

NOTE SUR LE CALCUL DES PROPRIÉTÉS ÉLASTIQUES DES SUPPORTS EN CAOUTCHOUC ADHÉRENT

Par Y. ROCARD.

Sommaire. — Dans ce travail, on détermine les propriétés élastiques des ressorts constitués par du caoutchouc en adhésion sur deux armatures métalliques parallèles.

Introduction. — Depuis quelque temps, on trouve dans le commerce, sous la marque Dynaflex, des organes destinés à la suspension élastique des moteurs et machines, constitués par une masse de caoutchouc en adhésion sur des armatures métalliques : l'une de ces armatures est fixée au bâti, l'autre au corps suspendu. Cette suspension a même apporté récemment des améliorations inespérées dans la lutte contre les vibrations des cellules d'avions. Considérons par exemple un cylindre de caoutchouc de rayon r de hauteur h , fixé par adhérence à deux armatures métalliques planes : le mouvement d'armature supérieure par rapport à l'armature inférieure peut être :

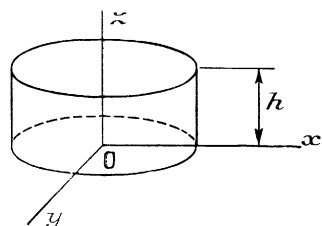


Fig. 1.

1. Une translation suivant ox ou oy , ou une rotation suivant oz ;

2. Ou bien une translation suivant oz et une rotation suivant ox , oy .

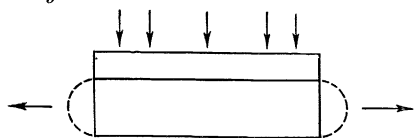


Fig. 2.

Dans les mouvements d'espèce (1), la grandeur de la réaction du caoutchouc peut se prévoir par des calculs élémentaires, tandis que dans les mouvements d'espèce (2) il n'en est pas de même ; il faut rappeler en effet que le caoutchouc est un corps incompressible, et qu'il ne se déforme qu'en ne changeant pas de volume (du moins à un degré élevé d'approximation). Il en résulte que dans un écrasement suivant oz par exemple, la diminution de hauteur h du cylindre de caoutchouc n'est possible que par l'échappement latéral du caoutchouc à la périphérie ; l'adhérence maintenant par ailleurs le caoutchouc sur les armatures, celui-ci travaille donc au cisaillement et il en résulte une réaction s'opposant à l'écrasement et constituant l'élasticité du support dans le sens oz .

Dans les mouvements d'espèce (1) au contraire, la sollicitation ne peut créer qu'une déformation de cisaillement même pour un corps compressible, de sorte que les formules élémentaires habituelles rendent compte immédiatement de la raideur du support.

Nous voudrions, dans cette note, fournir le moyen de

calculer, au moins dans les cas simples, les réactions élastiques dans les mouvements d'espèce (2) définis plus haut, en introduisant l'hypothèse explicite de l'incompressibilité du caoutchouc.

Cylindre plein. — Prenons les axes comme l'indique la figure 1, et traitons d'abord le cas du cylindre plein comprimé suivant oz .

Les déplacements suivant ox , oy , oz seront u , v , w , respectivement. Nous introduirons aussi la variable r , le déplacement selon r étant ρ . Le cylindre a initialement une hauteur h , la compression consiste à réduire h de Δh , et nous voulons calculer quelle force le caoutchouc oppose à cette compression.

Le matériau étant incompressible, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

ou, plus simplement ici

$$2 \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

on a en outre les conditions aux limites suivantes

$$w = \pm \frac{\Delta h}{2} \quad \text{pour} \quad z = \pm \frac{h}{2} \quad (2)$$

exprimant la compression,

$$\rho = 0 \quad \text{pour} \quad z = \pm \frac{h}{2}$$

exprimant l'adhérence du caoutchouc au métal.

Enfin nous aurons à considérer l'énergie de déformation, dont l'expression générale pour le volume $2\pi r dr dz$ du corps supposé incompressible est :

$$G 2\pi r dr dz \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (3)$$

G étant le module d'élasticité au cisaillement.

Avec la symétrie cylindrique, ceci devient simplement :

$$G \left[6 \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 \right] 2\pi r dr dz \quad (4)$$

C'est la considération de l'énergie de déformation qui nous conduira le plus simplement à l'expression des réactions élastiques. Au cylindre représenté figure 2, appliquons en effet à chaque instant une force suivant oz équilibrant la réaction élastique : quand l'écrasement est Δh , cette force est F et le travail résultant de la sommation des forces sans cesse croissantes multipliées

par les déplacements infiniment petits est $F \frac{\Delta h}{2}$. Ce travail est nécessairement égal à l'énergie de déformation et l'on a :

$$F \frac{\Delta h}{2} = \iint G \left[6 \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^2 \right] 2\pi r dr dz. \quad (5)$$

Nous aurons donc la réaction élastique F quand nous saurons déterminer en tout point la déformation dans le caoutchouc.

