PHYSIQUE

L'OPÉRATEUR $\vec{\nabla}$ (nabla).

FLUX d'un champ vectoriel.

Nous prendrons comme exemple le champ vectoriel des vitesses de l'eau dans une rivière (un long fleuve tranquille, pour simplifier). A chaque point à l'intérieur de la rivière correspond un vecteur vitesse. Prenez une épuisette avec son filet et mettez-la dans l'eau. Combien de litres par seconde traversent le filet? Ce nombre de litres par seconde est précisément le flux du champ vectoriel à travers la surface du filet (j'ai oublié de préciser qu'il s'agissait d'un *"filet mathématique"* et qu'il n'y a pas lieu de se poser des questions philosophiques sur ce que veut dire "surface du filet"). Comme dans toutes les épuisettes, le bord du filet est attaché à un anneau ou à un cadre rigide. Il est évident que l'eau qui traverse le filet est exactement le même qui traverse la surface du cadre (le même nombre de litres par seconde et le même flux), et ceci même si le cadre est tenu de travers dans le courant.

Imaginons maintenant que le filet est rigide (ne change pas de forme avec le courant): mettons une passoire très transparente. Si la passoire est dans le bons sens (le creux en aval) c'est la même situation que précédemment. Si l'on inverse la passoire l'eau circulera dans l'autre sens et le flux obtenu sera le même mais de signe contraire (négatif).

Si maintenant la passoire est de travers (la normale au cadre formant un angle θ avec la direction du courant, le flux à travers le cadre sera multiplié par un facteur $\cos\theta$ (par rapport au maximum). Le flux *net* à travers la surface de la passoire sera toujours égal à celui du cadre. Or, le flux local sur la surface de la passoire sera quelconque, par endroits positif ou négatif ou nul, mais la somme algébrique sera toujours égale à celle du cadre.

La définition mathématique du flux est donc:

$$F = \int_S \vec{V} \cdot \vec{ds}$$

La surface d'intégration S était dans notre exemple la surface entourée par le bord de la passoire ou la surface de la passoire elle même. Le produit scalaire entre le vecteur du champ et le différentiel de surface est là pour tenir compte du $\cos\theta$.

Dans notre exemple avec un champ de vitesses, le unités du flux seront des $\frac{mètres}{seconde}$ multipliés par des $mètres^2$ ce qui donne $\frac{mètres^3}{seconde}$.

L'opérateur NABLA

L'opérateur $\vec{\nabla}$ est un opérateur vectoriel défini comme suit:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Son application sur des champs scalaires ou vectoriels donne lieu à des "choses" appelées gradient, divergence, rotationnel, etc. Ces "choses" ne sont pas bêtement des formules mathématiques plus ou moins compliquées, mais ont une signification physique claire et qu'il est intéressant de connaître.

GRADIENT.

Imaginez la température de chaque point de l'atmosphère, ou de chaque point d'un solide quelconque. Imaginez que la température ne soit pas uniforme, ce qui entraîne que la chaleur passera des points plus chauds au points plus froids. Le transfert d'énergie se fait dans la direction où le changement de température est plus abrupte. Cette direction est précisément la direction opposée à celle du gradient. Donc le gradient est un vecteur qui a la direction de la plus forte variation du champ scalaire, et dont le module a pour valeur la dérivée du champ dans cette direction. Mathématiquement cela se fait de la façon suivante. Soit un champ scalaire $T(x,y,z)$ (j'ai pris T au hasard), le gradient de T est:

$$\vec{\nabla}T(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) T(x,y,z) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right)$$

