La relativité (restreinte)

Définition : Référentiel galiléen

Un référentiel galiléen (ou inertiel) est un référentiel ou le principe d'inertie est respecté. Tout corps ponctuel conserve sa vitesse en module et direction s'il n'est soumis à aucune force extérieure.

Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui même galiléen.

Les postulats de relativité d'Einstein :

Les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens.

Tous les référentiels galiléens sont donc équivalents.

La vitesse de la lumière dans le vide est « c » dans tous les référentiels et quelque soit sa direction.

Remarques :

La loi d'addition des vitesses entre référentiels galiléens ne s'applique pas en particulier pour la lumière. (expérience de Michelson Morley)

L'invariance de la vitesse de la lumière dans le vide va remettre en cause la vision du temps absolu et l'invariance des longueurs et des masses dans les référentiels galiléens en particulier….. Ces réflexions et déductions sont à l'origine de la célèbre formule $E = m c^2$

RELATIVITE DU TEMPS

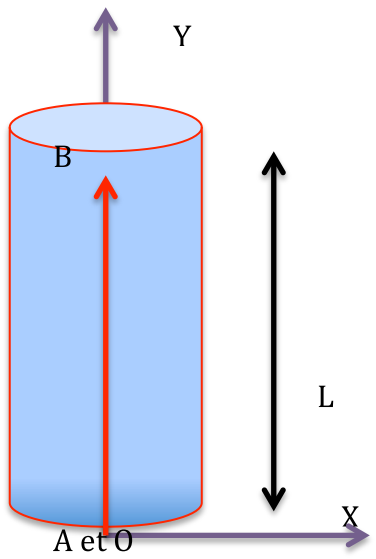
Hypothèse de travail fondamentale : la vitesse de la lumière est « C »dans tous les référentiels.

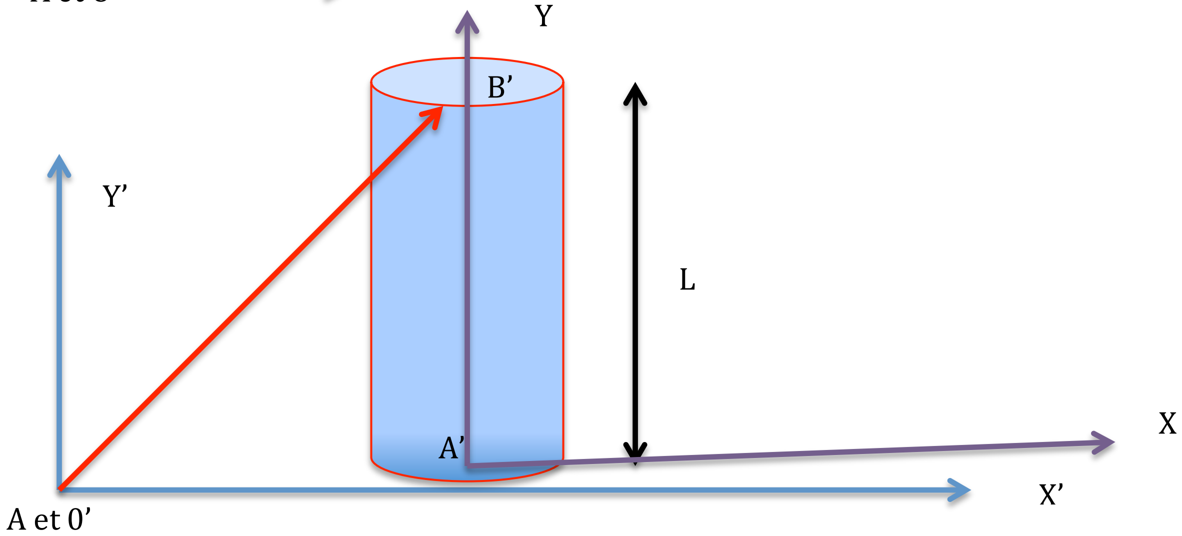
Imaginons une expérience dans un laboratoire allongé comme celui représenté par le cylindre bleu. On mesure le temps que met la lumière dont la vitesse est « C » pour aller de A en B.