En principe, la considération de l'énergie de déformation permettrait de déterminer les déformations elles-mêmes, en utilisant le principe d'après lequel elle doit être minimum par rapport à toutes les déformations virtuelles *respectant les conditions aux limites et la forme extérieure du corps déformé*. Mais en pratique, comme nous voulons précisément connaître cette forme extérieure après déformation, nous serons conduit à utiliser au maximum les limitations introduites par les conditions aux limites, pour déterminer la déformation, et il se trouve que la condition d'incompressibilité jointe aux conditions aux limites donne déjà des renseignements très approchés sur la déformation réalisée.

Ainsi on satisfait aux équations (1) et (2) en posant :

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \frac{3}{4} \frac{\Delta h}{h} r \\ w &= -\frac{3}{4} \Delta h \left(\frac{2z}{h} \right) + \frac{\Delta h}{4} \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

L'énergie de déformation, avec ces expressions, se calcule sans peine, et on trouve aussitôt d'après (5)

$$F = 2 G \pi r^2 \frac{\Delta h}{h} \left(\frac{9}{5} + \frac{3}{4} \frac{r^2}{h^2} \right). \quad (7)$$

Mais la solution représentée par les équations (6) n'est pas bien satisfaisante dans sa forme, et en tout cas elle n'est pas unique, on peut aussi bien adopter :

$$\left. \begin{aligned} w &= -\frac{\Delta h}{2} \sin \frac{\pi z}{h} \\ \rho &= \frac{\pi}{4} \frac{\Delta h}{h} r \cos \frac{\pi z}{h} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

expressions que satisfont aussi bien à (1) et (2). L'énergie de déformation ainsi calculée donne :

$$F = 2 G \pi r^2 \frac{\Delta h}{h} \left[\frac{3}{16} \pi^2 + \frac{\pi^2}{128} \frac{r^2}{h^2} \right] \quad (9)$$

Les coefficients numériques de cette formule sont un peu plus grands que ceux de la formule (7), $\left(\frac{3}{16} \pi^2 = 1,85 \text{ au lieu de } \frac{9}{5} = 1,8, \text{ et } \frac{\pi^2}{128} = 0,76 \text{ au lieu de } \frac{3}{4} = 0,75 \right)$ donc la solution (6) du point de vue de l'énergie de déformation minimum, devrait être préférée à la solution (8).

On remarquera en tout cas que ces deux solutions donnent en (7) et (9) des résultats numériques fort voi-

sins. Ils sont nécessairement forts voisins aussi de la solution exacte, et nous permettent donc déjà d'en discuter les propriétés : d'après ces formules, on voit que la dureté du ressort (coefficient de proportionnalité de F au déplacement Δh) est proportionnelle à la surface πr^2 , inversement proportionnelle à l'épaisseur h . De plus quand r est petit devant h (cylindre très allongé) le rayon ne joue que par la proportionnalité à la surface, mais quand r grandit, la matière située au centre éprouve de la difficulté à s'écouler vers la périphérie, et la force F croît plus vite que proportionnellement à la surface.

Tout ceci suggère une méthode pour la recherche d'une solution rigoureuse que nous allons maintenant donner :

Quelle que soit la fonction ρ de z et de r , il est permis de la développer en série ainsi :

$$\begin{aligned} \rho &= A_1 \cos \frac{\pi z}{h} + A_3 \cos \frac{3\pi z}{h} + \dots \\ &+ A_{2n+1} \cos \frac{(2n+1)\pi z}{h} + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Ainsi on satisfait à la condition $\rho = 0$ pour $z = \pm \frac{h}{2}$

A_1, A_3, A_{2n+1} sont des fonctions de r à déterminer.

La condition (2) entraîne alors à son tour pour W l'expression

$$W = -\sum \frac{2}{2n+1} \frac{h}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial r} A_{2n+1} \right] \sin (2n+1) \frac{\pi z}{h}. \quad (11)$$

Mais il faut que pour $z = \pm \frac{h}{2}$ on ait $w = \pm \frac{\Delta h}{2}$, d'où

$$\sum \frac{1}{2n+1} \left[\frac{\partial}{\partial r} A_{2n+1} \right] = \frac{\pi}{4} \frac{\Delta h}{h}. \quad (12)$$

A ce moment l'énergie potentielle W prend une forme que permet l'intégration immédiate par rapport à z dont le résultat est

$$\begin{aligned} W &= \int_0^2 G \left[6 \sum \left(\frac{\partial A_{2n+1}}{\partial r} \right)^2 \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{h^2} \sum (2n+1)^2 A_{2n+1}^2 \right] h \pi r dr. \end{aligned} \quad (13)$$

