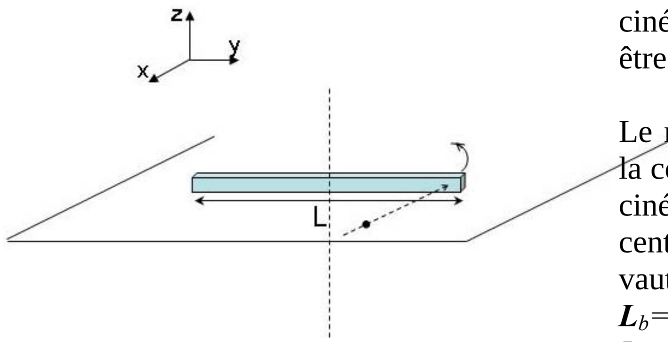
Exercices de Physique Générale
Série 3 - Corrigé **27 novembre et 4 décembre 2009**

1. Poutre & balle : collision inélastique



En absence de force externe, le moment cinétique du système balle-poutre doit être conservé lors de la collision.

Le moment cinétique de la poutre avant la collision est nul. Par contre le moment cinétique de la balle ($\boldsymbol{L}_b$) par rapport au centre de la poutre juste avant l'impact vaut :

$\boldsymbol{L}_b = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m_b \boldsymbol{v}_b$

$L_b = m_b \cdot v_b \cdot l_p/2 = 22.5$ kg m^2 s^{-1}

$\boldsymbol{L}_b$ est le long de l'axe z car $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{v}_b$ sont $\perp Oz$.

Après la collision, la balle et la poutre tournent ensemble et le système (balle + poutre) possède un moment cinétique total (L_t) dont la composante long l'axe z vaut :

$L_t = (I_b + I_p)\omega$

I_b et I_p sont les moments d'inertie de la balle et de la poutre par rapport au centre de la poutre, respectivement. Donc :

$I_b = m_b\, l_p{}^2/4 = 0.1125\ kg\ m^2$

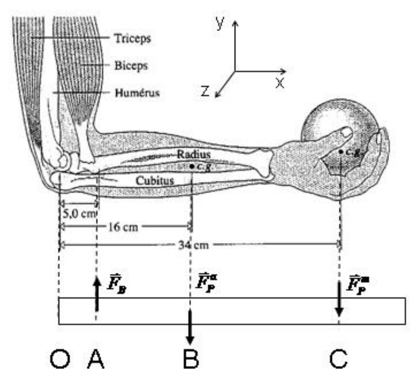
$I_p = m_p\, l_p{}^2/12 = 3\ kg\ m^2$

Comme $L_b = L_t$ on peut calculer ω :

$\omega = L_b/(I_b + I_p) = 7.23\ rad\ s^{-1}$

2. Biceps

On écrit le théorème du moment cinétique p.r. à O. Comme on est à l'équilibre, le moment résultant est nul :
$\boldsymbol{\tau} = 0$.

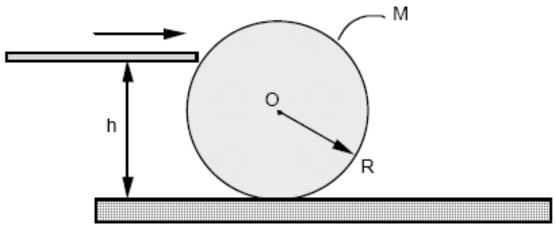


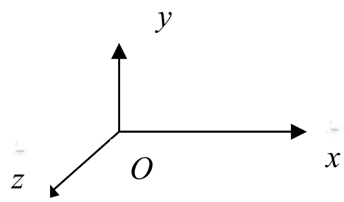
$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\tau}_B + \boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_m$

$= \boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{F}_B + \boldsymbol{OB} \times \boldsymbol{F}^a{}_P + \boldsymbol{OC} \times \boldsymbol{F}^m{}_P$

$\tau_z = +0.05 \cdot F_B - 0.16 \cdot ((0.055 \cdot 80)\ 9.8) - 0.34 \cdot (2 \cdot 9.8) \rightarrow F_B = 272$ N

3. Balle de billard: centre de percussion





On considère un système d'axe centré au le centre de masse de la sphère.
Les équations qui nous permettent de décrire le système sont :

a) Loi de Newton : $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ appliquée au centre de masse (le point O sur le dessin).
   $x : F_q = m\, a$
   $y : F_P + F_R = 0$

Où F_p , F_R et F_q sont respectivement la force poids, la force de réaction du plan sur lequel la balle roule et la force exercé par la queue ; et a est l'accélération du centre de masse (point O sur le dessin).

b) Théorème du moment cinétique p.r. au centre de masse : $\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$.
   On se limite à l'étude du moment le long l'axe z.

