APPENDICE 1 Èléments de la théorie de la relativité

A1.1) Généralités

Dans un référentiel galiléen, le carré de la distance de deux points infiniment voisins est donné par la formule :

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2$$

où c désigne la vitesse de la lumière. Dans un tel référentiel, les vecteurs et les tenseurs d'Univers possèdent des composantes contre-variantes, co-variantes et mixtes. Pour un vecteur v, les relations entre les deux types de composantes sont le suivantes:

$$v_\lambda=g_{\lambda\mu}v^\mu \qquad v^\mu=g^{\lambda\mu}v_\lambda$$

$$v_i=v^i \qquad \forall i=x,y,z \qquad v_t=-c^2v^t$$

g désigne le tenseur métrique.

Dans le cas simple d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme, que l'on peut toujours supposer parallèle à l'un des axes, x, par exemple, les composantes contre-variantes se correspondent par une transformation de Lorentz classique :

$$v'^x=\frac{v^x-\mathit{v}v^t}{\sqrt{1-\frac{\mathit{v}^2}{c^2}}} \qquad v'^t=\frac{v^t-\frac{\mathit{v}v^x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\mathit{v}^2}{c^2}}}$$

Dans ces formules, les variables primées sont relatives au référentiel en mouvement par rapport aux étoiles. v est la vitesse d'entraînement supposée parallèle à x et, c, la vitesse de la lumière. Les composantes co-variantes se correspondent par des formules analogues aux formules de Lorentz :

$$v'_x=\frac{v_x+\mathit{v}v_t}{\sqrt{1-\frac{\mathit{v}^2}{c^2}}} \qquad v'_t=\frac{v_t+\frac{\mathit{v}v_x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\mathit{v}^2}{c^2}}}$$

Cela posé, le mouvement d'un point matériel (ou d'un objet de dimensions suffisamment réduites par rapport aux corps qui l'entourent pour pouvoir être considéré comme un point) est représenté par sa ligne d'Univers, contenue dans le cône de la lumière en chacun de ses points. Le vecteur tangent à cette courbe en un point et dont le carré de la norme est égal à -1 , avec la représentation adoptée pour le tenseur métrique, est la vitesse d'Univers. Ses composantes sont données par :

$$u^x=\frac{v^x}{\sqrt{c^2-v^2}} \qquad u^t=\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}} \qquad (u^x)^2-c^2(u^t)^2=-1$$

Où v représente la vitesse cinématique classique. La quantité de mouvement et l'énergie mécanique du point sont regroupée dans un quadrivecteur :

$$P_\lambda=cM_0u_\lambda \qquad P_x=cM_0\frac{v_x}{\sqrt{c^2-v^2}} \qquad P_t=cM_0\frac{(-c^2)}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

Nous l'avons représenté sous forme co-variante pour obtenir directement des grandeurs physiques familières, avec la représentation adoptée pour le tenseur métrique . M_0 est la masse au repos. On reconnaît, dans ces expressions, la forme familière de l'impulsion et de l'énergie relativistes.

Dans tout système de coordonnées galiléennes ou non, les équations du mouvement s'écrivent:

$$\nabla_\lambda P_\mu u^\lambda=F_\mu \qquad \nabla_\lambda P_\mu=\partial_\lambda P_\mu-\Gamma_{\lambda\mu}{}^\sigma P_\sigma$$

∇ est l'opérateur de dérivation co-variante, tandis que les Γ sont les composantes de la connexion affine en coordonnées curvilignes. F est la force d'Univers, toujours orthogonale au vecteur vitesse d'Univers. Dans un système de coordonnées galiléennes, on écrit simplement :

$$\frac{dP_\mu}{d\tau}=F_\mu \qquad \tau=\frac{s}{c}$$

τ est le temps propre du mobile et, s, la longueur d'un arc de la ligne d'Univers.

A1.2) Mouvement uniformément accéléré.

La cinématique relativiste stipule que les points matériels décrivent des lignes d'univers (trajectoires spatio-temporelles à quatre dimensions) du "genre temps", c'est à dire, contenues à l'intérieur de l'hyper-cône de la lumière. Cette contrainte exprime le fait que l'on ne peut dépasser la vitesse de la lumière.