Pour des raisons d'homogénéité mécanique dans la déformation, il est évident que le déplacement ρ doit être en chaque point proportionnel à r . Ceci conduit à poser :

$$A_{2n+1} = a_{2n+1} r \quad (14)$$

W se calcule alors sans peine et on trouve après intégration (r étant le rayon extérieur)

$$W = 3 G \pi r^2 h \left[\sum (a_{2n+1})^2 + \frac{\pi^2 r^2}{24 h^2} \sum (2n+1)^2 a_{2n+1}^2 \right] \quad (15)$$

le problème consiste alors à choisir le coefficient a_{2n+1} de sorte que cette expression soit minimum, compte tenu de la condition (12) qui devient

$$\sum \frac{a_{2n+1}}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \frac{\Delta h}{h}. \quad (16)$$

On peut écrire (15) sous la forme suivante :

$$W = 3 G \pi r^2 h \sum [1 + (2n + 1)^2 H^2] a_{2n+1}^2 \quad (17)$$

en posant

$$H^2 = \frac{\pi^2 r^2}{24 h^2}.$$

La condition (15) nous permet de considérer a_1 par exemple, comme fonction de tous les autres coefficients. et on a ainsi :

$$\frac{\partial a_1}{\partial a_{2+1}} = - \frac{1}{2n + 1}$$

la condition W minimum s'écrira alors

$$\frac{\partial W}{\partial a_3} = 0 \quad \frac{\partial W}{\partial a_5} = 0 \quad \dots \quad \frac{\partial W}{\partial a_{2n+1}} = 0$$

une fois qu'on aura remplacé a_1 , par sa valeur en fonction des autres coefficients dans l'expression de W . Ceci donne les équations

$$[1 + (2n + 1)^2 H^2] a_{2n+1} - [1 + H^2] \frac{a_1}{2n + 1} = 0 \quad (18)$$

$n = 1, 2, \dots \infty$

qui exprime immédiatement a_{2n+1} en fonction de a_1 .

$$a_{2n+1} = \frac{a_1}{2n + 1} \frac{1 + H^2}{1 + (2n + 1)^2 H^2}.$$

On en tire :

$$\sum \frac{a_{2n+1}}{2n+1} = a_1 (1 + H^2) \sum \frac{1}{(2n + 1)^2 [1 + (2n + 1)^2 H^2]}$$

Or cette somme est égale à $\frac{\pi}{4} \frac{\Delta h}{h}$, d'où la valeur de a_1

$$a_1 = \frac{\pi}{4} \frac{\Delta h}{h} \frac{1}{(1 + H^2) \sum \frac{1}{(2n + 1)^2 [1 + (2n + 1)^2 H^2]}}$$

Il n'y a pas de difficultés à calculer l'expression de W qui se simplifie beaucoup et donne la solution correcte pour la dureté suivant oz :

$$F = 2 G \pi r^2 \frac{\Delta h}{h} \frac{3 \pi^2}{16} \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 [1+(2n+1)^2] \frac{\pi^2 r^2}{24 h^2}}} \quad (19)$$

Il est intéressant de comparer cette formule complète a la formule élémentaire (9) obtenue en réduisant la série des a_{m+1} à son premier terme a , les autres étant supposés nuls. Cette comparaison peut se faire aisément dans deux cas limites. Supposons d'abord $\frac{r^2}{h^2}$ petit. La formule donne F proportionnel à

$$\frac{3 \pi^2}{16} = 1,85$$

tandis que la formule (19) donne F proportionnel à

$$\frac{3 \pi^2}{16} \frac{1}{\sum \frac{1}{(2n + 1)^2}} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Supposons maintenant $\frac{r^2}{h^2}$ grand. On trouve aisément

$$F = 2 G \pi r^2 \frac{\Delta h}{h} \frac{3 \pi^2}{16} \frac{\frac{\pi^2 r^2}{24 h^2}}{\sum \frac{1}{(2n + 1)^4} - \frac{1}{24 h^2} \sum \frac{1}{(2n + 1)^6} \dots}$$

Ceci mène à :

$$F = 2 G \pi r^2 \frac{\Delta h}{h} \left[\frac{3}{4} \frac{r^2}{h^2} + \frac{18}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2n + 1)^6} - \dots \text{termes en } \frac{h^2}{r^2} \dots \right]$$

en utilisant la valeur connue de

$$\sum \frac{1}{(2n + 1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{et de} \quad \sum \frac{1}{(2n + 1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Numériquement ceci donne :

$$F = 2 G \pi r^2 \frac{\Delta h}{h} \left[1,82 + 0,75 \frac{r^2}{h^2} \right]$$

qui est presque rigoureusement identique aux formules (7) et (9). On remarquera toutefois que le coefficient 1,82 est un peu supérieur au coefficient 1,80 de la formule (7) ce qui tendrait finalement à faire préférer la formule (7), comme formule asymptotique lorsque r^2/h^2 est grand. En résumé les faits sont suffisamment représentés par une formule du type :

$$F = 2 G \pi r^2 \frac{\Delta h}{h} \left[\gamma \left(\frac{r}{h} \right) + 0,75 \frac{r^2}{h^2} \right] \quad (20)$$