$\tau_z = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_q)_z = r_x \cdot F_{qy} - r_y \cdot F_{qx} = 0 - (h-R) \cdot F_q$

$L_z = I \cdot \omega$

Théorème du moment cinétique :

$-(h-R) \cdot F_q = I \cdot d\omega/dt$

Où ω est la vitesse angulaire et I le moment d'inertie qui vaut $2/5MR^2$ pour une sphère par rapport à sont centre.

c) Enfin la condition « roule sans glisser » signifie que la vitesse v du centre de masse est la vitesse tangentielle du mouvement circulaire uniforme, donc :

$v = -\omega \cdot R$ donc $a \equiv dv/dt = -R \cdot d\omega/dt$

En combinant a), b) et c) on trouve :

$(h-R)MR\dfrac{d\omega}{dt} = I\dfrac{d\omega}{dt} \Rightarrow h = \dfrac{I + MR^2}{MR}$, et en remplaçant: $\boxed{h = \dfrac{7}{5}R}$

4. Satellite

Pour que le satellite soit géostationnaire, il faut qu'il ait la même vitesse angulaire que la Terre.
On sait que le période de rotation de la Terre vaut $T_t = 24h$; la vitesse angulaire de la Terre donc est :

$$\omega_T = \frac{2\pi}{24h} = 7.272 \cdot 10^{-5}\left[s^{-1}\right]$$

D'autre part si on veut que le satellite géostationnaire reste dans son orbite il faut que la force gravitationnelle $\boldsymbol{F}_G$ qu'il subit corresponde à l'accélération $\boldsymbol{a}$ qu'on aimerait lui faire subir. Noter qu'un satellite géostationnaire doit avoir une orbite circulaire au dessus de l'équateur. On écrit la loi de Newton :

a) $\boldsymbol{F}_G = m\boldsymbol{a}$
où $\boldsymbol{F}_G$, la force gravitationnelle que subit un objet de masse m à une distance r de la Terre, vaut :
b) $\boldsymbol{F}_G = -G\dfrac{mM_T}{r^2}\boldsymbol{\rho}$
Où M est la masse de la Terre, G la constante gravitationnelle et $\boldsymbol{\rho}$ est le vecteur unitaire dirigé du centre de la terre vers le satellite.

L'accélération qu'on veut lui faire subir est donnée par l'accélération centripète d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω_T et rayon r, donc
c) $\boldsymbol{a} = -\omega_T^{\,2}\; r\,\boldsymbol{\rho}$

En combinant a), b) et c) on trouve :

$$r = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega_T^2}} = \sqrt[3]{\frac{6.67*10^{-11}*5.97*10^{24}}{(7.272*10^{-5})^2}} = 42228\ km$$

Ce qui, en déduisant le rayon $d/2$ de la Terre, donne une altitude de 35'857 km

5. Statique du pied

Les équations qui nous permettent de décrire le système sont :

a) La loi de Newton : $\boldsymbol{F} = 0$
$x : F \cdot sin\alpha - R \cdot sin\beta = 0$
$y : F \cdot cos\alpha - R \cdot cos\beta + N = 0$

b) Théorème du moment cinétique ; dans notre cas (statique), la résultante des moments de force par rapport au centre de masse est nulle: $\boldsymbol{\tau} = 0$
Approximation α~0
$z : 6 \cdot F - 11 \cdot N \sim 0$

La loi d'action-réaction implique que $N = - F_P$ (Oz vers le haut, donc $F_P = -mg$), donc:

De b) ⇒ $F = (11/6) \cdot mg$
De a) ⇒ $R \cdot cos\beta = N + F \cdot cos\alpha \cong N + F = (17/6) \cdot mg$
$R \cdot sin\beta = F \cdot sin\alpha \sim F \cdot \alpha = (11/6) \cdot (7\pi/180)\ mg$
Donc: $R = 2.84 \cdot mg$ et $\beta = 4.5°$