

⌘ Baccalauréat S Amérique du Sud novembre 1998 ⌘

Exercice 1

4 points

Le plan est rapporté au repère (O, \vec{u}, \vec{v}) orthonormal direct ; unité graphique 2 centimètres.

On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

Soit I le point d'affixe $2i$.

On nomme f la transformation qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = iz$.

1.
 - a. Préciser la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.
 - b. Déterminer l'affixe du point A' , image par f du point A d'affixe $1 + \sqrt{2} + i$.
 - c. Montrer que les points A , I et A' sont alignés.
2.
 - a. Montrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M , I et M' sont alignés, est le cercle de centre Ω d'affixe $1 + i$ et de rayon $\sqrt{2}$.
 - b. Vérifier que le point A appartient à (Γ) .
 - c. Déterminer l'ensemble (Γ') décrit par le point M' lorsque le point M décrit (Γ) .
3. Soit B le point d'affixe $2 + 2i$ et B' l'image de B par f .
 - a. Démontrer que les droites (AB) et $(A'B')$ sont perpendiculaires.
 - b. Soit C le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$. Déterminer la nature du quadrilatère $OACA'$.

Exercice 2

5 points

Dans le plan (P) , on considère le triangle ABC isocèle en A , de hauteur $[AH]$ tel que $AH = BC = 4$. On prendra le centimètre pour unité.

1. En justifiant la construction, placer le point G , barycentre du système de points pondérés $\{(A; 2); (B; 1); (C; 1)\}$.
2. On désigne le point M un point quelconque de (P) .
 - a. Montrer que le vecteur $\vec{V} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$ est un vecteur dont la norme est 8.
 - b. Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que

$$\|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| = \|\vec{V}\|$$

3. On considère le système de points pondérés $\{(A; 2); (B; n); (C; n)\}$ où n est un entier naturel fixé.
 - a. Montrer que le barycentre G_n de ce système de points pondérés existe. Placer G_0, G_1, G_2 .
 - b. Montrer que le point G_n appartient au segment $[AH]$.
 - c. Calculer la distance AG_n en fonction de n et déterminer la limite de AG_n quand n tend vers $+\infty$.
Préciser la position limite de G_n quand n tend vers $+\infty$.
 - d. Soit E_n l'ensemble des points M du plan tels que

$$\|2\vec{MA} + n\vec{MB} + n\vec{MC}\| = n\|\vec{V}\|.$$

Montrer que E_n est un cercle qui passe par le point A .
En préciser le centre et le rayon, noté R_n .

e. Construire E_2 .

Exercice 2

5 points

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{i}, \vec{j}) . L'unité graphique est 4 cm.

On considère les points $A(1; 0)$, $C(0; 1)$, $D(0; -1)$ et le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1. Soit M un point du cercle (Γ) , d'ordonnée positive ou nulle, et distinct de C . La droite (DM) rencontre l'axe des abscisses au point I .

Le point N est le point d'intersection de la droite (OM) et de la parallèle à la droite (CD) passant par I .

1. Réaliser la figure.
2. On note t une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
On se propose de déterminer l'ensemble (F) décrit par le point N lorsque t décrit l'intervalle $[0; \pi]$ privé de $\frac{\pi}{2}$.
 - a. Déterminer les coordonnées de M en fonction de t .
 - b. Montrer que les coordonnées de I sont $\left(\frac{\cos t}{1 + \sin t}; 0\right)$ puis que les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de N sont :

$$x(t) = \frac{\cos t}{1 + \sin t} \quad y(t) = \frac{\sin t}{1 + \sin t}$$

3.
 - a. Comparer d'une part $x(t)$ et $x(\pi - t)$, puis d'autre part $y(t)$ et $y(\pi - t)$.
En déduire une propriété géométrique de l'ensemble (F) .
 - b. Faire l'étude conjointe des variations des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
 - c. Déterminer les limites de $x(t)$ et $y(t)$ quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$.
4.
 - a. Calculer, en fonction de t , la distance ON puis la distance de N à la droite d'équation $y = 1$.
 - b. En déduire que (F) est inclus dans une conique dont on précisera la nature et les éléments.
 - c. Tracer l'ensemble (F) .