γ étant une fonction lentement croissante partant de 1,50 pour $r/h = 0$ pour atteindre 1,80 pour r/h infini. Une formule empirique de ce type serait par exemple

$$F = 2 G \pi r^2 \frac{\Delta h}{h} \left[\frac{1,50 + 1,80 \frac{r^2}{h^2}}{1 + \frac{r^2}{h^2}} + 0,75 \frac{r^2}{h^2} \right]. \quad (21)$$

Il resterait alors à justifier mathématiquement l'opération que nous avons faite, en cherchant à rendre W minimum après avoir arbitrairement limité la forme des A_{m+1} en tant que fonctions de r . Ceci n'est certainement pas légitime en toute rigueur, mais en faisant l'hypothèse que ρ est proportionnel à r , et en exprimant correctement l'incompressibilité (nos formules (10) et (11) satisfont à (1), nous avons obtenu une estimation globale correcte du volume du caoutchouc sorti du cylindre par la compression, et quand nous varions seulement les coefficients numériques des termes qui figurent dans W , nous sommes sûrs en limitant ainsi la forme des variations de déplacements de respecter à très peu près la condition que la variation arbitraire considérée s'annule à la frontière du caoutchouc déformé d'où la certitude des résultats numériques corrects à une approximation assez élevée.

Rectangle allongé. — Traitons de même un problème plan en considérant un parallélepède de

caoutchouc, très long suivant oy , haut de h centimètres, large de 1 cm, long de 1 cm, avec deux armatures parallèles au plan de xy .

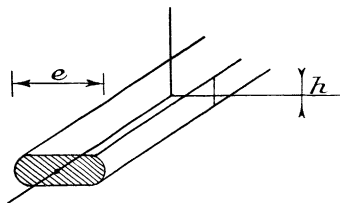


Fig. 3.

On trouve exactement par la même méthode que l'expression générale pour la force F qui s'oppose à un écrasement Δh est :

$$F = 2Gle \frac{\Delta h}{h} \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\sum \frac{1}{(2n+1)^2 [1 + (2n+1)^2] \frac{\pi^2 e^2}{48h^2}}} \quad (22)$$

Cette formule donne à la limite pour $e \rightarrow 0$:

$$F = 2Gle \frac{\Delta h}{h} \times 2 \quad (23)$$

et pour

$$e \rightarrow \infty \quad F = 2Gle \frac{\Delta h}{h} \left[\frac{96 \times 24}{\pi^6} \sum \frac{1}{(2n+1)^6} + \frac{1}{2} \frac{e^2}{h^2} \right] \quad (24)$$

Le coefficient $\frac{96 \times 24}{\pi^6} \times \sum \frac{1}{(2n+1)^6}$ vaut à peu près 2,44.

On peut rapprocher ceci de la formule qu'on obtient en choisissant une expression parabolique pour le déplacement u :

$$u = \left[1 - \left(\frac{2y}{h} \right)^2 \right] \frac{3}{2} r \frac{\Delta h}{h}$$

$$w = -\frac{3}{2} \frac{\Delta h}{h} z + \frac{r}{h^2} \left(\frac{\Delta h}{h} \right) z^3$$

ce qui conduit à

$$F = 2G \frac{\Delta h}{h} le \left[\frac{12}{5} + \frac{1}{2} \frac{e^2}{h^2} \right]$$

et également de la formule qu'on obtient en se contentant du premier terme du développement de u en série de Fourier :

$$u = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta h}{h} x \cos \frac{\pi z}{h}$$

$$w = -\frac{\Delta h}{2} \sin \frac{\pi z}{h}$$

ce qui conduit à :

$$F = 2G \frac{\Delta h}{h} le \left[\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^4}{192} \frac{e^2}{h^2} \right]$$

La comparaison des formules (23) (24) (25) (26) conduit à écrire comme expression très approchée de F :

$$F = 2Gle \frac{\Delta h}{h} \left[\frac{2 + 2,4 \frac{e^2}{h^2}}{1 + \frac{e^2}{h^2}} + \frac{1}{2} \frac{e^2}{h^2} \right] \quad (27)$$

Cylindre elliptique plein. — Prenons maintenant le cas d'un cylindre elliptique dont les deux faces planes constituent les armatures, l'équation de l'ellipse constituant la périmétrie étant :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Il n'y a pas de difficulté à former, comme pour le cylindre plein une solution générale où les déplacements $u v w$ sont donnés par des développements en série de Fourier, dont la condition w minimum détermine ensuite les coefficients, mais les sommations numériques sont très compliquées à effectuer. Nous nous contenterons de la comparaison de deux solutions élémentaires pour aboutir à une formule pratique.