Soit T le temps que met la lumière pour aller de A vers B mesuré par le physicien du laboratoire.

Ce dernier écrit fort justement dans son référentiel (OX ; OY) du laboratoire :

La distance AB = L on a L = C T





Supposons que le laboratoire de test se déplace à la vitesse « V. »
Pour un observateur extérieur au laboratoire du référentiel (OX ' ;OY') il analyse l'expérience de la façon suivante sur son horloge qui lui donne les temps T'

A l'instant T '= 0 correspond à l'émission de flash lumineux en A . (Les points A et A' sont confondus à cet instant)
Quand la lumière arrive en B', le laboratoire se trouve en A' dans le référentiel (OX' ;OY')
La distance AB'^2 est donnée par $AA'^2 + L^2$ (l'observateur applique les relations du triangle rectangle AB'A' ,le carré de l'hypoténuse = la somme des carrés des cotés du triangle)
La lumière met le temps T' pour aller de A en B' à la vitesse « C » Le temps T' que met la lumière pour faire le trajet AB' est donc T' = AB' / C

Comme le laboratoire se déplace à la vitesse « V » selon l'axe OX' alors AA' = V T'
En appliquant $AB'^2 = AA'^2 + A'B'^2$ et remplaçant les longueurs par leur expression en fonction du temps mis pour les parcourir à la vitesse « C » ou « V » pour AA'
$C^2 T'^2 = V^2 T'^2 + C^2 T^2$ ou regroupant les termes T' ; $T'^2 (C^2 - V^2) = C^2 T^2$ qui s'écrit aussi $T'^2 = C^2 T^2 / (C^2 - V^2)$
En prenant la racine carré des 2 membres de l'équation :
$T' = T \frac{C}{\sqrt{C^2 - V^2}}$ est en divisant numérateur et dénominateur par « C »

$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}}$$

Donc T' > T !!!!! Relativité du temps fait qu'il s 'écoule moins vite dans le labo en mouvement par rapport au repère fixe

Effet de la constance de la vitesse de la lumière sur les longueurs

Imaginons que la distance terre lune est fixe. C'est un référentiel immobile pour notre exemple.
Imaginons un vaisseau spatial allant de la terre à la lune Cette distance est L pour l'astronaute. Au décollage il note l'heure et à l'arrivée sur la lune il note l'heure également sur la montre de bord. La durée de son vol est pour lui T°. Le commandant du vaisseau en mouvement déduit que la distance Terre Lune est L = V T°

Pour les contrôleurs du vol sur la terre immobile, l'heure de décollage est notée et sur la Lune une deuxième horloge synchronisée sur celle du centre de contrôle permet de dater l'heure d'arrivée du vaisseau sur la lune. La différence des dates T permet d'évaluer la durée du vol pour les terriens

La distance Terre lune est vue comme une longueur au repos par les contrôleurs du vol est vaut donc L° = V T

Donc V = L°/T = L /T° ou L = L° T°/ T

Le rapport T°/T $= \sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}$

Alors L = L° $\sqrt{1 - \frac{V^2}{C^2}}$

La longueur en mouvement paraît plus courte que la longueur au repos. C'est la contraction des longueurs.

