son orbite augmente et sa période augmente. La lune s'éloigne de la terre, le mois lunaire s'allonge et le jour s'allonge. Réciproquement, il y a très longtemps, la lune était plus proche, les marées plus fortes et les mois et les jours plus courts.

9.4 Le gyroscope, la toupie et le vélo.

9.4.1 Le gyroscope.

Le gyroscope est, en principe, un disque ou un cylindre qui tourne sur un axe, comme celui dessiné sur la figure. Imaginons que l'axe est fixe et que le disque peut tourner sur l'axe sans friction, grâce à des roulements à billes.

Imaginez que le gyroscope tourne dans le sens indiqué dans la figure et que vous le tenez par l'axe avec la main gauche au fond et la main droite sur la partie proche de l'axe. Si maintenant vous essayez de tourner le gyroscope vers la droite, en descendant votre main droite et en montant la gauche, vous sentirez une sensation très surprenante car le gyroscope va pousser votre main droite vers vous est votre main gauche vers l'avant.

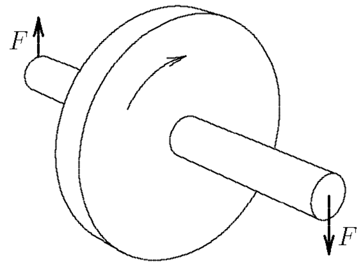


Figure 9.3 Quand vous poussez le côté droit vers le bas, au lieu de descendre il pousse vers vous .

Vous exercez un couple qui aurait fait tourner n'importe quel autre objet autour d'un axe horizontal. Le gyroscope réagit en tournant sur un axe vertical.

De plus, si vous le lâchez à droite en lui laissant la liberté de tourner sur l'axe de gauche, le gyroscope, au lieu de tomber à droite comme le ferait un objet "normal", va se mettre à tourner autour du support de l'axe gauche, en gardant l'axe toujours horizontal. Cette rotation de la direction de rotation du gyroscope s'appelle **précession**.

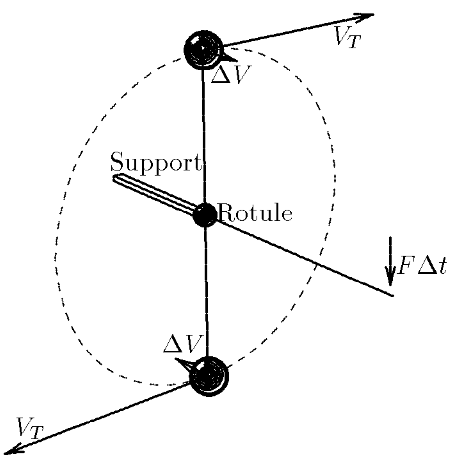


Figure 9.4 Quand on donne un petit coup sur l'extrémité de la barre horizontale on communique aux masses une vitesse horizontale perpendiculaire à leur vitesse tangentielle.

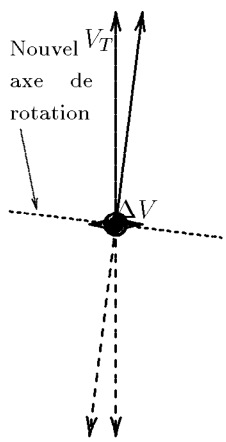


Figure 9.5 Vue d'en haut du dessin de gauche. Les vitesses de la masse d'en haut sont en continu et celles de la masse d'en bas sont en pointillés.

Pour comprendre la raison de base de ce comportement vraiment étrange, nous allons imaginer un dispositif simplifié. Au lieu d'avoir un disque ou un cylindre nous allons nous restreindre à deux masses ponctuelles. Ces deux masses sont reliées par une barre rigide de masse négligeable. Du centre de cette barre part une autre perpendiculaire. L'ensemble est tenu à la liaison des deux barres par une rotule([4]) fixée à un support rigide.

([4]) En mécanique, une rotule est un axe solidaire d'une sphère, laquelle se trouve à l'intérieur d'un morceau de sphère creuse. Le morceau de sphère creuse fait un peu plus qu'une demi sphère ce qui fait que la bille est fixe tout en pouvant tourner totalement ou partiellement autour de n'importe quel axe.

