d$:

$$q = \frac{\pi d}{96}\,\frac{\Delta p}{l}\,\frac{j^3}{\mu}. \qquad (8)$$

Application
$d = 2$ cm
$\mu = 0{,}005$ Pa. s (huile fluide)
$j = 20$ μm
$l = 1$ cm
$\Delta p = 250$ bars,
on trouve $q = 2{,}62$ cm³/s $=$
$= 2{,}62 \times 10^{-6}$ m³/s.

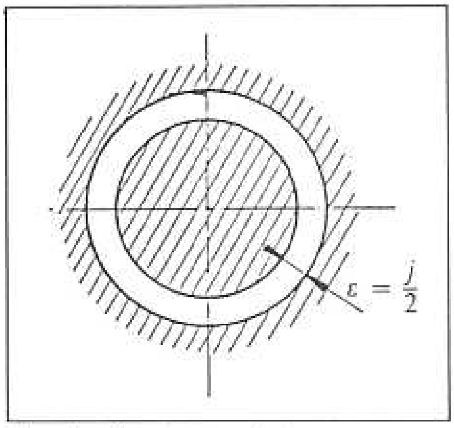

Fig. 4. — Section annulaire.

Les fuites varient, toutes choses égales par ailleurs, avec le cube du jeu, et un jeu de 2/100 mm est un chiffre qui est souvent très au-dessus des valeurs effectives adoptées.
On se rend compte dès maintenant de la précision d'usinage qui caractérise tout le matériel hydraulique fonctionnant sous de fortes pressions.

b) Section annulaire excentrée
La formule précédente (8) a été établie en supposant le piston centré dans son cylindre. Cela n'est généralement pas le cas.
Considérons un piston de longueur l et de rayon r situé dans un alésage de rayon $R = d/2$ et excentré d'une valeur a *(fig. 5)*.
Le jeu en un point A est donné par

$$AB = OB - OA =$$
$$= R - (r \cos \alpha + a \cos \beta);$$

a/R étant toujours très petit, l'angle α est lui-même très petit, $\cos \alpha$ est assimilable à l'unité; il vient, en posant $R - r = b$:

$$AB = R - (r + a \cos \beta) =$$
$$= b - a \cos \beta.$$

▷

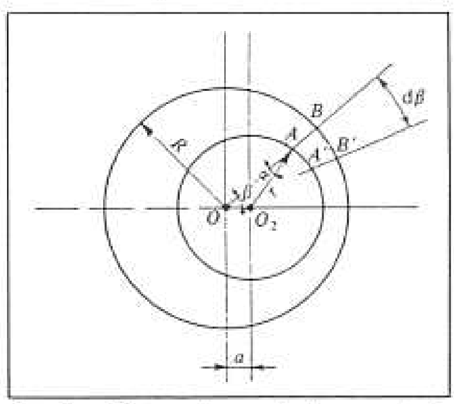

Fig. 5. — Piston dans cylindre excentré.