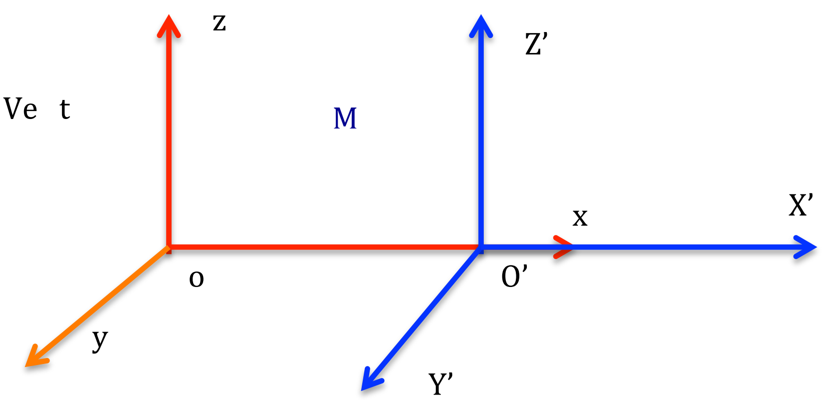
Formule de passage d'un référentiel à un autre en translation uniforme par rapport au premier.

Dans le cas de la mécanique classique on écrit ces formules facilement notamment dans le cas ou les axes des 2 repères sont parallèles et le mouvement uniforme se fait selon OX à la vitesse Ve (vitesse d'entrainement)
Un point M de coordonnées dans OXYZ a pour coordonnées O'X'Y'Z' dans le repère en mouvement

t = t'

x = x' – Ve t
y = y'

z =z'



SI M effectue un déplacement durant le temps dt alors

$dt = dt'$
$dx = dx' - Ve\ dt$
$dy = dy'$
$dz = dz'$

Pour l'axe des x en divisant par dt on obtient la loi de composition des vitesses

$dx/dt = dx'/dt - Ve$ ou $v = v' - Ve$

On retrouve ici la loi de composition des vitesses dans les repères galiléens de la mécanique classique.

Remarque : Cette transformation n'est pas vérifiée expérimentalement pour la lumière.

La loi de composition des vitesses ne s'applique pas puisque la vitesse de la lumière est « C » dans tous les référentiels.

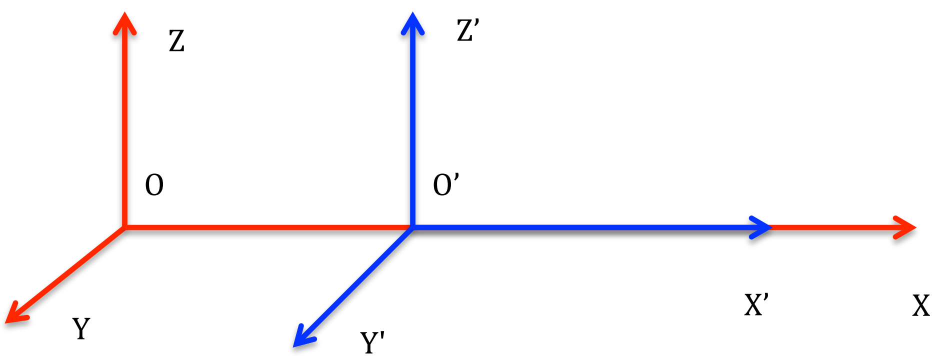
Dans les formules de passage d'un référentiel à un autre dans la transformation galiléenne on a supposé que le temps s'écoule de la même manière dans les 2 référentiels (équation dt = dt').

On se propose de trouver maintenant une transformation ou les formules de passage d'un référentiel à un autre en mouvement de translation rectiligne uniforme respectent la constance de la vitesse de la lumière.

Supposons donc 2 référentiels en translation rectiligne uniforme selon OX l'un par rapport à l'autre. A l'instant t = 0 dans le référentiel 0, correspond au temps t' = 0 dans le référentiel 0'. De plus à cet instant O et O' sont confondus.

Quelques instants plus tard, O et O' ne sont plus confondus et le temps vaut $t \neq 0$ dans le repère O et $t' \neq 0$ dans O'.

Remarque : Ici on ne fait pas l'hypothèse à priori que t = t'. A ce stade on n'impose pas de relation entre t et t' au temps des 2 référentiels. (Le temps n'est pas nécessairement absolu)



Dans le Pour le repère O les coordonnées sont O(X,Y,Z,t) et dans le repère O'(X',Y',Z';t')

A l'instant t = 0 dans O et t'= 0 dans 0' les points O et O' sont confondus et un éclair lumineux est émis depuis les origines des 2 référentiels.

