

⌘ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 1998 ⌘

**Exercice 1**

**4 points**

Le plan est rapporté au repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  orthonormal direct ; unité graphique 2 centimètres.

On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

Soit I le point d'affixe  $2i$ .

On nomme  $f$  la transformation qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que  $z' = iz$ .

1.
  - a. Préciser la nature de  $f$  ainsi que ses éléments caractéristiques.
  - b. Déterminer l'affixe du point  $A'$ , image par  $f$  du point  $A$  d'affixe  $1 + \sqrt{2} + i$ .
  - c. Montrer que les points  $A$ ,  $I$  et  $A'$  sont alignés.
2.
  - a. Montrer que l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  du plan tels que  $M$ ,  $I$  et  $M'$  sont alignés, est le cercle de centre  $\Omega$  d'affixe  $1 + i$  et de rayon  $\sqrt{2}$ .
  - b. Vérifier que le point  $A$  appartient à  $(\Gamma)$ .
  - c. Déterminer l'ensemble  $(\Gamma')$  décrit par le point  $M'$  lorsque le point  $M$  décrit  $(\Gamma)$ .
3. Soit  $B$  le point d'affixe  $2 + 2i$  et  $B'$  l'image de  $B$  par  $f$ .
  - a. Démontrer que les droites  $(AB)$  et  $(A'B')$  sont perpendiculaires.
  - b. Soit  $C$  le point d'intersection des droites  $(AB)$  et  $(A'B')$ . Déterminer la nature du quadrilatère  $OACA'$ .

**Exercice 2**

**5 points**

Dans le plan  $(P)$ , on considère le triangle  $ABC$  isocèle en  $A$ , de hauteur  $[AH]$  tel que  $AH = BC = 4$ . On prendra le centimètre pour unité.

1. En justifiant la construction, placer le point  $G$ , barycentre du système de points pondérés  $\{(A; 2); (B; 1); (C; 1)\}$ .
2. On désigne le point  $M$  un point quelconque de  $(P)$ .
  - a. Montrer que le vecteur  $\vec{V} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$  est un vecteur dont la norme est 8.
  - b. Déterminer et construire l'ensemble  $E_1$  des points  $M$  du plan tels que

$$\|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|\vec{V}\|$$

3. On considère le système de points pondérés  $\{(A; 2); (B; n); (C; n)\}$  où  $n$  est un entier naturel fixé.
  - a. Montrer que le barycentre  $G_n$  de ce système de points pondérés existe. Placer  $G_0, G_1, G_2$ .
  - b. Montrer que le point  $G_n$  appartient au segment  $[AH]$ .
  - c. Calculer la distance  $AG_n$  en fonction de  $n$  et déterminer la limite de  $AG_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .  
Préciser la position limite de  $G_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
  - d. Soit  $E_n$  l'ensemble des points  $M$  du plan tels que

$$\|2\vec{MA} + n\vec{MB} + n\vec{MC}\| = n\|\vec{V}\|.$$

Montrer que  $E_n$  est un cercle qui passe par le point  $A$ .  
En préciser le centre et le rayon, noté  $R_n$ .

e. Construire  $E_2$ .

### Exercice 2

5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . L'unité graphique est 4 cm.

On considère les points  $A(1; 0)$ ,  $C(0; 1)$ ,  $D(0; -1)$  et le cercle  $(\Gamma)$  de centre  $O$  et de rayon 1. Soit  $M$  un point du cercle  $(\Gamma)$ , d'ordonnée positive ou nulle, et distinct de  $C$ . La droite  $(DM)$  rencontre l'axe des abscisses au point  $I$ .

Le point  $N$  est le point d'intersection de la droite  $(OM)$  et de la parallèle à la droite  $(CD)$  passant par  $I$ .

1. Réaliser la figure.
2. On note  $t$  une mesure de l'angle orienté  $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ .  
On se propose de déterminer l'ensemble  $(F)$  décrit par le point  $N$  lorsque  $t$  décrit l'intervalle  $[0; \pi]$  privé de  $\frac{\pi}{2}$ .
  - a. Déterminer les coordonnées de  $M$  en fonction de  $t$ .
  - b. Montrer que les coordonnées de  $I$  sont  $\left(\frac{\cos t}{1 + \sin t}; 0\right)$  puis que les coordonnées  $x(t)$  et  $y(t)$  de  $N$  sont :

$$x(t) = \frac{\cos t}{1 + \sin t} \quad y(t) = \frac{\sin t}{1 + \sin t}$$

3.
  - a. Comparer d'une part  $x(t)$  et  $x(\pi - t)$ , puis d'autre part  $y(t)$  et  $y(\pi - t)$ .  
En déduire une propriété géométrique de l'ensemble  $(F)$ .
  - b. Faire l'étude conjointe des variations des fonctions  $t \mapsto x(t)$  et  $t \mapsto y(t)$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .
  - c. Déterminer les limites de  $x(t)$  et  $y(t)$  quand  $t$  tend vers  $\frac{\pi}{2}$ .
4.
  - a. Calculer, en fonction de  $t$ , la distance  $ON$  puis la distance de  $N$  à la droite d'équation  $y = 1$ .
  - b. En déduire que  $(F)$  est inclus dans une conique dont on précisera la nature et les éléments.
  - c. Tracer l'ensemble  $(F)$ .