Le mouvement est donc déterminé par la donnée de quatre fonctions d'un paramètre arbitraire que, pour des raisons de commodité dans les calculs et sans introduire aucune restriction de nature physique, on prend égal à la longueur d'un arc de trajectoire : s (on peut aussi utiliser le "temps propre" τ = s/c où c est la vitesse de la lumière), soit :

$$x^\lambda(s) \qquad \text{avec } \lambda = x,y,z,t$$

APPENDICE 1 Èléments de la théorie de la relativité

la vitesse d'univers est un quadri-vecteur défini par :

$$u^\lambda = \frac{dx^\lambda}{ds}$$

on a, par suite :

$$u^\lambda u_\lambda = \eta_{\lambda\mu} \frac{dx^\lambda}{ds}\frac{dx^\mu}{ds} = \frac{-ds^2}{ds^2} = -1$$

avec $\eta_{\lambda\mu}=0$ si $\lambda\neq\mu$, 1 si $\lambda = \mu$ =x,y,z et $-c^2$ si $\lambda = \mu$ = t.

C'est cette convention qui entraîne $u^\lambda u_\lambda = -1$: un vecteur du genre temps a une longueur imaginaire. Rappelons que u^λ est lié à la vitesse classique par :

$$u^i = \frac{v^i}{\sqrt{c^2 - v^2}} \qquad \text{pour} \quad i=x,y,z \qquad u^4 = \frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

l'accélération d'univers est donnée par :

$$\gamma^\lambda = \frac{du^\lambda}{ds}$$

de sorte que :

$$\frac{d}{ds}(u^\lambda u_\lambda) = 2\gamma^\lambda u_\lambda = 0$$

Ainsi l'accélération d'univers est toujours normale à la vitesse d'univers. Cela interdit de définir le mouvement uniformément accéléré par la condition :

$$\frac{d\gamma^\lambda}{ds} = 0$$

On a, en effet :

$$\frac{d}{ds}(u^\lambda \gamma_\lambda) = \frac{d\gamma_\lambda}{ds} u^\lambda + \gamma_\lambda \gamma^\lambda = 0$$

si bien que la condition $\frac{d\gamma^\lambda}{ds}=0$ entraînerait $\gamma^\lambda\gamma_\lambda=0$ donc, soit $\gamma^\lambda = 0$, soit le caractère isotrope de l'accélération. Mais une telle situation ne peut être réalisée que si u est lui même isotrope, c'est à dire, si l'on a déjà atteint la vitesse de la lumière ! On définira donc l'accélération uniforme relativiste en imposant la condition $\gamma^\lambda\gamma_\lambda$ = Cte qui est moins restrictive et entraîne simplement :

$$\frac{d(\gamma^\lambda \gamma_\lambda)}{ds} = 0$$

Ainsi la dérivée de l'accélération est orthogonale à l'accélération, elle-même orthogonale à la vitesse d'univers. Cela n'implique pas , à priori, que la dérivée de l'accélération soit colinéaire à u mais cette situation se présente si l'on impose au mouvement d'être rectiligne. Cela s'écrit :

$$\gamma^i = \varphi(s) u^i \qquad i=x,y,z$$

φ étant une fonction qui caractérise le mouvement. On a, alors :

$$\frac{d\gamma^i}{ds} = \dot\varphi u^i + \varphi\gamma^i$$

$$= \dot\varphi u^i + \varphi^2 u^i$$

$$= (\dot\varphi + \varphi^2) u^i = \psi u^i$$

d'autre part, on a, de façon classique :

$$u = \vec u + u^4 e_4$$

en rappelant qu'une lettre sans indice désigne un vecteur spatio-temporel et, une lettre surmontée d'une flèche, un vecteur géométrique ordinaire. La lettre e désigne un vecteur de la base. On a, de façon générale :

$$\gamma = \varphi\vec u + \eta e_4$$

$$\frac{d\gamma}{ds} = \psi\vec u + \xi e_4$$

de sorte que $\gamma u = 0$ s'écrit : $\varphi\vec u^2 - c^2\eta u^4 = 0$

$\frac{d\gamma}{ds}\gamma = 0$ s'écrit : $\psi\varphi\vec u^2 - c^2\eta\xi = 0$

d'où l'on tire : $c^2\psi\eta u^4 - c^2\eta\xi = 0$

et, par suite : $\eta=\varphi u^4 \qquad \xi=\psi u^4$

$$\gamma^\lambda=\varphi(s)u^\lambda$$

$$\lambda=x,y,z,t$$

d'où, en fin de compte :

$$\frac{d\gamma}{ds}=\psi(s)u^\lambda$$

En multipliant par u_λ et en contractant, on obtient : $\frac{d\gamma^\lambda}{ds}u_\lambda=\psi(s)u^\lambda u_\lambda=-\psi(s)$