1. Si l'on pose :

$$u = \cos \frac{\pi z}{h} \times \frac{\pi}{2} \frac{\Delta h}{h} \left(\frac{ab}{a+b} \right) \cdot \frac{x}{a}$$

$$v = \cos \frac{\pi z}{h} \times \frac{\pi}{2} \frac{\Delta h}{h} \left(\frac{ab}{a+b} \right) \cdot \frac{y}{b}$$

$$w = -\frac{\Delta h}{2} \sin \frac{\pi z}{h}$$

la condition d'incompressibilité et les conditions à la limite sont satisfaites. Le calcul de W avec intégration de $z = -\frac{h}{2}$ à $+\frac{h}{2}$

de $x = -a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$ à $+a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$

et de $y = -b$ à $y = +b$ donne :

$$F = 2G\pi ab \frac{\Delta h}{h} \left[\frac{\pi^2}{8} \left(1 + \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} \right) + \frac{\pi^4}{32h^3} \frac{a^2 b^2}{(a+b)^2} \right] \quad (28)$$

2. Si l'on pose :

$$u = \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \cdot \frac{3}{2} \frac{\Delta h}{h} \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{x}{a}$$

$$v = \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \cdot \frac{3}{2} \frac{\Delta h}{h} \frac{ab}{a+b} \cdot \frac{y}{b}$$

$$w = -\frac{3}{4} \Delta h \frac{2z}{h} + \frac{\Delta h}{4} \left(\frac{2z}{h} \right)^3$$

la condition d'incompressibilité et les conditions à la limite sont également satisfaites et le calcul de W donne :

$$F = 2G\pi ab \left[\frac{6}{5} \left(1 + \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} \right) + \frac{3a^2 b^2}{h^2 (a+b)^2} \right] \frac{\Delta h}{h} \quad (29)$$

Cette formule généralise la formule (7) et donne bien les mêmes résultats si on y fait $a = b = r$.

Or nous savons d'après les exemples qui précédent (cylindre plein, parallélépipède allongé) que si a et b deviennent petits devant h le coefficient $6/5$ doit être

réduit dans le rapport de 2,4 à 2 ou de 1,80 à 1,50 si on tient compte de la théorie rigoureuse (qui d'ailleurs peut se faire précisément dans ce cas). Ceci amène à écrire :

$$F = 2G\pi ab \left[\frac{1 + 1,2 \frac{ab}{h^2}}{1 + \frac{ab}{h^2}} \left(1 + \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} \right) + 3 \frac{a^2 b^2}{h^3 (a+b)^2} \right] \frac{\Delta h}{h}. \quad (30)$$

On remarquera que cette formule ne permet pas de passer au cas du parallépipède allongé en le faisant tendre par exemple vers l'infini, car les extrémités de l'ellipse interviennent toujours pour empêcher le problème de tendre vers le problème à deux dimensions déjà traité.

Cylindre creux. — Nous allons maintenant envisager le cas plus difficile du cylindre creux, où le caoutchouc affecte la forme d'une couronne entre deux armatures distantes de h , et comprises entre les rayons r_1 , r_2 . De même que dans le cas du cylindre plein, nous supposons ρ proportionnel à r , nous allons supposer maintenant une sorte d'homogénéité dans la déformation latérale, en supposant que le caoutchouc s'écarte latéralement d'une façon *symétrique* à partir d'un certain rayon r_3 et proportionnellement à $r - r_3$, le coefficient de proportionnalité étant le même pour

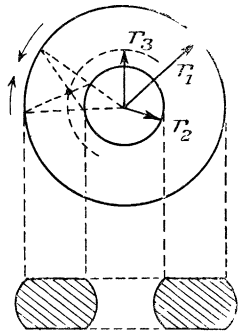


Fig. 4.

$r > r_3$ et pour $r < r_3$ (dans ce cas le caoutchouc s'échappe vers l'intérieur de la couronne), cette hypothèse oblige à choisir r_3 comme l'indique notre figure, soit :

$$r_3 = \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Il suffira pour ce qui va suivre de considérer pour les déplacements la solution approchée :

$$\left. \begin{aligned} w &= -\frac{\Delta h}{2} \sin \frac{\pi z}{h} \\ \rho &= \frac{\pi}{4} \frac{\Delta h}{h} \left(r - \frac{2r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) \cos \frac{\pi z}{h} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

On remarquera que la condition d'incompressibilité est toujours satisfaite, ainsi que les conditions aux limites.