### Problème

11 points

#### Partie A

#### ★ Résolution d'une équation différentielle

(Hors programme depuis 1998.)

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $(E_0)$   $y'' - 2y' + y = 0$ .
2. Soit l'équation différentielle  $(E)$  :  $y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 2$ .  
Vérifier que le polynôme  $h$  défini sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = x^2$  est une solution particulière de  $(E)$ , c'est-à-dire que, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  
 $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x^2 - 4x + 2$ .
3.
  - a. Montrer que si  $f$  est solution de  $(E)$ , c'est-à-dire, si pour tout  $x$  réel,  $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = x^2 - 4x + 2$ , alors la fonction  $g$ , telle que  $g = f - h$ , est solution de  $(E_0)$ .
  - b. Réciproquement, montrer que si  $g$  est solution de  $(E_0)$  alors la fonction  $f$ , telle que  $f = g + h$ , est solution de  $(E)$ .
  - c. En déduire la forme générale des solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

4. En déduire une solution  $\varphi$  de (E) satisfaisant à  $\varphi(1) = 1$  et  $\varphi'(1) = 0$ .

### Partie B

#### ★ Étude de la fonction $f$ et tracé de sa courbe représentative

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , par

$$f(x) = x^2 - 2(x-1)e^{(x-1)}.$$

On note  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ; (unité graphique. 2 cm).

1. a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ . On pourra montrer que

$$f(x) = e \left( \frac{x^2}{e^x} - \frac{2x}{e} + \frac{2}{e} \right).$$

- b. Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ .  
 c. Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x$  réel et en déduire le sens de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
2. a. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet sur  $\mathbb{R}$  une solution unique. On note  $\alpha$  cette solution.  
 b. Montrer que  $\alpha$  appartient à l'intervalle  $]1,7; 1,8[$ .
3. On appelle  $(\Gamma)$  la parabole d'équation  $y = x^2$ .  
 a. Étudier la position relative de  $(\mathcal{C})$  et de  $(\Gamma)$ .  
 b. Calculer la limite de  $f(x) - x^2$  quand  $x$  tend vers  $-\infty$ .
4. Tracer sur une feuille de papier millimétré, la courbe  $(\mathcal{C})$  et la parabole  $(\Gamma)$ .

### Partie C

#### ★ Calculs d'aires

Soit  $a$  un nombre réel strictement inférieur à 1. On appelle  $D_a$  le domaine du plan limité par les courbes  $(\mathcal{C})$  et  $(\Gamma)$  et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = 1$ .

On note  $A(a)$  l'aire du domaine  $D_a$ , exprimée en unités d'aire.

1. Montrer que  $A(a) = 2(a-1)e^{(a-1)} - 2e^{(a-1)} + 2$ .  
 (On pourra utiliser une intégration par parties).  
 2. Calculer l'aire  $A(0)$  du domaine  $D$ .  
 3. Déterminer la limite de  $A(a)$  quand  $a$  tend vers  $-\infty$ .

### Partie D

#### ★ Calcul de probabilités

Sur la feuille de papier millimétré de la partie B, on place les points  $I(1; 0)$ ,  $J(0; 1)$  et  $K(1; 1)$ . On utilise cette feuille comme cible.

On admet que, pour chaque essai :

- la probabilité d'atteindre un point du carré OIKJ est égale à  $\frac{1}{2}$ ;
- sachant qu'un point du carré est atteint, la probabilité que ce point appartienne à  $D_0$  est égale à  $A(0)$ .

1. Pour un essai, montrer que la probabilité d'atteindre un point du domaine  $D_0$  est égale à  $1 - \frac{2}{e}$ .
2. On effectue  $n$  essais ( $n$  entier naturel non nul), tous indépendants les uns des autres.
- a. Exprimer, en fonction de  $n$ , la probabilité  $p_n$  d'atteindre au moins une fois un point du domaine  $D_0$  au cours de ces  $n$  essais.  
 b. Déterminer le nombre minimal  $n$  d'essais pour que cette probabilité  $p_n$  soit supérieure ou égale à 0,99.