APPENDICE 2 Approximation non relativiste

A2.1) Introduction

Tant que la vitesse du vaisseau et la vitesse d'éjection du propergol sont nettement inférieures à celle de la lumière (pratiquement, pour des valeurs inférieures au 5eme de la vitesse de la lumière), il est correcte d'utiliser les approximations non relativistes pour les différentes quantités introduites. Ces approximations se déduisent, des expressions relativistes, en faisant tendre la vitesse de la lumière, qui y figure explicitement, vers l'infini. Ce faisant, il faut simplement prendre garde de ce que, si une grandeur s'annule lorsque l'on fait tendre la vitesse de la lumière vers l'infini, il y a lieu de poursuivre les développements au delà du premier ordre pour obtenir les limites non relativistes.

A2.2) Èquations du mouvement

Les équations du mouvement, dans le référentiel lié au vaisseau, deviennent :

- masse matérielle éjectée par unité de temps :

$$\dot{m}(\tau)-\frac{w}{c^2}\rightarrow\dot{m}(t)$$

- impulsion emportée par la masse éjectée :

$$(\dot{m}(\tau)-\frac{w}{c^2})\frac{V(\tau)}{\sqrt{1-\frac{V^2(\tau)}{c^2}}}\rightarrow\dot{m}(t)V(t)$$

- énergie emportée par la masse éjectée :

$$(\dot{m}(\tau)-\frac{w}{c^2})\frac{-c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2(\tau)}{c^2}}}\rightarrow\frac{1}{2}\dot{m}(t)V(t)^2$$

- impulsion emportée par la masse d'appui externe :

$$p\frac{(v+\upsilon)}{\sqrt{1-\frac{(v+\upsilon)^2}{c^2}}}-p\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cong p\frac{\upsilon}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+p\frac{\frac{v\upsilon}{c^2}}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\rightarrow p\upsilon$$

- énergie emportée par la masse d'appui externe

$$p\frac{-c^2}{\sqrt{1-\frac{(v+\upsilon)^2}{c^2}}}+p\frac{c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cong -p\frac{v\upsilon}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\rightarrow\frac{1}{2}p(v+\upsilon)^2-\frac{1}{2}v^2\cong pv\upsilon$$

- conservation de l'impulsion et de l'énergie

$$(\dot{m}(\tau)-\frac{w}{c^2})\frac{V}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}+p\frac{\upsilon}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+p\frac{\frac{v\upsilon}{c^2}}{\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})^3}}=\frac{(M_0-m(\tau))\dot{v}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\rightarrow(M_0-m(t))\dot{v}(t)=\dot{m}(t)V(t)+p\upsilon$$

$$(\dot{m}(\tau)-\frac{w}{c^2})\frac{-c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}-p\frac{v\upsilon}{\sqrt{(1-\frac{v^2}{c^2})^3}}=-\dot{m}(\tau)c^2\rightarrow\frac{1}{2}\dot{m}(t)V(t)^2+pv\upsilon=w$$

A2.3) Formulation du problème d'extremum

En négligeant la masse d'appuie externe, l'expression de la différentielle du temps écoulé, en fonction de la différentielle de la masse de propergol consommé, devient :

$$d\tau=\frac{c^2}{w}(1-\sqrt{1-(M_0-m)^2(\frac{du}{dm})^2\frac{1}{c^2+u^2}})dm\rightarrow dt=\frac{(M_0-m)^2v'^2}{2w}dm$$

avec :

$$v'=\frac{dv}{dm}$$

La condition d'extremum devient :

$$\delta\int\left[\frac{c^2}{w}(1-\sqrt{1-(M_0-m)^2(\frac{du}{dm})^2\frac{1}{c^2+u^2}})\right]dm=0\rightarrow\delta\int\left[\frac{(M_0-m)^2v'^2}{2w}\right]dm=0$$

APPENDICE 2 Approximation non relativiste

L'équation des variations et l'équation d'Euler deviennent, respectivement :

$$\delta\tau=\frac{c^2}{w}\int\left\{-\frac{(M_0-m)^2(\frac{du}{dm})^2\frac{2u}{(c^2+u^2)^2}}{2\sqrt{1-(M_0-m)^2(\frac{du}{dm})^2\frac{1}{c^2+u^2}}}\delta u+\frac{(M_0-m)^2 2\frac{du}{dm}\frac{1}{c^2+u^2}}{2\sqrt{1-(M_0-m)^2(\frac{du}{dm})^2\frac{1}{c^2+u^2}}}\delta u'\right\}dm\rightarrow\delta t=\int\frac{(M_0-m)^2v'}{w}\delta v'dm$$

$$\frac{(M_0-m)^2(\frac{du}{dm})^2\frac{2u}{(c^2+u^2)^2}}{2\sqrt{1-(M_0-m)^2(\frac{du}{dm})^2\frac{1}{c^2+u^2}}}+\frac{d}{dm}\left[\frac{(M_0-m)^2 2\frac{du}{dm}\frac{1}{c^2+u^2}}{2\sqrt{1-(M_0-m)^2(\frac{du}{dm})^2\frac{1}{c^2+u^2}}}\right]=0\rightarrow\frac{d}{dm}\left[\frac{(M_0-m)^2v'}{w}\right]=0$$