Au départ les masses tournent autour d'un axe horizontal qui coïncide avec la barre horizontale (voir figure 9.4). Juste au moment où une des masses passe en haut, on donne un petit coup (une impulsion) sur la barre horizontale. Comme la barre est rigide, ce coup se transmet aux masses et leur communique une petite vitesse ΔV horizontale. Cette vitesse est dirigée vers la droite pour la masse d'en haut et vers la gauche pour la masse d'en bas. Maintenant la nouvelle vitesse des masses sera l'addition de la vitesse précédente avec celle, perpendiculaire, que nous venons de lui communiquer.

Dans la figure 9.5 nous avons dessiné les vitesses des masses vues d'en haut. Celle de la masse d'en haut sont en trait continu et celles de la masse d'en bas sont en pointillés. Le résultat de l'addition de vitesses est que la vitesse de la masse d'en haut est maintenant dirigée un peu vers la droite, et que la vitesse de la masse d'en bas est dirigée un peu vers la gauche.

Maintenant les masses vont tourner sur un plan qui contient les nouvelles vitesses. Ce plan est un peut tourné vers la droite par rapport au plan de rotation précédent. Le nouvel axe de rotation aura tourné aussi horizontalement vers la droite. Nous retrouvons ainsi le comportement surprenant du gyroscope: nous lui avion donné un coup pour que l'axe de rotation s'incline vers le bas et ce que nous obtenons est une rotation verticale vers l'arrière.

Dans le cas d'un gyroscope, au lieu d'avoir deux masses, nous en avons une infinitude. L'addition des vitesses est un peu plus compliquée car cette fois les vitesses des différentes masses ont des composantes verticales. Néanmoins, pour toutes les masses de la moitié supérieure, la composante horizontale de la vitesse tangentielle est dirigée vers le fond (comme dans la figure 9.5) et pour ces même masses la vitesse ajoutée est dirigée vers la droite. Donc, toutes le particules de la moitié supérieure ont leur vitesse déviée vers la droite. Par le même raisonnement on déduit que toutes les particules de la moitié inférieure ont leur vitesse déviée vers la gauche (à nouveau comme dans la figure 9.5). Le résultat est que le gyroscope se comporte de la même manière que notre objet avec seulement deux masses.

Vous pouvez peut-être vous dire: "je suis fort et je peux forcer le gyroscope de sorte que l'axe de droite tourne vers le bas". Vous avez raison. Vous n'avez même pas besoin d'être très fort. Mais pendant que vous forcez l'axe de droite vers le bas, vous constaterez que la force que vous êtes obligé d'exercer n'est pas dirigée vers le bas, mais vers l'avant!

On peut calculer la **vitesse de précession** du gyroscope. Imaginons que son moment cinétique soit $\vec{L}$, et qu'on lui applique un couple $\vec{\tau}$ perpendiculaire au moment cinétique. L'équation 9.3 nous dit que:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

La variation de $\vec{L}$ durant un intervalle de temps Δt sera:

$$\Delta\vec{L} = \vec{\tau}\Delta t$$

Remarquez que $\Delta\vec{L}$ a la même direction que $\vec{\tau}$ et qu'il est perpendiculaire à $\vec{L}$. Comme l'intervalle de temps est petit ΔL est petit devant L et l'angle que fait le nouveau moment cinétique $\vec{L} + \Delta\vec{L}$ avec l'ancien $\vec{L}$ est:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\tau\Delta t}{L}$$

La vitesse de précession que nous cherchons est la vitesse angulaire du vecteur $\vec{L}$, qui est la même que celle de l'axe de rotation du gyroscope. Cette vitesse angulaire est:

$$\textbf{Vitesse de précession} = \Omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\tau}{L}$$

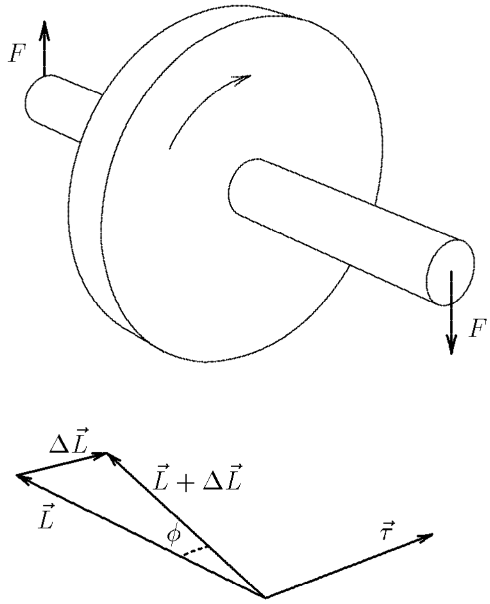


Figure 9.6 Tous les vecteurs du dessin en bas se trouvent sur un plan horizontal. Les vecteurs $\vec{\tau}$ et $\Delta\vec{L}$ sont parallèles entre eux et perpendiculaires à $\vec{L}$.