1) Equations dans le sens des X ou X' positifs

Dans le repère O et selon OX la position de l'éclair à l'instant t est x = c t ou x – c t = 0
Dans le repère O' et selon OX', la position de l'éclair à l'instant t' est x' = ct' ou x'–c t' = 0

Pour un point M sur OX autre l'origine on aura x – c t = s
Et pour le même point M repéré sur 0'X' on aura x'-c t' = q

En faisant divisant membre à membre ces 2 équations $\frac{x'-c\,t\prime}{x-c\,t} = \frac{s}{q}$ = a

Se qui s'écrit aussi $x' - ct' = a(\,x - c\,t)$ (A)

2) Equations dans le sens des X et X' négatifs

On établirai une équation d'un type identique tel que x' + ct' = b (x + c t) (B)

En ajoutant membre à membre les équations A et B

2 x' = a(x – c t) + b (x + c t)
2 x' = (a+ b) x + (b – a) c t

$$\boldsymbol{x' = \frac{(a+b)}{2}\,x + \frac{(b-a)}{2}\,c\,t}$$

En soustrayant à membre à membre les équations A et B
2 c t' = b (x + c t) + a (c t – x)
2 c t' = x (b – a) + c t (a+ b)

$$\boldsymbol{c\,t' = \frac{(b-a)}{2}\,x + \frac{(a+b)}{2}\,c\,t}$$

faisant un changement de variable
(a+b)/2 = λ et (b – a) /2 = µ

on a donc les 2 équations suivantes

$$\boldsymbol{x' = \lambda\,x + \mu\,c\,t}$$

et

$$\boldsymbol{c\,t' = \mu\,x + \lambda\,c\,t}$$

Faisons x' = 0, qui est l'abscisse de 0' dans le repère O' alors 0 = $\lambda\,x + \mu\,c\,t$ on déduit alors que $\frac{x}{t} = -\mu\,c/\lambda$

En fait x est alors la position de 0' dans le repère O au bout du temps t. Comme le mouvement est uniforme x/t est la vitesse de O' mesurée dans le référentiel O

Donc v = -µ c /λ d'ou **µ = - v λ/ c**

Les équations de transformation de repère deviennent en éliminant µ des équations

Donc
$$\boldsymbol{x' = \lambda\, x - \frac{v\lambda}{c}\, ct}$$
$$\boldsymbol{c\, t' = -\frac{v\lambda}{c}\, x + \lambda\, c\, t}$$

$$x' = \lambda\,(\,x - vt\,)$$

et
$$c\, t' = \lambda\,(-\frac{v}{c}\, x + c\, t\,)$$

La dernière équation peut s'écrire aussi en simplifiant par c donc $t' = \lambda\,(\,t - \frac{v}{c^2}\,)$

On a donc les équations de passage de 0 vers O'

$$\boldsymbol{x' = \lambda\,(\,x - vt\,)}$$
$$\boldsymbol{t' = \lambda\,(\,t - \frac{v}{c^2}\,x)}$$

Il reste à déterminer la constante λ

a) Pour cela dans un premier temps et à un instant t fixé je considère une règle de 1m mesurée dans O' quelle longueur a cette règle dans O ???