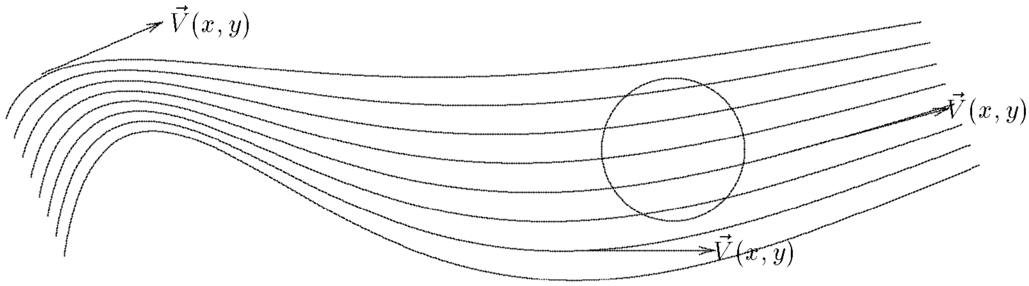
Le résultat est évidemment un champ vectoriel.

Lorsque vous “prenez des carres” en ski pour ne pas glisser, vos skis sont perpendiculaires au gradient. Par contre si vous glissez “tout schuss”, vous glissez dans la direction opposée au gradient.

DIVERGENCE.

Commencez par imaginer un champ vectoriel bidimensionnel. Le plus simple est d'imaginer le champ de vitesses de la surface d'une rivière. Imaginez les trajectoires de quelques particules d'eau. Les lignes formées par ces trajectoires sont toujours tangentes aux vecteurs vitesse. Dans le cas général d'un champ vectoriel, ces lignes reçoivent le nom de **lignes de force** (même si elles n'ont rien à voir avec des forces). Dans notre exemple, ces lignes de force coïncident avec les lignes de courant. Les lignes de force n'ont pas plus d'existence réelle que l'équateur ou les méridiens sur terre, mais sont une aide à la réflexion car leur représentation est liée aux caractéristiques physiques et mathématiques des champs vectoriels. Il est évident que par chaque point de l'espace d'un champ vectoriel passe une ligne de force. On peut donc en dessiner une infinitude, mais il est plus utile d'en dessiner seulement quelques-unes.

Revenons à notre champ vectoriel bidimensionnel que l'on dessinera à l'aide de quelques lignes de force/courant:



Si nous dessinons un cercle comme celui de la figure, le plus probable est que le nombre de lignes de force qui rentrent dans le cercle soit le même que celui qui en sort. Si ce n'est pas le cas, il y a de la triche: quelqu'un est en train d'ajouter ou de pomper de l'eau. Nous voilà dans la *divergence*: s'il y a plus de lignes de force qui sortent que de lignes de force qui rentrent c'est que la divergence à l'intérieur du cercle est positive. S'il en rentre plus qu'il n'en sort, la divergence est négative. La définition de *divergence* est donc le “taux de création” de champ (ou de lignes de force) à un endroit donné. Bien sur, c'est une définition vaseuse dans la mesure où on n'indique pas comme évaluer le “taux de création”. Pour donner une définition plus correcte passons à un exemple tridimensionnel: prenons simplement le même que précédemment mais au lieu de ne regarder que la surface on regarde tout le volume. Cette fois, pour voir si la divergence est nulle ou non il faudra prendre un volume et regarder le nombre de lignes de force qui rentrent et qui sortent du volume. On pourra mesurer le “taux de création du champ” en faisant la somme de la divergence dans le volume ou en mesurant le flux net qui sort du volume. Si l'on prend un volume infiniment petit on obtiendra la définition de *divergence* et si le volume est fini on obtiendra bêtement le théorème de Gauss.

Prenons un petit volume de forme parallélépipédique de dimensions dx, dy et dz, dans un endroit (x,y,z). Soit $V(x,y,z)$ notre champ vectoriel.

