en notant $\tau = \sigma^1$ et $\sigma = \sigma^2$, nous trouvons également parfois dans la littérature la notation suivante:

$$S = -\frac{T_0}{c}\int d\tau d\sigma\sqrt{\det\left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\sigma^{\alpha}}\frac{\partial X_{\mu}}{\partial\sigma^{\beta}}\right)} = -\frac{T_0}{c}\int d\tau d\sigma\sqrt{\det\left(\frac{\partial X}{\partial\sigma^{\alpha}}\frac{\partial X}{\partial\sigma^{\beta}}\right)}$$

avec α, β parcourant donc les valeurs de 1 à 2. Or, selon ce que nous avons vu dans le chapitre de Calcul Tensoriel, nous pouvons écrire au moins localement à la surface que:

$$S = -\frac{T_0}{c}\int d\tau d\sigma\sqrt{\det\left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\sigma^{\alpha}}\frac{\partial X_{\mu}}{\partial\sigma^{\beta}}\right)} = -\frac{T_0}{c}\int d\tau d\sigma\sqrt{\det\left(\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\sigma^{\alpha}}\frac{\partial X^{\nu}}{\partial\sigma^{\beta}}\right)}$$

puisque $\dfrac{\partial X^{\mu}}{\partial\sigma^{\alpha}}\dfrac{\partial X^{\nu}}{\partial\sigma^{\beta}}$ est considéré comme un mactrice 2×2 alors $\eta_{\mu\nu}$ doit aussi l'être. La métrique de Minkowski d'une surface sera prise comme étant:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

selon les propriétés du déterminant, nous avons:

$$\det\left(\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\sigma^{\alpha}}\frac{\partial X^{\nu}}{\partial\sigma^{\beta}}\right) = \det\left(\eta_{\mu\nu}\right)\det\left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\sigma^{\alpha}}\frac{\partial X^{\nu}}{\partial\sigma^{\beta}}\right) = -\det\left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\sigma^{\alpha}}\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\sigma^{\beta}}\right)$$

et nous définissons:

$$\gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta}) = \det\left(\frac{\partial X^{\mu}}{\partial\sigma^{\alpha}}\frac{\partial X^{\nu}}{\partial\sigma^{\beta}}\right)$$

Soit au final, nous avons l'action de Nambu-Goto qui est localement (dans un espace-temps de Minkowski):

$$S = -\frac{T_0}{c}\int d\tau d\sigma\sqrt{-\gamma}$$