Soit Δx' = 1

Alors Δx' = λ(Δx – v Δ t)

Comme t est fixé on a Δ t = 0 et Δx' = λ Δx dans ces conditions puisque Δx' = 1

$$\boldsymbol{\Delta x = 1 / \lambda}$$

b) Maintenant dans un second temps et pour t' fixé , je considère une règle de 1m mesurée dans O, alors je me pose cette question : quelle longueur a cette règle dans le repère O'

Cette fois Δx' = λ (Δx – v Δ t) et ici Δx = 1

Donc Δx' = λ (1– v Δ t)

$$\Delta\, t' = \lambda\,(\Delta\, t - \frac{v}{c^2})$$

Comme t' est fixé Δt' = 0 donc $0 = \lambda\,(\Delta\, t - \frac{v}{c^2})$

$$\Delta t = \frac{v}{c^2}$$

en reprenant l'équation Δx' = λ (1– v Δ t) et en remplaçant par $\Delta t = \frac{v}{c^2}$

On a la relation $\boldsymbol{\Delta x' = \lambda\,(\,1 - \frac{v}{c^2}v\,)}$

Nous avons démontré premièrement que pour une régle Δx de 1m mesurée dans O' à t fixé, cette règle mesure Δx = 1 / λ dans O.

Puis dans un second temps on a montré que pour t' fixé, une règle $\Delta x'$ de 1m mesurée dans O, mesure $\Delta x' = \lambda\,(1 - \frac{v}{c^2}\,\mathrm{v})$ dans O'

D'après le principe de relativité, les points de vues sont symétriques et donc Δx = $\Delta x'$

Ce qui permet d'écrire $1 / \lambda = \lambda\,(1 - \frac{v}{c^2}\,\mathrm{v})$

On calcule ainsi la constante $\lambda^2 = \frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$

Enfin on tire $\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

D'ou les fameuses équations dites de Lorentz retrouvées par Einstein en donnant à λ à valeur trouvée :

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,(x - vt)$$

et

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,(t - \frac{v}{c^2}x)$$

Remarques :

Le temps n'a plus un caractère absolu entre 2 référentiels. Les durées relatives dépendent de la vitesse entre ces 2 référentiels.

Les distances entre 2 points sont également affectées par les vitesses relatives entre les référentiels de mesure.

Si la vitesse v d'entrainement est faible devant c (ou si c est infinie) on retrouve la transformation de Galilée x' = x – vt et t = t'.

Composition des vitesses dans la transformation de Lorentz

La transformation de Lorentz pour les 4 axes x,y z t est pour une vitesse d'entrainement V selon OX

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

et

$$t' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$

on appellera le terme $\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

donc en différentiant par rapport au temps dt du repère fixe (ne pas confondre v vitesse d'entrainement du repère O' selon x et Vx vitesse dans le repère 0')

dx'/dt = λ(dx/dt – v) **ici dx /dt = V_x et donc dx'/dt = λ(Vx – v)**

dy'/dt = dy/dt = V_y

dz' /dt = dz/dt = Vz

dt/dt' = $\lambda(1 - \frac{v}{c^2} Vx)$

donc dt = $\lambda(1 - \frac{v}{c^2} Vx)$ dt'

en continuant le calcul pour la composante $V_{y'}$

V_y = dy'/dt = $\frac{dY'}{\lambda(1 - \frac{v}{c^2} Vx)dt'}$

$$Vy\,\lambda = \frac{Vy'}{1-\frac{v}{c^2}Vx}$$

$$\mathbf{Vy = Vy'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,/\,\left(1-\frac{v}{c^2}Vx\right)}$$

Ce qui faut remarquer est que les composantes des vitesses perpendiculaires au déplacement d'entrainement « v » sont affectées par les effets relativistes. Cet effet est une des conséquences que le temps n'est pas une donnée absolue …

Réflexion sur une expérience de choc !

