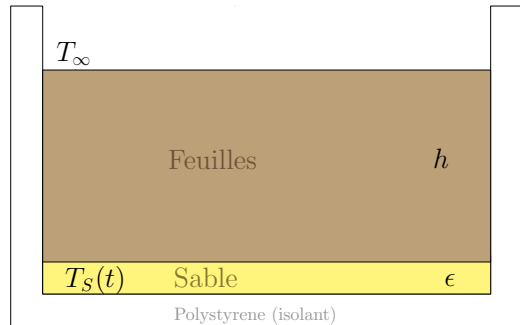


## Modelisation thermodynamique du système expérimental

On utilisera les notations suivantes :

$t$	Temps
$z$	Coordonnée d'altitude
$\varepsilon$	Hauteur de sable
$h$	Hauteur de feuilles
$T(z, t)$	Température dans l'espace et le temps
$T_\infty = T(h, t)$	Température de la pièce (constante)
$T_0 = T(0, 0)$	Température initial du sable
$T_S(t) = T(0, t)$	Température du sable (mesuré)
$j(z, t)$	Densité du flux de chaleur
$\lambda_f$	Conductivité thermique des feuilles
$c_s$	Capacité thermique du sable
$m_s$	Masse surfacique de sable



D'après l'équation de la chaleur, et la loi de Fourier<sup>1</sup>, appliquées à une dimension  $z$  :

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \lambda \frac{d^2T}{dz^2} = - \frac{dj}{dz}$$

- Dans la couche de sable, d'épaisseur négligeable  $\varepsilon$ , et de capacité thermique volumique  $\rho_s c_s = \frac{m_s c_s}{\varepsilon}$  on intègre l'équation de la chaleur :  $j(\varepsilon, t) - j(0, t) = - \rho c \varepsilon \frac{dT}{dt} = - m_s c_s \frac{dT}{dz}$ . Le fond du bac est isolant, donc  $\frac{dT}{dz} = - \frac{1}{m_s c_s} j(\varepsilon, t)$ .
- Dans la couche de feuilles, d'épaisseur  $h$ , et de conductivité  $\lambda_f$ , l'établissement du gradient thermique est plus rapide que la variation de température du sable (régime stationnaire). De plus comme  $\rho_f c_f$  est petit,  $\frac{dj}{dz} = - \rho_f c_f \frac{dT}{dt} \simeq 0$ . Ainsi la densité du flux de chaleur est constante dans la couche et vaut :  $\forall z \in [\varepsilon, h], j(z, t) = - \lambda_f \frac{\Delta T}{\Delta z} = - \lambda_f \frac{T_\infty - T_S(t)}{h}$

En remplaçant  $j(\varepsilon, t)$  dans la première équation, on obtient l'équation différentielle

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda_f}{m_s c_s h} (T_\infty - T_S(t)) \text{ qui a pour solution aux conditions initiales :}$$

$$T_S(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) e^{-t/\tau}, \text{ avec } \tau = \frac{h m_s c_s}{\lambda_f}$$

## Methode pour l'analyse numerique des résultats

Expérimentalement les courbes de  $T_S(t)$  obtenues possèdent une allure exponentielle conforme au modèle. Nous avons donc modelisé les courbes avec un logiciel qui utilise un algorithme des moindres carrés<sup>2</sup> pour obtenir les constantes  $T_\infty$  et  $\tau$ .

On néglige les premières minutes, qui correspondent au temps d'établissement du gradient stationnaire de température dans les feuilles. Le coefficient de corrélation  $r$  et la comparaison du terme  $T_\infty$  modelisé à la température de la pièce fournissent des assurances de qualité. Cela permet de déterminer approximativement la durée à négliger (c'est un compromis). Le  $T_0$  modelisé est fictif : il diffère du  $T_0$  réel par la chaleur transmise aux feuilles pour établir le gradient lors du temps négligé.

La constante  $\tau$  est la seule donnée qui ne dépende pas des températures initiales et finales, difficilement maîtrisables expérimentalement. En conservant, d'une expérience à l'autre, une même masse  $m_s$  de sable par unité de surface, cette constante constitue une base de comparaison entre les différentes couches de litières étudiées.

1. Avec nos notations, la loi de Fourier exprime la densité de flux thermique noté  $j = - \lambda \frac{dT}{dz} \Rightarrow \lambda \frac{d^2T}{dz^2} = - \frac{dj}{dz}$

2. Algorithme de Levenberg-Marquardt non échelonné, implementé dans le logiciel *qtiplot*.

Nous aurions pu déterminer la conductivité  $\lambda_f$  des feuilles, cependant des effets de bords apparaissent expérimentalement. La couche de litière est le siège de transferts convecto-conductifs complexes qui dépendent de l'épaisseur de la couche. Seul la conductance  $\frac{\lambda_f}{h}$  pour une hauteur donnée est étudiée.