Pour calculer le flux net qui sort du volume $dv = dx\,dy\,dz$ il faut faire la somme algébrique de ce qui sort par les cotés opposés: pour x:

$$dF_1 = dy\,dz\,V_x(x+dx,y,z) - dy\,dz\,V_x(x,y,z) = \frac{\partial V_x(x,y,z)}{\partial x} dx\,dy\,dz$$

de même pour y et pour z:

$$dF_2 = dx\,dz\,V_y(x, y+dy, z) - dx\,dz\,V_y(x,y,z) = \frac{\partial V_y(x,y,z)}{\partial y} dx\,dy\,dz$$

$$dF_3 = dx\,dy\,V_z(x, y, z+dz) - dx\,dy\,V_z(x,y,z) = \frac{\partial V_z(x,y,z)}{\partial z} dx\,dy\,dz$$

le flux total sera la somme des trois:

$$dF = \left(\frac{\partial V_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial V_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial V_z(x,y,z)}{\partial z}\right) dv$$

la divergence est donc:

$$div\vec{V}(x,y,z) = \frac{dF}{dv} = \left(\frac{\partial V_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial V_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial V_z(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}(x,y,z)$$

Si l'on prend un volume fini, on voit que la création du champ à l'intérieur du volume est égale d'une part à la somme de la divergence dans ce volume et, d'autre part, au flux net qui sort du volume, c'est-à-dire, qui traverse la surface qui entoure celui-ci:

$$\int_{volume} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}\,dv = \int_{surface} \vec{V} \cdot \vec{ds}$$

Ceci est l'expression mathématique du **Théorème de Gauss**. En langage de tous les jours le théorème de Gauss s'exprime: ce qui sort d'un volume est égal à tout ce qui se crée dedans.

ROTATIONNEL.

Revenons à notre champ vectoriel bidimensionnel: le champ de vitesses de la surface d'un fleuve tranquille. Posez un petit bouchon quelque part sur la surface. Le bouchon va dériver avec le courant, mais en plus de dériver il va peut être tourner sur lui même.

Attention: tourner sur soi même ou tourner autour de quelque chose sont deux possibilités complètement indépendantes, il ne faut pas confondre!

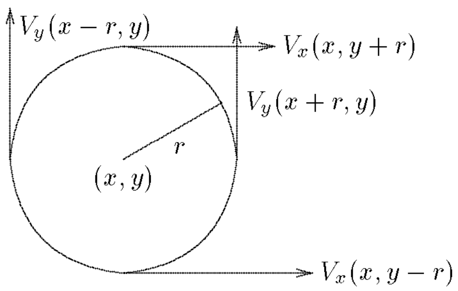
Si le bouchon (en plus de dériver) tourne sur lui même, le **rotationnel** du champ vectoriel n'est pas nul. S'il dérive sans tourner sur lui même, le rotationnel est nul.

La définition mathématique du rotationnel est:

$$rot\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)\right)$$

Évidemment, le **rotationnel** est un vecteur.

Il est facile de démontrer, en deux dimensions, que le rotationnel est proportionnel à la vitesse de rotation du bouchon:



Dans la figure ci-dessus on a représenté un bouchon de rayon r placé en (x,y) du champ vectoriel. Ce qui fait tourner le bouchon c'est la vitesse tangentielle de l'eau de chaque coté du bouchon: $V_y(x+r,y)$ fait tourner le bouchon vers la gauche, alors que $V_y(x-r,y)$ le fait tourner vers la droite. Même chose pour $V_x(x,y+r)$ et $V_x(x,y-r)$. La vitesse angulaire vers la gauche sera dons la moyenne des vitesses angulaires (positives vers la gauche):

$$\omega_{gauche} = \frac{V_y(x+r,y) - V_y(x-r,y) + V_x(x,y-r) - V_x(x,y+r)}{4r} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla} \times \vec{V}\right)_z$$

Sans démonstration, la situation est la même en trois dimensions: quand vous voyez un sac plastique emporté par le vent, si le sac plastique tourne sur lui même, le rotationnel du vent est différent de zéro et a la direction du vecteur vitesse angulaire du sac, et sa valeur est deux fois la vitesse angulaire.

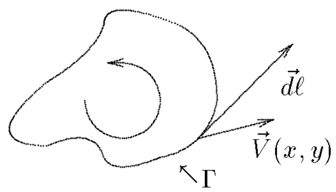
Quel est le rotationnel de la vitesse d'une rivière? Celui du vent?
Rotationnel d'un champ radial.
Rotationnel d'un champ circulaire, suivant la dépendance en r.