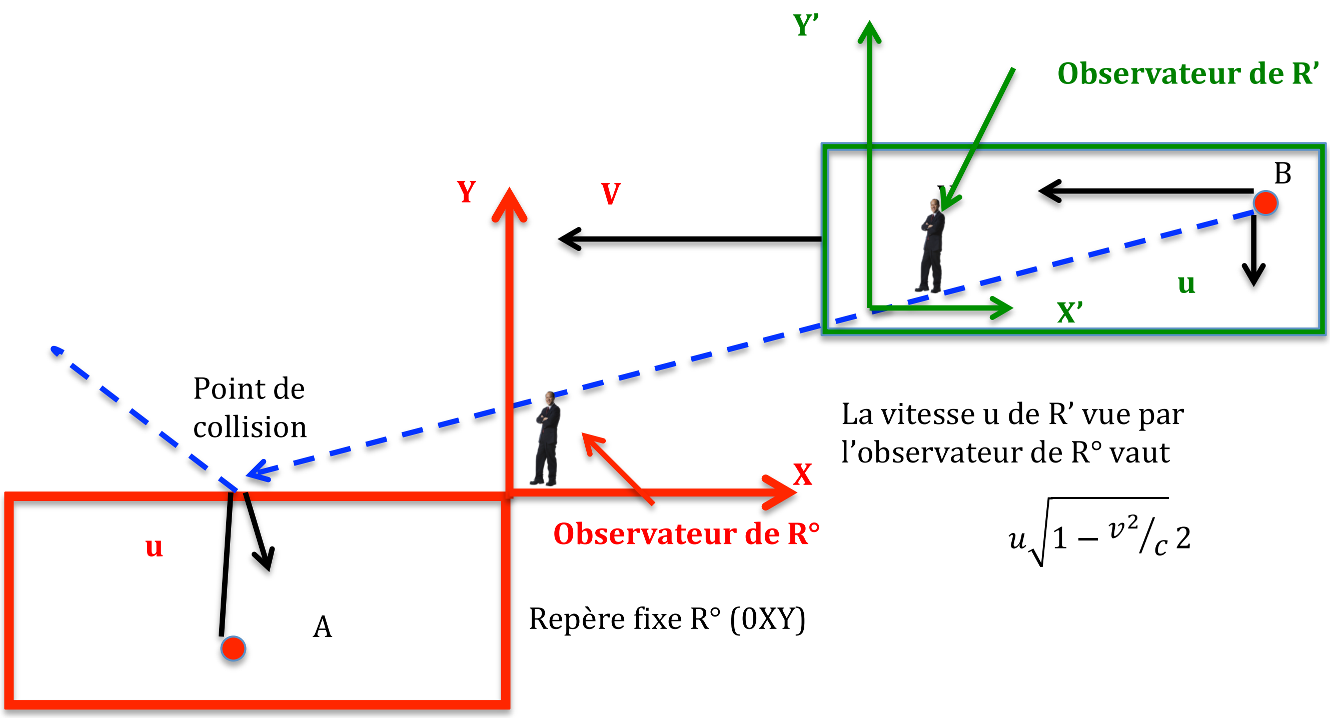
Imaginons que vous vous trouvez dans le repère **R° immobile** dans lequel vous lancez la boule A à la vitesse verticale u .

Maintenant vous vous installez dans le repère R'(O'X'Y') et lancez la boule B dans un avec la vitesse -u (vers le bas) .
Les expériences dont identiques dans les 2 repères pour chaque observateur. (Seules vitesses de lacement sont orientées différemment)

Le repère R' est immobile pour l'observateur de R', mais se déplace à la vitesse –V pour l'observateur de R°.

Comme le repère R' a une vitesse d'entrainement –V selon X, alors dans R, la vitesse horizontale de la boule B est donc -V

Le point de collision est décrit ci-dessous



La composante verticale de la vitesse de A est u avant le choc et –u après le choc dans R°

Vu dans R°, la composante d vitesse u mesurée dans R' devient $u\sqrt{1 - v^2/c\,2}$

Cette modification de la composante u se déduit des formules de transformation des vitesses. (ici c'est la composante Vx qui est perpendiculaire à v vitesse d'entrainement)

La conservation de la quantité de mouvement dans le repère R° comme
la quantité de mouvement avant le choc = la quantité de mouvement après de choc

Comme on ne veut faire aucune hypothèse a priori sur la constante des masse on nommera M° la masse au repos dans R° et M(v) la masse dans le repère R' dont la vitesse d'entrainement est v par rapport à R°

$M° u - M(v)\, u \sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}} = - M° u + M(v)\, u \sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$

$M° = M(v) \sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$

$$M(\boldsymbol{v}) = \frac{\boldsymbol{M°}}{\sqrt{\boldsymbol{1}-\frac{\boldsymbol{V^2}}{\boldsymbol{C^2}}}}$$

La conservation de la quantité de mouvement dans les repères relativistes impose une modification de la masse en mouvement .