A2.4) Solution du problème d'extremum

La solution de l'équation d'Euler devient :

$$\frac{\sqrt{c^2+u^2}(M_0-m)^2\frac{du}{dm}\frac{u}{c^2+u^2}}{\sqrt{1-(M_0-m)^2(\frac{du}{dm})^2\frac{1}{c^2+u^2}}}=a\rightarrow(M_0-m)^2\frac{dv}{dm}=ac$$

L'expression de la constante a, en fonction des divers paramètres concernés, devient :

$$a=M_0A=(1-\alpha)\frac{V_{Fin}}{\sqrt{c^2-V_{Fin}{}^2}}M_0\rightarrow a=M_0A=(1-\alpha)\frac{V_{Fin}}{c}M_0$$

L'expression du temps, en fonction de la masse de propergol consommée, devient :

$$\frac{w}{c^2}\tau=m+\sqrt{(M_0-m)^2+a^2}-\sqrt{M_0{}^2+a^2}\rightarrow t=\frac{c^2}{w}\left[\ m+(M_0-m)+\frac{1}{2}\frac{a^2}{(M_0-m)}+...-M_0-\frac{1}{2}\frac{a^2}{M_0}+...\ \right]=\frac{(ca)^2}{2w}\frac{m}{M_0(M_0-m)}$$

En substituant la valeur limite de la constante a indiquée ci-dessus, cela devient :

$$t=\frac{(1-\alpha)^2V_{Fin}{}^2K}{2(\eta-\alpha)}\frac{m}{(M_0-m)}$$

La valeur limite de la constante B intervenant dans l'expression de la vitesse du vaisseau devient :

$$B=\frac{c+v_0}{c-v_0}\left[\frac{A-\sqrt{A^2+1}+1}{A+\sqrt{A^2+1}-1}\right]^2\rightarrow\frac{1+\frac{v_0}{c}}{1-\frac{v_0}{c}}\left[\frac{A-1-\frac{A^2}{2}+1+...}{A+1+\frac{A^2}{2}-1+...}\right]\cong(1+\frac{v_0}{c})^2\left[\frac{A}{A}\right]=(1+\frac{v_0}{c})^2$$

de sorte que la forme limite de l'expression reliant la vitesse du vaisseau au temps devient :

$$\frac{c+v}{c-v}=B\left[\frac{A+\Theta}{A-\Theta}\right]^2\rightarrow\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}=\frac{1+\frac{v_0}{c}}{1-\frac{v_0}{c}}\left[\frac{A+\Theta}{A-\Theta}\right]^2\ \text{soit, à la limite : }\ (1+\frac{v}{c})^2=(1+\frac{v_0}{c})^2\left[\frac{A+\Theta}{A-\Theta}\right]^2$$

d'où :

$$(1+\frac{v}{c})=(1+\frac{v_0}{c})\left[\frac{A+\Theta}{A-\Theta}\right]$$

et, par suite :

$$(1+\frac{v}{c})=(1+\frac{v_0}{c})\left[\frac{\frac{(\eta-\alpha)\tau}{Kc^2}+A+1+\frac{1}{2}A^2-1}{-\frac{(\eta-\alpha)\tau}{Kc^2}+A-1-\frac{1}{2}A^2+1}\right]\cong(1+\frac{v_0}{c})\left[\frac{\frac{(\eta-\alpha)\tau}{Kc^2}+A}{A-\frac{(\eta-\alpha)\tau}{Kc^2}}\right]\cong(1+\frac{v_0}{c})\left[\frac{(\eta-\alpha)\tau}{Kc^2}+A\right]\left[\frac{1}{A}+\frac{\frac{(\eta-\alpha)\tau}{Kc^2}}{A^2}\right]\cong(1+\frac{v_0}{c})\left[\frac{2(\eta-\alpha)\tau}{Kc^2A}+1\right]$$

d'où, enfin :

$$v=\frac{2(\eta-\alpha)t}{KcA}+v_0=\frac{2(\eta-\alpha)}{K(1-\alpha)V_{Fin}}t+v_0$$

On voit, ainsi, que le mouvement optimale, à la limite non relativiste, devient un mouvement uniformément accéléré. On note que la valeur de l'accélération, donnée par :

$$\gamma=\frac{2(\eta-\alpha)}{K(1-\alpha)V_{Fin}}$$

est d'autant plus petite que la vitesse terminale d'éjection du propergol est choisie plus élevée.

APPENDICE 2 Approximation non relativiste

La durée de la phase d'accélération devient :

$$\tau_{Fin}=\frac{Kc^2}{(\eta-\alpha)}\left[\alpha+\sqrt{(1-\alpha)^2+A^2}-\sqrt{1+A^2}\right]\rightarrow t_{Fin}=\frac{{V_{Fin}}^2K\alpha(1-\alpha)}{2(\eta-\alpha)}$$