CIRCULATION.

La circulation d'un champ vectoriel $V(x,y,z)$ autour d'un chemin fermé Γ est définie comme:

$$CIRCULATION = \oint_\Gamma \vec{V} \cdot \vec{dl}$$

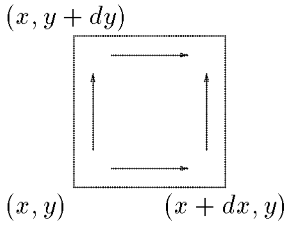
Par convention, le chemin est parcouru dans le sens positif (sens opposé à celui des aiguilles d'une montre).



Théorème de STOKES

Calculons la circulation dC autour d'un rectangle $dx\, dy$.

$$dC = V_y(x+dx,y)dy - V_x(x,y+dy)dx - V_y(x,y)dy + V_x(x,y)dx$$



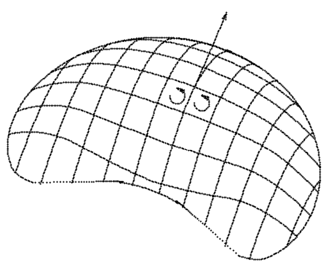
Les signes moins sont dûs au fait que le parcours est dans le sens des x ou des y décroissants.

$$\begin{aligned} dC &= (V_y(x+dx,y) - V_y(x,y))\, dy - (V_x(x,y+dy) - V_x(x,y))\, dx \\ &= \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) dxdy = \left(\vec{\nabla} \times \vec{V}\right)_z dxdy \\ &= \left(\vec{\nabla} \times \vec{V}\right) \cdot \vec{ds} \end{aligned}$$

Nous venons donc de voir que la *circulation* autour d'une petite surface est égale au produit de la valeur de cette surface par la composante du rotationnel perpendiculaire à la surface. Le théorème de Stokes généralise cette propriété: la circulation sur le bord de n'importe quelle surface (plane ou non) est égale à l'intégrale de la composante perpendiculaire à la surface du rotationnel sur toute la surface:

$$\oint_{bord} \vec{V} \cdot \vec{dl} = \int_{surface} (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \vec{ds}$$

Il ne faut jamais oublier que la surface est quelconque mais que le bord est le bord de la surface. Pour un même bord toutes les surfaces donnent le même résultat.



Pour le démontrer il suffit de quadriller la surface et de faire la somme des circulations sur chaque petit carré. On voit que tous les termes du type $V_y(x+dx,y)dy$ et similaires apparaissent deux fois, avec des signes opposés: sur un carré ils ont le même sens de parcours, mais sur le carré voisin ils ont le sens contraire. Les seuls termes qui ne s'annulent pas sont les termes du bord. La somme de ces termes du bord donne précisément la circulation sur le bord de la surface.

LAPLACIEN.

Le dernier opérateur que nous traiterons est le **laplacien**. Il est défini comme:

$$laplacien = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

L'opérateur ∇^2 est un opérateur scalaire et peut donc être appliqué soit à un scalaire:

$$\nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}\right)$$

et on obtient un scalaire, soit à un vecteur $\vec{A}$ et on obtient un vecteur (dont chaque composante comporte trois termes):

$$\nabla^2 \vec{A} = \left(\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right), \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \right), \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \right) \right)$$

Pour essayer de comprendre la signification du laplacien, commençons par nous attaquer au laplacien d'un scalaire, et pour simplifier encore plus, prenons comme scalaire une fonction ϕ qui ne dépend pas ni de y ni de z. Avec cela, le laplacien se réduit à:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

c'est-à-dire à la deuxième dérivée de la fonction. Or la deuxième dérivée d'une fonction indique la courbure de la fonction: si la fonction est "concave" $\smile$ la deuxième dérivée est positive, si la fonction est "convexe" $\frown$ la deuxième dérivée est négative. Finalement si la deuxième dérivée est nulle, soit la fonction est une droite, ou à l'endroit où elle est nulle la fonction présente un point d'inflexion, c'est-à-dire, la courbure change de sens, ou encore: localement la fonction est une droite. Une autre façon de voir une droite: la valeur de chaque point est égale à la moyenne des points qui l'entourent:

$$f(x) = \frac{f(x-dx) + f(x+dx)}{2}$$

Si nous avons à faire à une fonction d'une seule variable, dans les zones où le laplacien est nul, la fonction ne peut être qu'une droite, aux endroits où le laplacien est positif, la fonction est concave $\smile$ et aux endroits où le laplacien est négatif, la fonction est convexe $\frown$.

