1 La question

Trois vaisseaux spatiaux A, B et C se déplacent librement dans une région vide, sans matière autour, sans rotation ni mouvement relatif, B et C étant équidistants de A, les trois bien alignés.

B A C

B et C synchronisent leurs horloges par des échanges de signaux. Ils vérifient que le rythme de leurs horloges est identique, ainsi que l'origine de la datation.

A envoie un signal lumineux dans les deux directions, et dès qu'un des autres vaisseaux reçoit le signal, il accélère pendant un temps court, selon la ligne BC, disons vers la droite sur le dessin. B et C subissent exactement la même accélération mesurée par A, qui donne aux deux vaisseaux B et C la même variation de vitesse $\vec{\Delta v}$ mesurée par A.

B et C échangent ensuite des signaux, ils constatent que

1) Ils ont reçu le signal en provenance de A à la même date indiquée par leurs horloges, (ce qui n'a rien d'étonnant, A a été disposé là où il fallait pour cela);

2) Que leurs horloges battent encore le même rythme (rien d'étonnant non plus, ils sont immobiles l'un par rapport à l'autre);

La question est si leurs horloges sont toujours synchronisées, ou si l'une retarde par rapport à l'autre?

Une seconde question se pose sur la distance entre B et C. Si on les relie par un fil de laine très léger, cassera-t-il lors de l'accélération?

2 La réponse

B et C sont désynchronisés, et l'horloge de C avance sur celle de B; C a pris de l'âge par rapport à B lors de l'accélération.

Par ailleurs la distance entre eux a augmenté dans leurs référentiels propres, le fil de laine a cassé pendant la phase d'accélération.

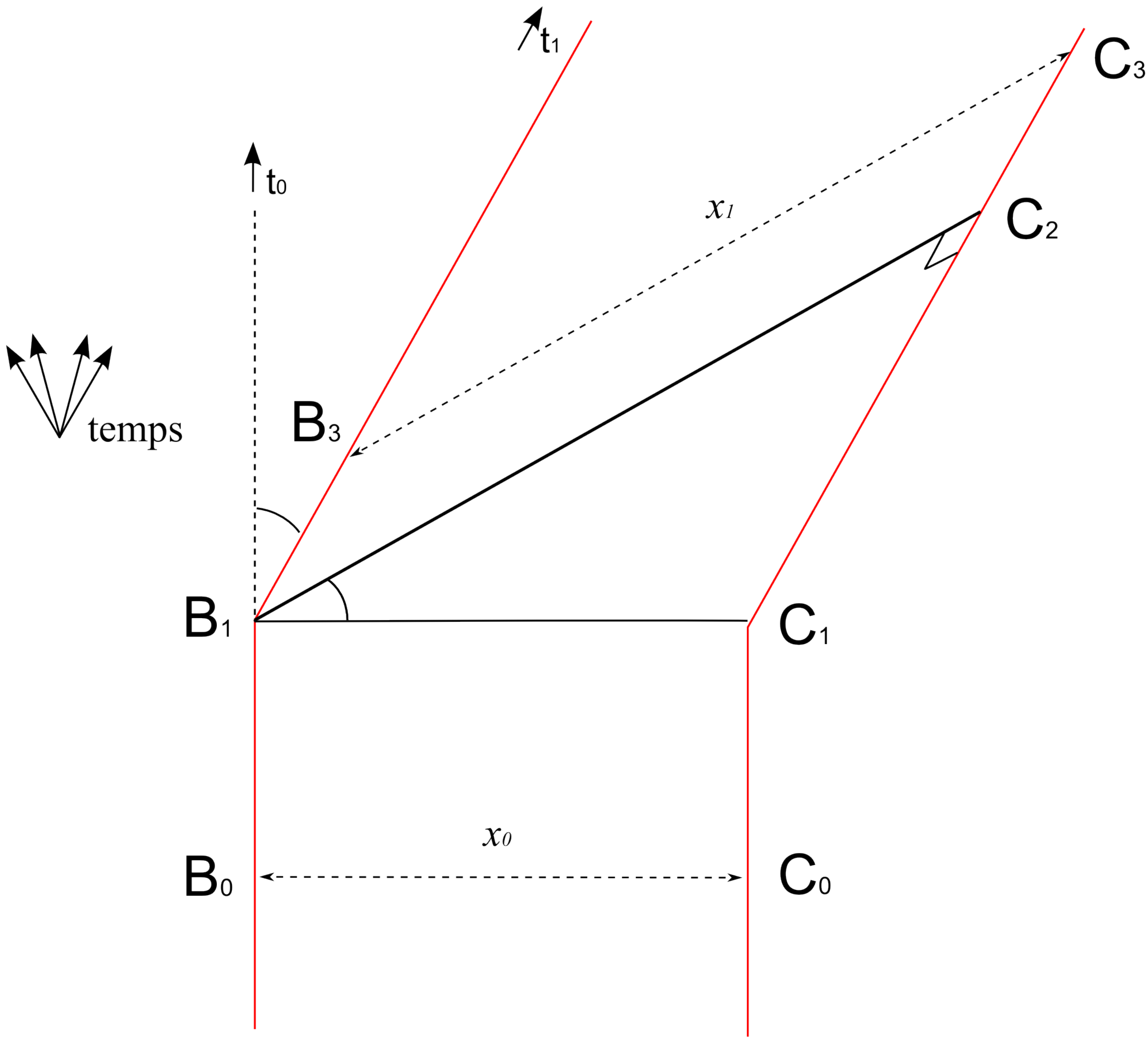
3 Une solution

3.1 Qualitatif

Une manière de résoudre la question, aussi bien qualitativement que quantitativement est de travailler dans un diagramme euclidien temps-espace la page étant euclidienne!), tout en changeant quelques signes aux bons endroits pour rétablir la géométrie hyperbolique indessinable...

