## Devoir de modélisation : Résolution de l'équation de la chaleur

L'équation de la chaleur à travers un mur s'écrit classiquement :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

où $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$.

A cette équation, il convient de rajouter des conditions aux limites appropriées.

$$T(x=0) = T_0 \text{ et } T(x=L) = T_L,$$

et une condition initiale $T(t=0) = T_i$ .

## Première partie : Différences finies

On a vu en cours comment résoudre l'équation de la chaleur en une dimension par la méthode des différences finies. Vous utiliserez dans cette partie le programme donné.

Etant donné que la température en $x = 0$ et $x = L$ ne varie pas, il n'est pas nécessaire de la recalculer. Ainsi, dans le programme que vous avez, le vecteur température est de dimension (N-2). $Tn(1)$ contient la température en $x = dx$, et $Tn(N-2)$ contient la température en $x = L - dx$.

On prend comme paramètres physiques (les données sont en unité SI sauf la température en °C):

| L | ρ | Cp | λ | h | $T_0$ | $T_L$ | τ | $T_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,2 | 2200 | 880 | 1,15 | 10 | 20 | 60 | | 20 |

1.

Les paramètres de calcul sont N=51 et dt = 360s. La condition initiale est T(x,t=0)=20 °C.

Affichez en colonne J x, et en colonne K la température en fonction de x au temps t = 360 s. Vous devrez rajouter la température en $x = 0$ et en $x = L$.

Affichez en colonne L la température en fonction de x au temps 1 800 s

Affichez en colonne M la température en fonction de x au temps 7 200 s

Affichez en colonne N la température en fonction de x au temps 36 000 s

2.

Les paramètres de calcul restent les même (tau = 36 000 s).

Affichez en colonne P le temps et en colonne Q la température en x = 0.04 pour les différents pas de calcul, en colonne R la température au milieu du mur et en colonne S la température en x=0.16.

Tracez sur un même graphique l'évolution temporelle de la température en chacun de ces points.

## Deuxième partie : Série de Fourier

Joseph Fourier a imaginé une solution élégante pour résoudre l'équation de la chaleur.
Dans un premier temps, il sépare la température en deux : d'un coté la solution permanente, et de l'autre une solution dynamique :

$$\mathrm{T(x,t)} = \mathrm{T_0} + \frac{\mathrm{T_L} - \mathrm{T_0}}{\mathrm{L}} x + T_d(x,t)$$

De cette manière, les conditions aux limites de $T_d(0,t) = T_d(L,t) = 0$.

La deuxième étape est plus complexe à comprendre :

1. il fait une séparation de variables $T_d(x,t) = \sum_{i=1}^{N} g_i(x) \times f_i(t)$,
2. il pose $f_i(t) = e^{\lambda_i t}$
3. il recherche $g_i(x) = A_i \sin(\frac{i\pi x}{L})$. On vérifie que $g_i(x)$ satisfait bien aux conditions aux limites.
4. En injectant cette solution dans l'équation de la chaleur, on trouve :

$$\lambda_i = -\alpha \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2$$

Pour trouver les $A_i$, il faut passer par la condition initiale

$$T(x,0) = \sum_{i=1}^{N} A_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) + \mathrm{T_0} + \frac{\mathrm{T_L} - \mathrm{T_0}}{\mathrm{L}} \mathrm{x} = \mathrm{T_i}$$

donc

$$\sum_{i=1}^{N} A_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) = (\mathrm{T_i} - \mathrm{T_0}) - (\mathrm{T_L} - \mathrm{T_0}) \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}$$

En multipliant cette équation par $\sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right)$ et en intégrant entre 0 et L :

$$\int_0^L \sum_{i=1}^{N} A_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \mathrm{dx} = \int_0^{\mathrm{L}} \left((\mathrm{T_i} - \mathrm{T_0}) - (\mathrm{T_L} - \mathrm{T_0}) \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{L}}\right) \sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right)$$

Soit

$$A_i = -\frac{2}{i\pi} \left(T_i(\cos(i\pi) - 1) - T_L \cos(i\pi) + T_0\right)$$

Au final :

$$T(x,t) = \left[\sum_{i=1}^{N_c} A_i e^{-\alpha\left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 t}\right] + \mathrm{T_0} + \frac{\mathrm{T_L} - \mathrm{T_0}}{\mathrm{L}} x$$

C'est cette dernière équation que vous devrez programmer.

