8.7 Fonctions hyperboliques.

Les fonctions hyperboliques peuvent être définies comme suit:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

La forme des fonctions est la suivante:

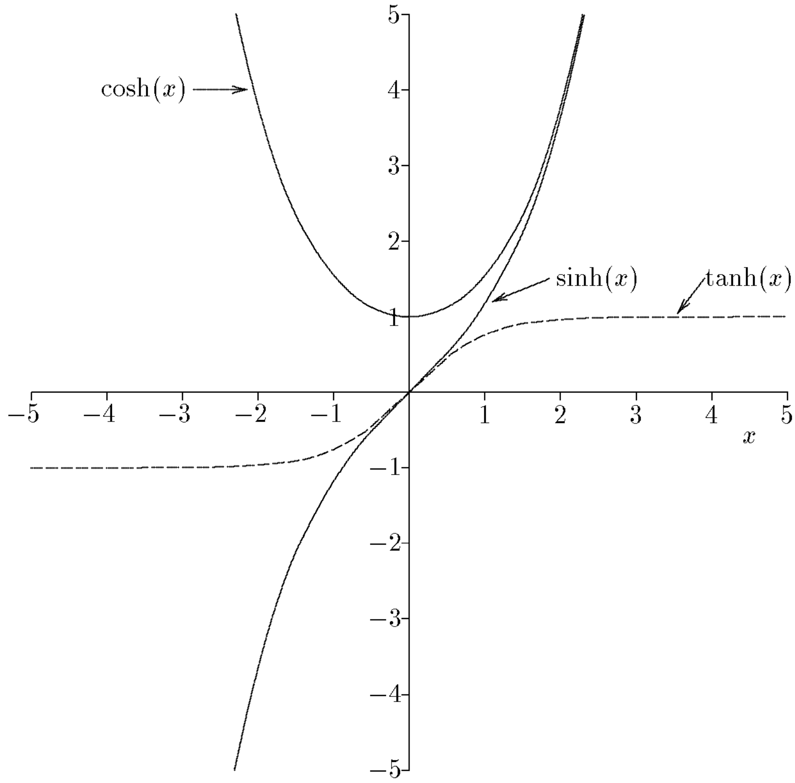

Figure 8.5 Fonctions hyperboliques.

Il est facile de démontrer que:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$
$$\sinh(x) = -j\sin(jx)$$
$$\cosh(x) = \cos(jx)$$
$$\tanh(x) = -j\tan(jx)$$
$$d\ \sinh(x) = \cosh(x)\ dx$$
$$d\ \cosh(x) = \sinh(x)\ dx$$
$$d\ \tanh(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}dx$$

Et, avec plus de difficulté:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arcsinh}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \\
\operatorname{arccosh}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \\
\operatorname{arctanh}(x) &= \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1-x)
\end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned}
\sinh(x \pm y) &= \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y \\
\cosh(x \pm y) &= \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y \\
\sinh x + \sinh y &= 2\sinh\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y) \\
\sinh x - \sinh y &= 2\sinh\frac{1}{2}(x-y)\cosh\frac{1}{2}(x+y) \\
\cosh x + \cosh y &= 2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y) \\
\cosh x - \cosh y &= 2\sinh\frac{1}{2}(x+y)\sinh\frac{1}{2}(x-y)
\end{aligned}$$

Toutes ces formules portent un air de famille avec les formules des fonctions trigonométriques mais elles ne sont pas les mêmes: il faut se méfier!

Des différentes fonctions hyperboliques, seule cosh nous est familière. En effet, c'est la forme prise par une chaînette ou une corde infiniment souple et homogène tenue par les extrémités et laissée pendante sous son poids. Pour ceci on l'appelle aussi **chaînette** ou **caténaire**. Comparez au caténaire des cheminots.