Comme : $\frac{d\gamma^\lambda}{ds}u_\lambda=-\gamma^\lambda\gamma_\lambda$

On en déduit : $\gamma^\lambda\gamma_\lambda=\psi(s)$

Et, par suite :

$$\frac{d\gamma^\lambda}{ds}-u^\lambda(\gamma^\mu\gamma_\mu)=0$$

Cette équation, qui décrit le mouvement rectiligne uniformément accéléré relativiste, est due à Paoli. Elle s'écrit, de façon explicite :

$$\frac{d^2u^\lambda}{ds^2}-u^\lambda\left(\frac{du^\mu}{ds}\frac{du_\mu}{ds}\right)=0$$

ou, puisque :

$$\frac{du^\mu}{ds}\frac{du_\mu}{ds}=\gamma^\mu\gamma_\mu=a^2=Cte$$

$$\frac{d^2u^\lambda}{ds^2}-a^2u^\lambda=0$$

La solution générale s'écrit :

$$u^\lambda=\alpha^\lambda ch(as)+\beta^\lambda sh(as)$$

Précisons que les symboles ch et sh représentent, respectivement, le cosinus et le sinus hyperboliques, tandis que α est un vecteur unitaire du genre temps et, β, un vecteur unitaire du genre espace, ces deux vecteurs étant perpendiculaires soit :

$$\eta_{\lambda\mu}\alpha^\lambda\alpha^\mu=-1 \qquad \eta_{\lambda\mu}\beta^\lambda\beta^\mu=1 \qquad \eta_{\lambda\mu}\alpha^\lambda\beta^\mu=0 \qquad \alpha^\lambda=u_0^\lambda$$

$$\vec{\alpha}=\frac{\vec{v}_0}{\sqrt{c^2-v_0^2}} \qquad \alpha^4=\frac{1}{\sqrt{c^2-v_0^2}} \qquad \vec{\beta}=\pm\frac{c}{v_0}\vec{\alpha} \qquad \beta^4=\pm\frac{v_0}{c}\alpha^4$$

Ces relations proviennent de ce que, u étant un quadri-vecteur du genre temps, sa longueur est imaginaire, de sorte que :

$$\eta_{\lambda\mu}u^\lambda u^\mu=\eta_{\lambda\mu}(\alpha^\lambda ch(as)+\beta^\lambda sh(as))(\alpha^\mu ch(as)+\beta^\mu sh(as))=\eta_{\lambda\mu}(\alpha^\lambda\alpha^\mu ch(as)^2+\beta^\lambda\beta^\mu sh(as)^2+2\alpha^\lambda\beta^\mu ch(as)sh(as))=-1$$

comme $\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}}$, on peut écrire, successivement :

$$\frac{du^i}{ds}=\frac{du^i}{dt}\frac{dt}{ds}=\frac{du^i}{dt}\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}}$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{v^i}{\sqrt{c^2-v^2}}\right)\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}} \qquad i=x,y,z$$

$$=\left[\dot{v}^i\sqrt{c^2-v^2}+\frac{\dot{v}^jv_jv^i}{\sqrt{c^2-v^2}}\right]\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}(c^2-v^2)} \qquad \text{car} \qquad \frac{v_j}{\sqrt{c^2-v^2}}=u_j$$

$$\text{avec} \qquad \dot{v}^i=\frac{dv^i}{dt}$$

On a, d'autre part :

$$\gamma^4=\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}}\right)=\frac{\frac{dv^j}{ds}v_j}{\sqrt{c^2-v^2}(c^2-v^2)}=\frac{\dot{v}^ju_j}{\sqrt{c^2-v^2}(c^2-v^2)}$$

On en déduit, successivement :

$$\gamma^\lambda\gamma_\lambda=\frac{1}{(c^2-v^2)^2}\left[(\dot{v}^i+\dot{v}^j u_j u^i)^2-\frac{c^2(\dot{v}^j u_j)^2}{c^2-v^2}\right]$$
$$=\frac{1}{(c^2-v^2)^2}\left[\dot{v}^i\dot{v}_i+2(\dot{v}^j u_j)^2+\frac{v^2}{c^2-v^2}(\dot{v}^j u_j)^2-\frac{c^2(\dot{v}^j u_j)^2}{c^2-v^2}\right]$$
$$=\frac{1}{(c^2-v^2)^2}\left[\dot{v}^i\dot{v}_i+(\dot{v}^j u_j)^2\right]$$

Tant que : $v<<c$, on a : $a^2=\gamma^\lambda\gamma_\lambda=\gamma^2\cong\frac{1}{c^4}\left|\frac{dv^i}{dt}\right|^2$ $\quad ds\cong cdt \quad s\cong ct$