Le calcul de W conduit alors à :

$$F = 2G\pi (r_1^2 - r_2^2) \frac{\Delta h}{h} \left[\frac{3\pi^2}{16} + \frac{\pi^4}{128h^2} \frac{3(r_1^2 + r_2^2)^2 - 10r_1 r_2 (r_1^2 + r_2^2) + 8r_1^2 r_2^2}{3(r_1 + r_2)^2} \right]. \quad (32)$$

La considération d'une solution plus complète nous aurait simplement amené à modifier les coefficients

numériques $\frac{\pi^4}{128}$ à remplacer par 0,75 et $\frac{3\pi^2}{16}$ à remplacer par une fonction voisine de 1,50 pour $\frac{r_1 - r_2}{h}$ petit et voisine de 1,80 pour $\frac{r_1 - r_2}{h}$ grand, d'où une expression empirique plus satisfaisante que (32) :

$$F = 2G\pi (r_1^2 - r_2^2) \frac{\Delta h}{h} \left\{ f(r_1 r_2 h) + \frac{0,75}{h^2} \left[\frac{3(r_1^2 + r_2^2)^2 - 10r_1 r_2 (r_1^2 + r_2^2) + 8r_1^2 r_2^2}{3(r_1 + r_2)^2} \right] \right\}. \quad (33)$$

Il est intéressant d'étudier sur cette formule le cas où $r_1 - r_2$ devient très petit devant r_1 et r_2 , on doit ainsi retomber sur le cas du parallépipède déjà traité.

Si l'on pose $r_2 = r_1 - e$ avec l'hypothèse $\frac{e}{r_1} \ll 1$, on trouve que le dernier terme dans l'accolade tend vers

$$\frac{0,75}{h^2} \cdot \frac{2}{3} e^2 = 0,5 \frac{e^2}{h^2}$$

ce qui est bien conforme à (27), il faut donc que le premier terme $f(r_1 r_2 h)$ qui doit déjà tendre vers

$$1,50 \text{ pour } \frac{r_2}{r_1} \ll 1 \text{ et } \frac{r_1}{h} \rightarrow 0$$

$$\text{et } 1,80 \text{ pour } \frac{r_2}{r_1} \ll 1 \text{ et } \frac{r_1}{h} \rightarrow \infty$$

tende encore vers

$$2 \text{ pour } \frac{r_2 - r_1}{r_1} \ll 1 \text{ et } \frac{r_2 - r_1}{h} \rightarrow 0$$

$$2,4 \text{ pour } \frac{r_2 - r_1}{r_1} \ll 1 \text{ et } \frac{r_2 - r_1}{h} \rightarrow \infty.$$

La fonction la plus simple qui satisfasse à cette condition est :

$$f = \frac{\left[1,50 + 1,80 \left(\frac{r_1 - r_2}{h} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right]}{1 + \left(\frac{r_1 - r_2}{h} \right)^2}$$

d'où :

$$F = 2G\pi (r_1^2 - r_2^2) \frac{\Delta h}{h} \left\{ \frac{\left[1,50 + 1,80 \left(\frac{r_1 - r_2}{h} \right)^2 \right]}{1 + \left(\frac{r_1 - r_2}{h} \right)^2} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right] + \frac{0,75}{h^2} \left[\frac{3(r_1^2 + r_2^2)^2 - 10r_1 r_2 (r_1^2 + r_2^2) + 8r_1^2 r_2^2}{3(r_1 + r_2)^2} \right] \right\}. \quad (34)$$

Cylindre elliptique creux. — Il est évident que sans nouveaux calculs nous pouvons tout de suite donner une formule valable pour le cas où le caoutchouc est en forme de couronne comprise entre deux ellipses homothétiques. Soit λ le rapport d'homothétie de la seconde à la première. Si nous revenons pour un instant au cas du cylindre creux ceci nous amène à poser :

$$r_1 = r \quad r_2 = \lambda r \quad (0 < \lambda < 1)$$

et la formule (34) s'écrit encore :

$$F = 2G\pi r^2(1-\lambda^2) \frac{\Delta h}{h} \left\{ \frac{\left[1,50 + 1,80 \frac{r^2}{h^2} (1-\lambda^2) \right]}{1 + \frac{r^2}{h^2} (1-\lambda^2)} \left(1 + \frac{\lambda^2}{3} \right) + 0,75 \frac{r^2}{h^2} \left[\frac{3(1+\lambda^2)^2 - 10\lambda(1+\lambda^2) + 8\lambda^2}{3(1+\lambda)^2} \right] \right\}. \quad (35)$$

Il est clair que dans le cas elliptique tous les facteurs en λ se conservent et ceci nous mène à :

$$F = 2G\pi ab(1-\lambda^2) \frac{\Delta h}{h} \left\{ \frac{1 + 1,2 \frac{ab}{h^2} (1-\lambda)^2}{1 + \frac{ab}{h^2} (1-\lambda)^2} \left(1 + \frac{\lambda^2}{3} \right) \left[1 + \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} \right] + \frac{3a^2 b^2}{h^2 (a+b)^2} \left[\frac{3(1+\lambda^2)^2 - 10\lambda(1+\lambda^2) + 8\lambda^2}{3(1+\lambda)^2} \right] \right\}. \quad (36)$$

Le cas où les deux ellipses ne seraient pas homothétiques soulève évidemment des difficultés de calcul infiniment plus grandes.