La vitesse de précession est d'autant plus faible que le moment cinétique du gyroscope est grand.

L'intérêt d'utiliser un gyroscope pour maintenir une référence de position est la suivante: un objet quelconque, soumis à un couple, présente une *accélération* angulaire constante ce qui donne un angle de déplacement proportionnel au carré de l'intervalle de temps. Par contre, sur un gyroscope, un couple produit une *vitesse* angulaire constante ce qui donne un angle de déplacement proportionnel au temps. De plus, pour une même masse de l'objet, on peut atténuer la conséquence d'un couple en augmentant le moment cinétique de l'objet. Ceci s'obtient avec une bonne distribution de la masse et une vitesse de rotation élevée([5]).

On a utilisé des gyroscopes pour stabiliser mécaniquement des navires, aussi bien de surface que des sous-marins. Le *Nautilus*, premier sous-marin atomique, comportait un énorme gyroscope de plusieurs tonnes.

On a utilisé des gyroscopes pour créer des "plateformes inertielles", c'est-à-dire, des plateformes qui gardent leur orientation dans l'espace même quand elles sont tenues dans un support mouvant, comme un navire ou un avion. On les utilise encore pour stabiliser des caméras installées sur des hélicoptères.

Dans les avions conçus récemment, on n'utilise plus de gyroscopes mécaniques, mais des gyroscopes optiques qui fonctionnent sur des principes totalement différents.

9.4.2 La toupie.

Dans la figure de droite nous avons représenté une toupie qui tourne à gauche et qui est inclinée vers la gauche. Le poids de la toupie exerce une force $m\vec{g}$ sur le centre de masses. Cette force crée un couple $\vec{\tau} = \vec{r} \times m\vec{g}$ dirigé horizontalement et perpendiculaire au moment cinétique $\vec{L}$ de la toupie.

Comme nous l'avons vu pour le gyroscope, ce couple produit, dans un intervalle de temps Δt une variation $\Delta L = \tau \Delta t$ de moment cinétique. Cette variation est perpendiculaire au vecteur moment cinétique $\vec{L}$, et parallèle au couple. Après ce temps Δt le nouveau vecteur $\vec{L}$ aura le même module qu'auparavant mais aura tourné dans la direction de $\vec{\tau}$. Mais cela veut dire que l'axe de la toupie aura tourné dans la direction de $\vec{\tau}$. Mais à mesure que l'axe de rotation de la toupie tourne, le centre de masses tourne aussi et la direction de $\vec{\tau}$ aussi. Si l'axe de rotation de la toupie est incliné de θ par rapport à la verticale, une variation ΔL du moment cinétique implique une rotation de l'axe de la toupie autour de l'axe y de:

$$\Delta\phi = \frac{\Delta L}{L \sin\theta}$$

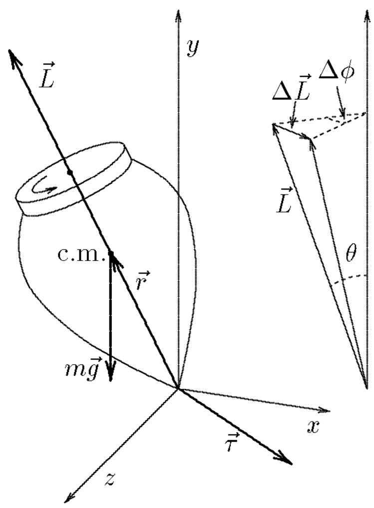


Figure 9.7 Le vitesse de précession ne dépend pas de l'inclinaison de la toupie.

L'axe de rotation de la toupie tourne autour de l'axe z avec une vitesse de précession:

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta L}{L\sin\theta}}{\Delta t} = \frac{\frac{\tau\Delta t}{L\sin\theta}}{\Delta t} = \frac{mgr\sin\theta}{L\sin\theta} = \frac{mgr}{L}$$

Remarquez que la vitesse de précession de dépend pas de l'inclinaison de l'axe de rotation de la toupie. Cette propriété est indispensable pour le fonctionnement des appareils utilisant la IRM (Imagerie par Résonance Magnétique Nucléaire) et, notamment, pour l'imagerie médicale.

([5]) Dans les avions on utilisait le "secteur" à 400 Hz ce qui donne une vitesse angulaire de 2513 rad/sec ou 24000 tours/min.