Rappelons, en outre, que :

$$sh(as)=as+\frac{(as)^3}{3!}+\frac{(as)^5}{5!}+....$$

$$ch(as)=1+\frac{(as)^2}{2!}+\frac{(as)^4}{4!}+....$$

de sorte que, pour $as=\frac{\dot{v}_0 t}{c}<<1$, on a :

$$u^\lambda\cong\alpha^\lambda+\beta^\lambda as$$

soit :

$$\frac{v^i(t)}{c}=\frac{v_0^i}{c}+\frac{\dot{v}_0^i t}{c}$$

ce qui correspond bien à un mouvement rectiligne uniformément accéléré classique. On notera que :

$$u=\frac{v}{\sqrt{c^2-v^2}}=\alpha ch(as)+\beta sh(as)$$

d'où l'on tire :

$$\frac{v^2}{c^2-v^2}=(\alpha ch(as)+\beta sh(as))^2$$

et, par suite :

$$v^2=\frac{c^2(\alpha ch(as)+\beta sh(as))^2}{1+(\alpha ch(as)+\beta sh(as))^2}$$

expression qui tend vers c^2 quand s devient infini. Ainsi, comme il se doit, la vitesse de la lumière n'est atteinte qu'au bout d'un temps d'accélération infini, quelque soit la vitesse initiale et l'accélération. Dans le cas où la vitesse initiale est nulle, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\frac{\vec{v}}{\sqrt{c^2-v^2}}=\vec{b}sh(as)$$

$$\frac{1}{\sqrt{c^2-v^2}}=\frac{1}{c}ch(as)$$

On en déduit :

$$\frac{1}{c}ch(as)\vec{v}.\vec{b}=\vec{b}^2 sh(as)=sh(as)$$

d'où :

$$\frac{v}{c}=th(as)$$

il en résulte :

$$\frac{dv}{dt}=\sqrt{c^2-v^2}\frac{dv}{ds}=ca\frac{1}{ch(as)^2}\sqrt{c^2-v^2}$$

pour s = 0, cela donne :

$$a=\frac{\dot{v}_0}{c^2}$$

En inversant la relation ci-dessus en tangente hyperbolique, on obtient :

$$as=\frac{\dot{v}_0\tau}{c}=\frac{1}{2}Log(\frac{c+v}{c-v})$$

Cette expression change seulement de signe, mais garde la même valeur, lorsque l'on échange v et –v. Le vaisseau mettra donc le même temps pour atteindre une vitesse donnée , en partant de zéro, ou pour freiner jusqu'à l'immobilité en partant de la vitesse précédemment acquise. Il suffit, dés lors, de se borner au calcul correspondant à une vitesse initiale nulle. En intégrant, par rapport à τ, les équations du mouvement, on obtient :

$$\vec{x}=\vec{b}\frac{c^2}{\dot{v}_0}\mathrm{ch}\left(\frac{\dot{v}_0\tau}{c}\right)-\vec{b}\frac{c^2}{\dot{v}_0}$$

$$t=\frac{c}{\dot{v}_0}\mathrm{sh}\left(\frac{\dot{v}_0\tau}{c}\right)$$

(car d t= $c d\tau/(c^2-v^2)^{1/2}$ = ch(as)).
La constante d'intégration correspond à un départ de l'origine des coordonnées, ce qui ne limite en aucune façon la généralité. On déduit, de ces relations (en multipliant le vecteur x par le vecteur b) :

$$\frac{\dot{v}_0}{c^2}x+1=\mathrm{ch}\left(\frac{\dot{v}_0\tau}{c}\right)$$

d'où l'on tire :

$$t=\sqrt{\frac{x^2}{c^2}+2\frac{x}{\dot{v}_0}}$$

$$\tau=\frac{c}{\dot{v}_0}\mathrm{Log}\left(1+\frac{\dot{v}_0}{c^2}x+\sqrt{\frac{x^2\dot{v}_0^{\,2}}{c^4}+2\frac{x\dot{v}_0}{c^2}}\right)$$

Ces expressions montrent que le temps t, mesuré aux horloges fixes, nécessaire au vaisseau pour parcourir une distance x en partant avec une vitesse nulle, demeure voisin de la valeur classique tant que x reste petit devant la distance parcourue par la lumière dans l'unité de temps mais qu'il tend asymptotiquement vers la valeur x/c quand la distance augmente indéfiniment, quelque soit, par ailleurs, la valeur de l'accélération. Le temps propre τ, mesuré aux horloges du vaisseau en accélération uniforme, varie, en gros, comme le logarithme népérien de $(dv/dt)x/c^2$, multiplié par c/(dv/dt).
On notera que, d'après les calculs effectués ci-dessus, au bas de la page 4, l'accélération, dans le référentiel des étoiles, du vaisseau supposé se déplacer d'un mouvement uniformément accéléré relativiste, n'est en aucune façon uniforme mais diminue constamment et tend vers zéro lorsque la vitesse du vaisseau tend vers celle de la lumière.