Résumé. — Les formules pratiques :

- (21) pour le cylindre plein
- (27) pour le rectangle allongé
- (30) pour le cylindre elliptique plein
- (34, 35) pour le cylindre creux
- (36) pour le cylindre elliptique creux

couvrent les cas les plus simples et les plus intéressants pour les applications, avec une précision qu'on peut chiffrer à 1 pour 100, malgré la petite incertitude du point de vue de la théorie rigoureuse de l'élasticité que nous avons signalée.

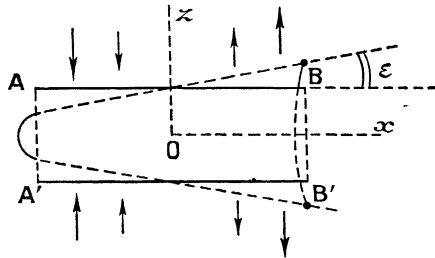


Fig. 5.

Torsion du support suivant un axe latéral.

— Occupons nous maintenant des problèmes où l'on réalise une torsion suivant un axe ox ou oy . Le premier cas à traiter est celui du problème plan : Un parallélépipède de caoutchouc très long suivant oy (de sorte que tous les mouvements du caoutchouc vont se faire dans des plans parallèles à zox) est sollicité par pression dans la région AA' , une traction égale et opposée dans la région BB' .

Soit ϵ l'angle de déformation pour chaque armature. Cherchons le système de pressions et tractions que le caoutchouc oppose à la déformation.

La condition d'incompressibilité est toujours :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Les conditions à la limite sont :

$$\text{pour } z = \pm \frac{h}{2} \left\{ \begin{array}{l} w = \pm \epsilon x \\ u = 0 \text{ (adhérence)} \end{array} \right.$$

et l'énergie de déformation est (pour une longueur 1 très grande sur oy)

$$W = \iint Gl dx dz \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (37)$$

comme dans les problèmes qui précèdent, on est conduit à poser :

$$u = A_1 \cos \frac{\pi z}{h} + A_3 \cos \frac{3\pi z}{h} + \dots$$

d'où résulte

$$W = \frac{-h}{\pi} \left[\frac{\partial A_1}{\partial x} \sin \frac{\pi z}{h} + \dots + \frac{1}{2n+1} \frac{\partial A_{2n+1}}{\partial x} \sin \frac{(2n+1)\pi z}{h} + \dots \right].$$

Les conditions à la limite permettent d'écrire :

$$\sum \frac{1}{2n+1} \frac{\partial A_{2n+1}}{\partial x} = \frac{\epsilon \pi}{h} x.$$

Les conditions d'homogénéité de déformation obligent à poser :

$$A_{2n+1} = a_{2n+1} (x^2 - C_{2n+1}^2)$$

les constantes C_{2n+1} , étant à déterminer ainsi que les a_{2n+1} , d'où la première relation

$$\sum \frac{a_{2n+1}}{2n+1} = \frac{\epsilon \pi}{2h}. \quad (38)$$

La suite du calcul est entièrement calquée sur celle relative au cylindre plein, sauf que l'on doit tout d'abord chercher à rendre W minimum par rapport à chaque C_{2n+1} . Ceci donne :

$$C_{2n+1}^2 = \frac{e^2}{12} + \frac{2h^2}{(2n+1)^2 \pi^2} \quad (39)$$

et en adoptant cette valeur, on trouve :

$$W = Gleh \sum \left[(2n+1)^2 \frac{\pi^2 e^4}{720 h^2} + \frac{e^2}{3} \right] a_{2n+1}^2. \quad (40)$$

A partir de ce moment le calcul ne diffère plus de celui donné pour le cylindre plein, et on trouve :

$$W = G \frac{le^3 \epsilon^3 \pi^2}{h^3} \frac{1}{3} \frac{1}{\sum \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1 + \frac{(2n+1)^2 \pi^2 e^2}{240 h^2}}}. \quad (41)$$

Comme nous l'avons fait plus haut et dans le même esprit, nous pouvons déduire une formule approchée suffisamment valable pour tous les cas de la pratique :

$$W = \frac{Gle^3}{h} \epsilon^2 \left\{ \frac{8}{3} + \frac{16}{105} \frac{e^2}{h^2} \right\}. \quad (42)$$