9.4.3 Le vélo.

L'effet gyroscope permet à des personnes "normales" sans qualités d'équilibristes de faire du vélo. Rester sur deux roues à l'arrêt, en équilibre, sur un vélo ou une moto est possible, mais peu de gens sont capables de le faire. Par contre rouler sur deux roues presque tout le monde peut le faire après une phase d'apprentissage qui consiste surtout à laisser tranquille le guidon. Car un vélo ou une moto qui roulent restent d'eux mêmes sur leurs deux roues

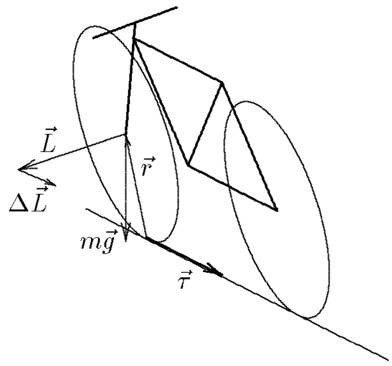


Figure 9.8 Quand le vélo penche vers la gauche, le couple créé par le poids sur la roue avant déplace le moment cinétique de celle-ci vers l'arrière et le fait tourner à gauche. Ceci continue jusqu'à que le couple créé par la force centrifuge créée par le virage, compense le couple dû au poids.

Dans la figure de droite nous avons représenté schématiquement un vélo en mouvement avec le guidon droit mais incliné vers la gauche. Le poids du vélo crée un couple $\vec{\tau}$ qui pousse le vélo à s'incliner d'avantage et à tomber. Mais si le vélo avance, la roue avant([6]) a un moment cinétique $\vec{L}$ dirigé vers la gauche. Le couple crée une variation de moment cinétique ΔL dirigée vers l'arrière. Cela veut dire que le moment cinétique de la roue avant tourne vers la gauche et cela se fait en tournant la roue avant vers la gauche (comme si on avait tourné le guidon vers la gauche). Le vélo amorce un virage à gauche et aussi longtemps que le couple incline le vélo à gauche le guidon tourne de plus en plus à gauche en diminuant le rayon de courbure du virage.

Vu du système accéléré (et non newtonien) du vélo, le virage se resserre, ce qui augmente la force centrifuge sur le vélo et qui crée un couple qui a tendance à pousser le vélo à droite et donc, à compenser le couple du poids qui l'incline vers la gauche. Quand les deux couples se compensent exactement le guidon s'arrête de tourner et le vélo continue son virage à rayon constant. S'il ne rencontre pas d'obstacle, la friction avec l'air le fera ralentir. En ralentissant la force centrifuge diminue et ne compense plus le couple dû au poids. Le guidon tourne un peu plus à gauche et le vélo continue son virage avec un rayon de courbure plus petit. Un vélo lancé droit (sans cycliste) commence à tourner et le rayon de courbure diminue à mesure que la vitesse du vélo diminue. Quand le guidon se bloque ou les roues dérapent, le vélo tombe.

Si on lance un vélo de la même façon mais avec le guidon bloqué, le vélo tombe sur le côté comme si on le lâchait à l'arrêt.

La situation est identique avec une roue ou une pièce de monnaie que vous faîtes rouler. Dès qu'un couple l'incline, la pièce change d'orientation de sorte que la force centrifuge équilibre le couple de déséquilibre. Le résultat est, comme pour le vélo, que la pièce décrit une spirale à mesure que sa vitesse diminue. Elle finit par décrire une spirale "sur place" quand la pièce est déjà presque horizontale.

9.4.4 Précession des équinoxes.

Un effet curieux de l'effet gyroscope est celui de la précession des **équinoxes**([7]). La terre tourne autour du soleil sur une orbite légèrement elliptique, contenue dans un plan qui contient également le soleil. Ce plan s'appelle, en astronomie, l'écliptique. La terre tourne autour d'elle-même autour de son axe de symétrie nord-sud. Or cet axe n'est pas perpendiculaire à l'écliptique mais incliné d'environ 23,5 degrés. De ce fait, quand la terre tourne autour du soleil la moitié de l'année le pôle nord "voit" le soleil en permanence (soleil de minuit), alors que le sud reste dans le noir (nuit polaire) et l'autre moitié de l'année c'est l'inverse: le pôle sud avec le soleil de minuit et le pôle nord sous la nuit polaire. Les deux jours de l'année où se fait la transition, des deux

([6]) La roue arrière a aussi un moment cinétique mais la façon comme elle est fixée ne lui permet de jouer aucun rôle dans l'équilibre du vélo.