Problème

11 points

Partie A

★ Résolution d'une équation différentielle

(Hors programme depuis 1998.)

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation différentielle (E_0) $y'' - 2y' + y = 0$.
2. Soit l'équation différentielle (E) : $y'' - 2y' + y = x^2 - 4x + 2$.
Vérifier que le polynôme h défini sur \mathbb{R} par $h(x) = x^2$ est une solution particulière de (E) , c'est-à-dire que, pour tout x de \mathbb{R} ,
 $h''(x) - 2h'(x) + h(x) = x^2 - 4x + 2$.
3.
 - a. Montrer que si f est solution de (E) , c'est-à-dire, si pour tout x réel, $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = x^2 - 4x + 2$, alors la fonction g , telle que $g = f - h$, est solution de (E_0) .
 - b. Réciproquement, montrer que si g est solution de (E_0) alors la fonction f , telle que $f = g + h$, est solution de (E) .
 - c. En déduire la forme générale des solutions de (E) sur \mathbb{R} .

4. En déduire une solution φ de (E) satisfaisant à $\varphi(1) = 1$ et $\varphi'(1) = 0$.

Partie B

★ Étude de la fonction f et tracé de sa courbe représentative

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} , par

$$f(x) = x^2 - 2(x-1)e^{(x-1)}.$$

On note (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) ; (unité graphique. 2 cm).

1. a. Déterminer la limite de f en $+\infty$. On pourra montrer que

$$f(x) = e \left(\frac{x^2}{e^x} - \frac{2x}{e} + \frac{2}{e} \right).$$

- b. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
 c. Calculer $f'(x)$ pour tout x réel et en déduire le sens de variation de f sur \mathbb{R} .
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur \mathbb{R} une solution unique. On note α cette solution.
 b. Montrer que α appartient à l'intervalle $]1,7; 1,8[$.
3. On appelle (Γ) la parabole d'équation $y = x^2$.
 a. Étudier la position relative de (\mathcal{C}) et de (Γ) .
 b. Calculer la limite de $f(x) - x^2$ quand x tend vers $-\infty$.
4. Tracer sur une feuille de papier millimétré, la courbe (\mathcal{C}) et la parabole (Γ) .

Partie C

★ Calculs d'aires

Soit a un nombre réel strictement inférieur à 1. On appelle D_a le domaine du plan limité par les courbes (\mathcal{C}) et (Γ) et les droites d'équations $x = a$ et $x = 1$.

On note $A(a)$ l'aire du domaine D_a , exprimée en unités d'aire.

1. Montrer que $A(a) = 2(a-1)e^{(a-1)} - 2e^{(a-1)} + 2$.
 (On pourra utiliser une intégration par parties).
2. Calculer l'aire $A(0)$ du domaine D .
3. Déterminer la limite de $A(a)$ quand a tend vers $-\infty$.

Partie D

★ Calcul de probabilités

Sur la feuille de papier millimétré de la partie B, on place les points $I(1; 0)$, $J(0; 1)$ et $K(1; 1)$. On utilise cette feuille comme cible.

On admet que, pour chaque essai :

- la probabilité d'atteindre un point du carré OIKJ est égale à $\frac{1}{2}$;
- sachant qu'un point du carré est atteint, la probabilité que ce point appartienne à D_0 est égale à $A(0)$.

1. Pour un essai, montrer que la probabilité d'atteindre un point du domaine D_0 est égale à $1 - \frac{2}{e}$.
2. On effectue n essais (n entier naturel non nul), tous indépendants les uns des autres.
- a. Exprimer, en fonction de n , la probabilité p_n d'atteindre au moins une fois un point du domaine D_0 au cours de ces n essais.
- b. Déterminer le nombre minimal n d'essais pour que cette probabilité p_n soit supérieure ou égale à 0,99.