Augmentons un peu la difficulté: passons à une fonction de deux variables: $\phi(x, y)$. Le laplacien sera cette fois:

$$\nabla^2 \phi(x, y) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

Nous pouvons visualiser notre fonction à deux variables comme une surface en trois dimensions (p.e. la surface de la terre, avec des vallées et des collines). Le laplacien est maintenant la somme des deux courbures dans les directions x et y. Si nous sommes sur une colline les deux courbures seront négatives et le laplacien sera négatif. Si nous sommes au fond d'une cuvette les deux courbures seront positives et le laplacien aussi. Mais le cas plus intéressant est celui du laplacien nul, car il apparaît souvent en physique. Le laplacien peut être nul si les deux deuxièmes dérivées sont nulles, mais ce n'est pas un cas intéressant: le terrain est plan (éventuellement incliné). Le cas plus courant est que le laplacien est nul parce que les deux deuxièmes dérivées se compensent: une positive et l'autre négative. Cela veut dire que la courbure dans un sens est positive et dans l'autre sens négative. C'est, par exemple, le cas de points dits "selle de cheval": le milieu de la selle est concave d'avant en arrière et convexe de gauche à droite.

Ce qui est intéressant quand le laplacien est nul est que la valeur de chaque point est la moyenne des points qui l'entourent:

$$\phi(x, y) = \frac{\phi(x-\varepsilon, y) + \phi(x+\varepsilon, y) + \phi(x, y-\varepsilon) + \phi(x, y+\varepsilon)}{4}$$

On comprend pourquoi on trouve souvent en physique des laplaciens nuls. Dans la nature les choses varient doucement et il est "naturel" qu'un point soit la moyenne de son entourage.

On trouve des cas dans lesquels le laplacien n'est pas nul. Ces cas correspondent à des endroits où "des choses se passent"; par exemple dans des problèmes de diffusion de chaleur, ce sont des endroits où on chauffe ou on refroidit, ou dans des problèmes d'électrostatique, là où il y a des charges électriques qui créent du champ.

Et le laplacien en trois dimensions? La situation est la même: on ajoute la courbure dans les trois directions. Malheureusement on ne peut pas visualiser ni même imaginer une courbure tridimensionnelle (il faudrait des cerveaux et des penseurs quadridimensionnels) la seule chose que l'on peut faire c'est extrapoler le cas de deux dimensions. Il est par contre vrai que pour le laplacien nul en trois dimensions, la valeur de chaque point est égal à la moyenne de son entourage.

Tout cela était pour le laplacien d'un scalaire. Le laplacien d'un vecteur a trois composantes. Autrement dit si ce laplacien est égal à quelque chose, ce chose en question sera un vecteur, et on aura en réalité trois égalités séparées. Il faut traiter les trois séparemment, mais la signification physique est la même que pour le cas d'un scalaire.

ALPHABET GREC

nom	majuscule	minuscule
alpha	A	α
beta	B	β
gamma	Γ	γ
delta	Δ	δ
epsilon	E	ϵ, ε
dzéta	Z	ζ
Ûta	H	η
thÛta	Θ	θ
iota	I	ι
kappa	K	κ
lambda	Λ	λ
mu	M	μ
nu	N	ν
ksi	Ξ	ξ
omicron	O	o
pi	Π	π
rô	P	ρ
sigma	Σ	σ
tau	T	τ
upsilon	Υ	υ
phi	Φ	ϕ, φ
khi	X	χ
psi	Ψ	ψ
oméga	Ω	ω