([7]) Du latin aequus (égal) et nox (nuit) pôles on voit le (demi) soleil faire le tour de l'horizon, et dans tous les autres endroits de la terre la durée de la journée est la même que celle de la nuit (12 heures, évidemment).

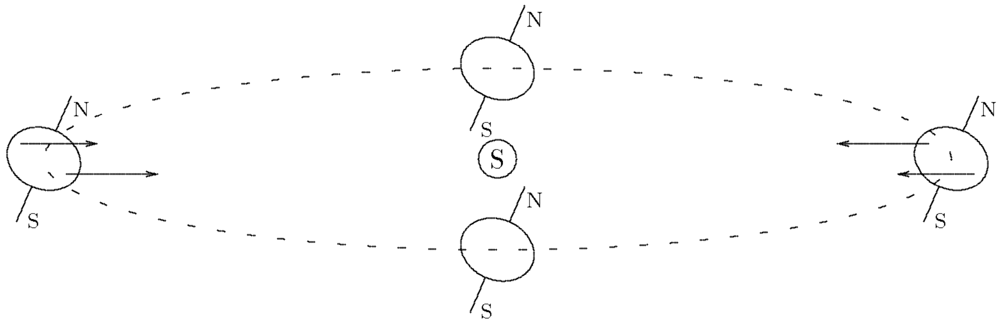
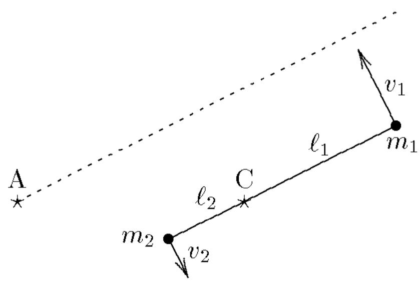


Figure 9.9 Dans la figure l'aplatissement polaire de la terre est très exagéré. Les deux terres au centre sont aux équinoxes et les deux autres aux solstices. Les forces d'attraction sur le gonflement équatorial, sont différentes de chaque côté de la terre à cause de leur dépendance avec l'inverse du carré de la distance.

La terre tourne autour de son axe et la prolongation de cet axe de rotation vers le ciel tombe sur le pôle nord céleste. Près de cette direction se trouve une étoile bien connue: l'étoile polaire. Si rien ne venait troubler la rotation de la terre, son moment cinétique resterait constant et l'étoile polaire serait toujours la même. Comme vous l'avez deviné, ce n'est pas le cas. Le problème est que la terre est légèrement aplatie aux pôles à cause de la rotation et de la force centrifuge([8]). Ceci lui fait un "gonflement" autour de sa partie équatoriale. La force d'attraction gravitationnelle est inversement proportionnelle à la distance au carré. La conséquence est que le "gonflement" du côté du soleil est légèrement plus proche de celui-ci que le "gonflement" de l'autre côté de la terre. De plus, sauf aux équinoxes, les deux gonflements ne se trouvent pas à la même hauteur (chacun se trouve de l'autre côte de l'écliptique). Le résultat est un couple dirigé le long de l'orbite terrestre. Ce couple impose un mouvement de précession à la terre. L'axe de rotation de la terre reste toujours incliné de 23,5 degrés, mais tourne avec une période d'environ 27000 ans. Pendant ce temps, le pôle nord céleste décrit un cercle sur le ciel de 23,5 degrés de rayon. Le résultat est que les jours des équinoxes se décalent dans le temps. Ce n'est pas beaucoup mais cela fait quand même un jour tous les 74 ans, ce qui est énorme pour un astronome.

9.5 Exercices.

1 - Deux masses m_1 et m_2 tournent à vitesse angulaire ω autour de leur centre de masses **C** à des distances ℓ_1 et ℓ_2. Calculez le moment angulaire en prenant comme référence ce centre de masses, puis calculez-le à nouveau en prenant comme référence un point quelconque **A**. Commencez par calculer le cas où $m_1 = m_2$ et $\ell_1 = \ell_2$.
Suggestion: Utilisez la "méthode" $L = \sum mv\cdot$*(bras de levier)* et utilisez la ligne pointillée du dessin.
R.: Le moment angulaire ne dépend pas du point de référence.



([8]) Ceci fut une des prédictions de Newton, conséquence de ses lois du mouvement. La vérification de cet aplatissement convainquit les plus réticents à la théorie de Newton.