**Programmation :**

1. La première partie de l'étude se fait à temps fixé. Vous représenterez le profil de température en 51 points choisis, notés $x_i$. On souhaite que ces points soient repartis uniformément entre 0 et 1 de sorte que $x_0 = 0$ et $x_N = L$. Les valeurs de T aux points $x_i$ seront stockées dans un tableau T(N). Les propriétés physiques ainsi que les conditions aux limites et la condition initiale sont les mêmes qu'à la partie I.

2. A l'aide de deux boucles imbriquées (l'une sur les i, l'autre sur les x), écrivez un programme permettant de déterminer la température en tout point à un instant t. Il parait évident que nous ne pouvons pas sommer jusqu'à l'infini. Nous allons donc couper la somme à une certaine valeur $N_C$, appelée fréquence de coupure. On fixe t = 360 s.

- Tracez sur la même courbe T(x) (x en colonne J) pour $N_C = 1$ (colonne K), $N_C = 2$ (colonne L), $N_C = 10$ (colonne) M. Que remarquez vous ?
- Refaites les mêmes questions pour t = 3.6s (colonnes O,P,Q), t = 36s (colonnes S,T,U) et t= 3600 s (colonnes W,X,Y). Que remarquez vous ?

3. La seconde partie de l'étude se fait à x fixé. On choisit x = 0.04. Le tableau T(N) contiendra donc les valeurs de la température aux temps $t_i$ définis par $t_i=(i-1)*dt$.

- Tracez la courbe T(t) (t en colonne AA), pour $0<t<36\ 000$ s , pour $N_C = 1$ (colonne AB), N = 2 (colonne AC), $N_C = 10$ (colonne AD). Que remarquez vous ?

4. Tracer sur une même courbe T(0.04,t) obtenu avec $N_C=10$ (colonne AF) et avec la méthode des différences finies (colonne AG).

5. Tracer sur une même courbe T(0.16,t) obtenu avec $N_C=10$ (colonne AI) et avec la méthode des différences finies (colonne AJ).

## Troisième partie : Utilisation du solveur

Imaginons le même mur, mais soumis à des conditions aux limites de Fourier

$k\frac{\partial T}{\partial x} = -h(T_{ext} - T)$ en x=0

$k\frac{\partial T}{\partial x} = h(T_{ext} - T)$ en x=L

Lorsque les conditions aux limites changent, les fonctions spatiales doivent être modifiées afin qu'elles satisfassent les nouvelles conditions aux limites.

On suppose alors

$$g_i(x) = Acos(\omega_i x + \varphi)$$
$$f_i(t) = e^{\lambda_i t}$$

1. En remplaçant ces expressions dans l'équation de la chaleur, trouver une relation entre $\lambda_i, \omega_i, \rho, c_p$ et $k$.

2. Pour trouver $\omega_i$ et $\varphi$ , on se sert des conditions aux limites :

$k\frac{\partial V_i}{\partial x} = hV_i$ en x=0

$k\frac{\partial V_i}{\partial x} = -hV_i$ en x=L

a) Montrer que la condition aux limites en x=0 impose :

$$\tan\varphi = -\frac{h}{k\omega_i}$$

b) Montrer que la condition aux limites en x=L impose :

$$\tan(\omega_i L + \varphi) = \frac{h}{k\omega_i}$$

En déduire que

$$\tan\left(\omega_i L - \arctan\left(\frac{h}{k\omega_i}\right)\right) = \frac{h}{k\omega_i}$$

3. Grâce à la relation trouvée en 2.b) et à l'aide d'un programme vba utilisant le solveur, calculez les 50 premières valeurs de $\omega_i$ , puis de $\lambda_i$ grâce à la relation trouvée en 1. On prendra comme condition initiale pour $\omega_0 = 1$, puis $\omega_{i+1} = \omega_i + \frac{\pi}{L}$