

MATH0062-1 - Éléments du Calcul des Probabilités

Projet 1

Généralités

Le premier travail du cours d'*Éléments du Calcul des Probabilités* portera sur le problème des anniversaires, connu aussi sous le nom de *paradoxe des anniversaires*, qui fut formulé pour la première fois par l'ingénieur autrichien Richard von Mises. Ce travail a pour but de familiariser les étudiants avec la notion d'arbres de probabilités.

Ce travail devra être réalisé individuellement grâce à MATLAB. Chaque étudiant devra, en outre, rédiger un rapport répondant aux questions posées dans l'énoncé. Le nombre de pages conseillé pour le rapport est de 2. Les fichiers MATLAB, de même que le rapport, devront être rendus, au plus tard, pour le 02/03/2012 23 :59 via la page <http://www.montefiore.ulg.ac.be/~ama/courses/math0062-1/projet1.php> sous forme d'archive .zip.




Notez que, au delà de la deadline, il ne sera plus possible de soumettre les projets.

Présentation du problème

Le problème des anniversaires consiste à déterminer la probabilité qu'au moins deux personnes, dans un ensemble de N , aient leur anniversaire le même jour. On supposera, pour des raisons de simplicité, que toutes les années sont non-bissextiles et que personne n'est né le 29 février.

Questions

1. On demande de construire, pour le problème des anniversaires, un arbre de probabilités naïf, similaire à celui du Monty Hall, énumérant toutes les possibilités. On choisira dans un premier temps $N = 2$.

- (a)  Construisez un tel arbre dans MATLAB¹.
 - (b)  En utilisant l'arbre que vous venez de créer, calculez la probabilité que deux personnes soient nées le même jour.
 - (c) Évaluez, au moyen des fonctions `tic` et `toc`, le temps que prendra MATLAB pour créer cet arbre.
 - (d) En faisant l'hypothèse que le temps nécessaire à la création de l'arbre est proportionnel au nombre de ses feuilles, estimez le temps de création d'un arbre naïf si on souhaite résoudre le problème des anniversaires pour $N = 3$, $N = 4$ et $N = 5$. Que pouvez-vous en déduire quant à l'utilisation pratique de cette approche ?
2. Imaginez une simplification de l'arbre permettant de calculer efficacement la probabilité qu'au moins deux personnes dans un ensemble de N soient nées le même jour.
- (a)  Détaillez le raisonnement qui vous a conduit à construire l'arbre simplifié et implémentez une fonction permettant de créer cet arbre dans Matlab. Donnez un exemple de cet arbre pour $N = 3$.
 - (b) Déterminez la probabilité recherchée pour $N = 2$, $N = 3$, $N = 4$, $N = 5$, $N = 20$, $N = 30$, $N = 40$, $N = 50$, $N = 60$ et $N = 80$. Mesurez le temps nécessaire à la création de l'arbre dans chacun de ces cas et comparez-le aux temps estimés à la question 1d.
 - (c) Comment pouvez-vous expliquer intuitivement les probabilités obtenues ?

Implémentation avec MATLAB

Afin de construire et de manipuler les arbres, vous pouvez utiliser la classe `TreeNode` ainsi que les fonctions `createTree` et `computeProbability` fournies avec cet énoncé. Ces fonctions sont documentées et un exemple de leur utilisation vous est fourni dans `treeExample.m`. Ces fonctions ont été testées et fonctionnent sur les machines ms800 de l'Institut Montefiore. Si vous n'arrivez pas à les exécuter sur votre ordinateur personnel, vous devrez donc effectuer votre travail sur les ordinateurs de l'Institut. Pour obtenir un compte, visitez la page <http://www.student.montefiore.ulg.ac.be/accounts.php>.

1. Ceci peut prendre quelques minutes.