Si l'on considère que la rotation de l'armature supé-

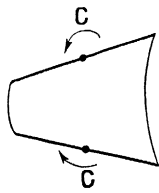


Fig. 6.

ricure est due à un couple C , le travail de ce couple est finalement $C \frac{\epsilon}{2}$ sur l'armature inférieure un couple égal au total $W = C \epsilon$, et la valeur du couple C susceptible d'amener la rotation angulaire ϵ est :

$$C = \frac{Gle^3}{h} \left[\frac{8}{3} + \frac{16}{105} \frac{e^2}{h^2} \right] \epsilon. \quad (43)$$

Même problème pour un support très peu épais. — Supposons maintenant que nous envisagions un support avec une épaisseur l suivant oy si faible que dans la déformation ϵ le caoutchouc se déplace davantage suivant oy que suivant ox , et traitons le cas limite où le déplacement u suivant ox est négligeable, l'incompressibilité s'exprime ainsi :

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

les conditions à la limite sont toujours :

$$\text{pour } z = \pm \frac{h}{2} \left\{ \begin{array}{l} w = \pm \epsilon x \\ v = 0 \end{array} \right.$$

et l'énergie de déformation est :

$$W = G \iiint dx dy dz \left[\left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right].$$

On est conduit à poser :

$$v = \left[A_1 \cos \frac{\pi z}{h} + \dots + A_{2n+1} \cos (2n+1) \frac{\pi z}{h} + \dots \right] \frac{y}{l}$$

$$\text{d'où } w = - \frac{h}{\pi l} \left[\sum \frac{A_{2n+1}}{2n+1} \sin (2n+1) \frac{\pi z}{h} \right]$$

mais la condition $w = \pm \epsilon x$ pour $z = \pm \frac{h}{2}$ nous oblige à choisir :

$$A_{2n+1} = a_{2n+1} x$$

$$\text{d'où } \sum \frac{a_{2n+1}}{2n+1} = \frac{\epsilon \pi l}{h}.$$

Tout est donc déterminé, le calcul de W s'ensuit. On trouve sans peine :

$$w = \frac{\pi^2}{12} \frac{Gle^3}{h} \epsilon^2 \frac{1}{\sum \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1 + (2n+1)^2 \frac{\pi^4 l^2}{48 h^2}}}.$$

Comme dans le paragraphe précédent, cherchons une formule approchée donnant le couple C capable de pratiquer la rotation. On trouve :

$$C = G \frac{le^3}{h} \epsilon \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \frac{l^2}{h^2} \right].$$

Tableau des formules pratiques obtenues.

I. Forces pour une compression.

Cylindre plein :
rayon r ,
hauteur h

$$F = G \pi r^2 \frac{\Delta h}{h} \left[3 + \frac{3}{2} \frac{r^2}{h^2} \right].$$

Rectangle allongé :

hauteur h
largeur e
longueur l

$$F = Gle \frac{\Delta h}{h} \left[1 + \frac{e^2}{h^2} \right].$$

Cylindre elliptique plein :

hauteur h
axes a, b

$$F = G \pi ab \frac{\Delta h}{h} \left[2 + \left\{ 1 + \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} \right\} + 6 \frac{a^2 b^2}{h^2 (a+b)^2} \right].$$

Cylindre circulaire creux :

rayon extérieure r
rayon intérieure λr
hauteur h

$$F = G \pi r^2 (1 - \lambda^2) \frac{\Delta h}{h} \left[3 \left(1 + \frac{\lambda^2}{3} \right) + \frac{3 r^2}{2 h^2} \left\{ \frac{3 (1 + \lambda^2)^2 - 10 \lambda (1 + \lambda^2) + 8 \lambda^2}{3 (1 + \lambda^2)} \right\} \right].$$

Cylindre elliptique creux :

hauteur h
ellipse intérieure homothétique dans le rapport λ

$$F = G \pi ab (1 - \lambda^2) \frac{\Delta h}{h} \left[2 \left(1 + \frac{\lambda^2}{3} \right) \left(1 + \frac{a^2 + b^2}{(a+b)^2} \right) + \frac{6 a^2 b^2}{h^2 (a+b)^2} \left\{ \frac{3 (1 + \lambda^2) - 10 \lambda (1 + \lambda^2) + 8 \lambda^2}{3 (1 + \lambda^2)} \right\} \right].$$

II. Couples pour une rotation ϵ d'une armature, l'autre subissant une rotation opposée.

Parallépipède très long :

hauteur h
largeur e
profondeur $l \gg e$

$$C = \frac{Gle^3}{h} \epsilon \left[\frac{8}{3} + \frac{16}{105} \frac{e^2}{h^2} \right].$$

Parallépipède très mince :

hauteur h
largeur e
profondeur $l \ll e$

$$C = \frac{Gle^3}{h} \epsilon \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{6} \frac{l^2}{h^2} \right].$$