La variation de l'impulsion $\frac{\overrightarrow{dP}}{dt} = \vec{F}$ doit d'écrire $m\, \frac{\overrightarrow{\overrightarrow{dv}}}{dt} + \overrightarrow{v\ dm}$ puisque m dépend maintenant de la vitesse v

La forme $\overrightarrow{F} = m\, \frac{\overrightarrow{\overrightarrow{dv}}}{dt}$ n'est plus valable dans la conception relativiste de la physique.

Le travail et l'Energie

Par définition le travail $W = \int F\, dx = \int \frac{dP}{dt}\, dx = \int \frac{dP}{dx}\, v\, dx = \int v\, dP$

L'intégration doit se faire de l'état initial ou v =0 à l'état final ou la vitesse atteint la valeur v

Comme d(P v) = v dP + P dv et donc v dP = d (P v) – P dv ce qui conduit à intégrer le terme $\int v\, dP = \int d\,(P\, v) - \int P\, dv$

L'intégration du 1° terme $\int d\,(P\, v)$ entre la valeur initiale v=0 à la valeur finale v donne la valeur m v^2 et m est une fonction de v (voir paragraphe précédent).

Donc à ce stade W = m v^2 - $\int P\, dv = m\, v^2 - \int \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{\boldsymbol{1}-\frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{c^2}}}}\, \boldsymbol{m°\, dv}$ **(A)**

Pour intégrer le 2° terme il faut remarquer que d ($\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$) / dv est en posant

k = v^2 / c^2 , est après changement de variable d($\sqrt{1-k}$) /dk * dk/dv

ce qui donne - v/c^2 / ($\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$)

et donc d $\left(\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\right) / dv = -v/c^2 / \left(\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\right)$

$dv = (-c^2 / v) \left(\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\right) d\left(\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\right)$

La 2° intégrale s'écrit donc $\int \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{\boldsymbol{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \boldsymbol{m° \, dv} = -\int v\,(c^2 / v)\, m° \; d\left(\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\right)$

On a finalement = $-\int (c^2) \, m° \; d\left(\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\right) = -m° c^2 \left(\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\right)$

Cette expression doit être prise entre v = 0 et v = v ce qui donne

$$\int \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{\boldsymbol{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \boldsymbol{m° \, dv} = -m° c^2 \left(\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\right) + m°c^2$$

l'énergie W d'après la relation notée **(A)**

$$W = m\,v^2 - \int \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{\boldsymbol{1-\frac{v^2}{c^2}}}} \boldsymbol{m° \, dv} = m\,v^2 + m° c^2 \left(\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}\right) - m°c^2$$

Dans le 2° terme de cette somme remplaçons m° par sa valeur grâce à la relation

$$m° = m(v) \sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}$$

Donc $W = m\,v^2 + m\,c^2 (1 - v^2/c^2) - m°\,c^2 = m\,v^2 + m\,c^2 - mv^2 - m°\,c^2$

Et donc $\boldsymbol{W = m\,c^2 - m°\,c^2}$

Comme cette énergie est $W = \int F\,dx$ cette expression représente l'énergie cinétique de la masse m° au repos et se déplaçant à la vitesse v.

Le terme $m°\,c^2$ est l'énergie au repos de la masse m° . Einstein écrit

$$\boldsymbol{E = m°\,c^2}$$

C'est la formule la plus célèbre de la physique

Il y a équivalence entre masse et énergie