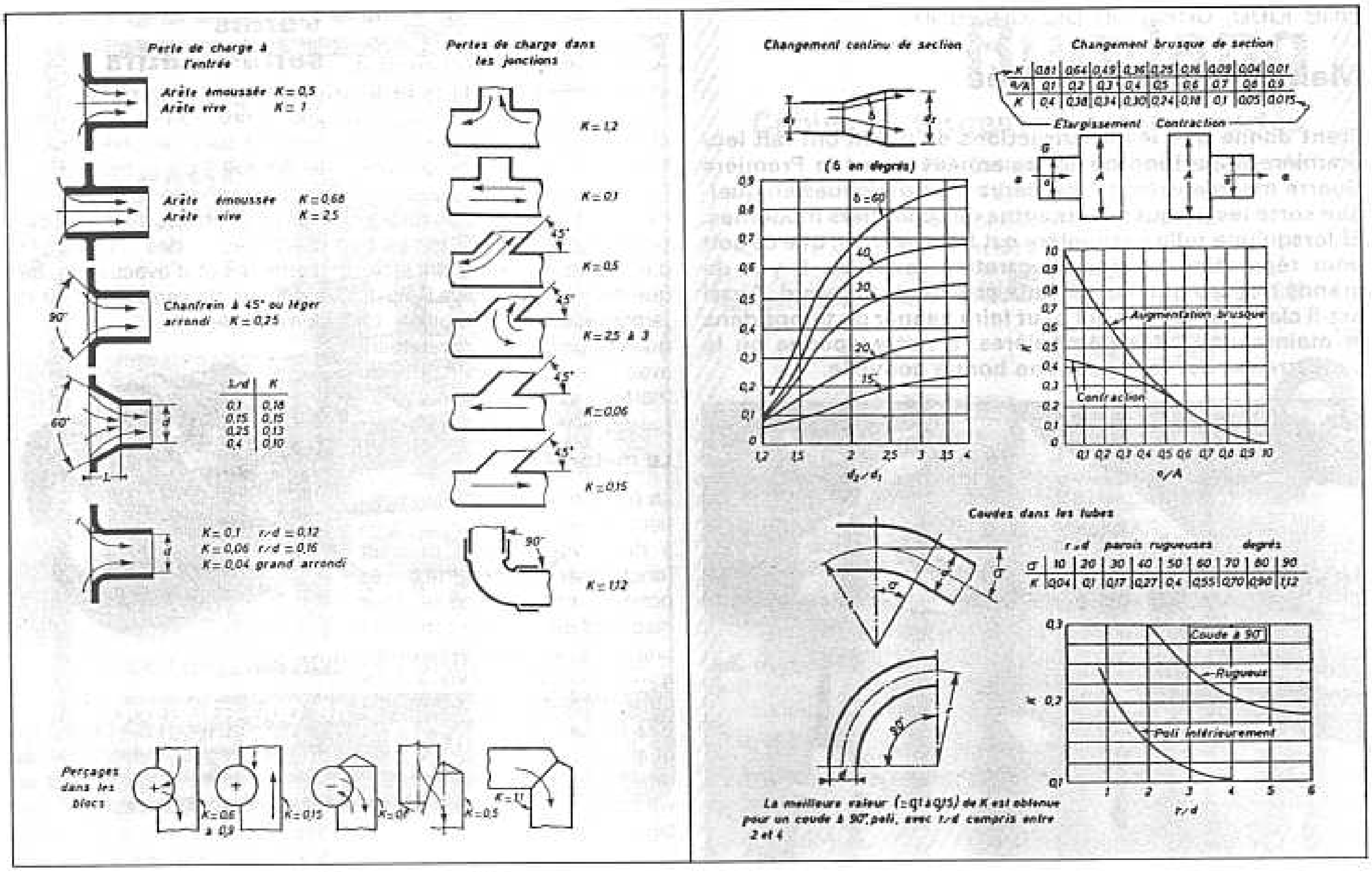

Fig. 6 et 7. – Valeurs du coefficient pour différents cas types.

Appliquons l'équation (7) à l'élément $AA'BB'$.

La largeur λ est égale à $BB' = R\,d\beta$, et cette équation s'écrit :

$$dq = \frac{\Delta p}{12\,l\mu} \cdot (AB)^3 \cdot R\,d\beta,$$

avec $(AB)^3 = (b - a\cos\beta)^3 = b^3(1 - e\cos\beta)^3$, en posant $e = a/b$ (excentricité relative).

Le débit total de fuite est donné par :

$$q = \int_{\beta=0}^{\beta=2\pi} dq =$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\Delta p}{12\,l\mu} b^3 R(1 - e\cos\beta)^3\,d\beta\,;$$

l'intégration donne :

$$\int_0^{2\pi} (1 - e\cos\beta)^3\,d\beta =$$

$$= \int_0^{2\pi} (1 - 3e\cos\beta + 3e^2\cos^2\beta -$$

$$- e^3\cos^3\beta)\,d\beta = 2\pi\left(1 + \frac{3\,e^2}{2}\right)$$

d'où :

$$q = 2\pi\,\frac{\Delta p}{12 l\mu} b^3\,R\left(1 + \frac{3e^2}{2}\right)\,;$$

or $b = j/2$ et $d = 2\,R$, soit :

$$q = \frac{\pi d}{96}\,\frac{\Delta p}{l}\,\frac{j^3}{\mu}\left(1 + 3\,\frac{e^2}{2}\right)$$

e est au maximum égal à 1, et, dans ce cas, le débit de fuite est multiplié par 2,5 par rapport à ce qu'il aurait été si l'excentricité était nulle. Ce chiffre montre qu'un orifice calibré constitué par un jeu annulaire est très sensible aux variations d'excentricité.

Pertes de charges localisées

Dans les coudes, les sections variables, etc., les lois de pertes de charge locales sont strictement expérimentales. Dans la plupart des cas, elles obéissent à l'expression suivante :

$$\Delta p = K\varrho\,\frac{v^2}{2},$$

où :

ϱ = masse spécifique du fluide (800 kg/m³ environ pour les fluides hydrauliques courants),

v = vitesse moyenne du fluide,

K = coefficient fonction de la forme de la zone de passage.

La formule est homogène, le système d'unités n'a pas besoin d'être précisé.

Avec $\varrho = 800$ kg/m³, elle s'écrit :

$$\Delta p\ (\text{bars}) = \frac{1}{1000} K v^2\ (v \text{ en m/s}).$$

Les valeurs du coefficient pour différents cas types sont données dans les *figures 6* et *7*. I+T (12458)