Dans un tel diagramme, une accélération est une sorte de rotation. En RR, une accélération est une rotation hyperbolique, un changement de la direction du vecteur temps propre (la 4-vitesse). Mais, à la différence du cas euclidien, son orthogonal (la direction de l'espace) tourne *en sens inverse* sur le dessin : la nouvelle direction temporelle se "rapproche" de la nouvelle direction spatiale.

La figure est alors la suivante.



relat2.png

La variation de vitesse se présente bien comme un angle, l'angle $\widehat{t_0 B_1 t_1}$, dont la valeur est appelée couramment la rapidité.

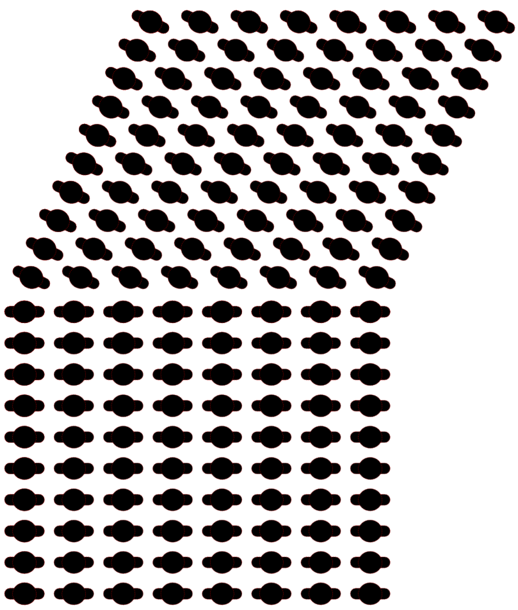
On voit immédiatement sur le dessin deux choses :

1) Les vaisseaux sont désynchronisés. Après l'accélération, une droite de simultanéité B_2C_3 n'est plus

parallèle à B_0C_0, et cela se traduit par "du temps" en plus côté C, manifesté par le segment C_1C_2;

2) La distance entre B et C a augmenté.

L'équivalent en euclidien s'illustre facilement par des militaires marchant au pas ayant à tourner au coin d'une rue. On constate sur la figure suivante que si tous les soldats obliquent exactement sur une ligne marquée au sol et perpendiculaire à la direction initiale de progression, les rangs parallèles au sens de la marche vont se rapprocher (effet sur la distance), et les rangs perpendiculaires seront détruits (effet sur la synchronisation), la colonne extérieur au virage "vieillissant" par rapport à la colonne intérieure (les effets sont inverses de ceux en géométrie hyperbolique, mais l'idée est la même).



defile.png

3.2 Quantitatif

3.2.1 Un peu de géométrie

Le quantitatif peut s'obtenir sans grand peine, en appliquant quelques règles permettant de faire de la géométrie hyperbolique à partir d'une figure euclidienne (donc fausse!).

La variation de vitesse correspond à l'angle $\widehat{t_0B_1t_1}$, la rapidité. Par similitude on le retrouve comme l'angle $\widehat{C_2B_1C_1}$ du triangle $C_2B_1C_1$, qui est rectangle en C_2 (puisque l'angle est entre la direction temporelle et son orthogonal). Comme $\Delta v/c$ correspond à la tangente (hyperbolique) de la rapidité (mais ça correspond à la tangente euclidienne sur le dessin), on a $\Delta v/c = c\Delta\tau/x_1$, en notant $\Delta\tau$ la durée C_1C_2, qui correspond à l'écart de temps propre entre B et C.

Par ailleurs on peut appliquer l'équivalent de du théorème de Pythagore au triangle $C_2B_1C_1$. Une petite difficulté est de mettre le signe $-$ là où il faut. Comme l'hypothénuse est de genre espace (c'est la séparation spatiale BC avant l'accélération), la formule est $x_0^2 = x_1^2 - (c\Delta\tau)^2$. On voit que x_1 est plus grand que x_0, B et C se sont éloignés dans leur repères propres.

En éliminant x_1 et en introduisant la variation de vitesse, il vient $x_0^2 = (c^2\Delta\tau/\Delta v)^2 - (c\Delta\tau)^2$, ce qui donne la valeur de l'âge supplémentaire de C par rapport à B, à savoir

$$\Delta\tau = \frac{\Delta v.x_0}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1-(\Delta v/c)^2}} = \gamma\frac{\Delta v.x_0}{c^2}$$

Au premier ordre, le décalage temporel est donc proportionnel à la variation de vitesse *et à la distance entre B et C*. Si on cherche à attribuer une cause au décalage, c'est tout autant l'accélération totale (la variation de vitesse) que la distance. L'importance de la distance est à souligner, point souvent laissé dans l'ombre dans les explications relatives aux "paradoxes" de la relativité restreinte.

3.2.2 Une autre approche

On remarque aisément que les trajectoires (4D) de B et C sont parallèles. On déduit celle de C de celle de B par une translation, de vecteur de coordonnées $(0, \vec{x}_0)$ dans le référentiel initial. Cette translation est de genre espace, mais n'est purement spatiale que dans le référentiel initial.

Dans le référentiel final, ses coordonnées sont obtenues par l'application de la transformation de Lorentz correspondant à la variation de vitesse, ce qui donne

$$(-\gamma\vec{x}_0.\Delta\vec{v}/c^2,\ \gamma\vec{x}_0)$$

On trouve ainsi directement le décalage temporel des horloges et la séparation spatiale dans le référentiel final.

Michel (MMy), document préparé pour Futura Sciences, Juin 2009