

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Antilles-Guyane septembre 1998 ∞

Exercice 1

4 points

Enseignement obligatoire

Un meuble est composé de 10 tiroirs T_1, T_2, \dots, T_{10} .

Une personne place au hasard une boule dans un des tiroirs et une autre est chargée de trouver le tiroir contenant la boule à l'aide de la stratégie suivante :

la personne ouvre le tiroir T_1 . Si la boule est dans le tiroir T_1 , la recherche est achevée, sinon la personne ouvre le tiroir T_2 , et ainsi de suite ... en respectant l'ordre des numéros de tiroirs.

On remarquera qu'avec cette stratégie, le tiroir T_{10} n'est jamais ouvert.

Pour i entier compris entre 1 et 10 ($1 \leq i \leq 10$), on appelle B_i l'évènement « La boule se trouve dans le tiroir T_i ».

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tiroirs qui ont été ouverts afin de localiser la boule avec cette stratégie.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles de X .
2.
 - a. Montrer que, pour i entier compris entre 1 et 8 ($1 \leq i \leq 8$), l'évènement ($X = i$) est l'évènement B_i .
 - b. Justifier que l'évènement ($X = 9$) est la réunion des évènements B_9 et B_{10} .
 - c. Déterminer la loi de probabilité de X .
 - d. Calculer l'espérance mathématique de X .

Exercice 2

5 points

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure, les points introduits dans le texte (unité graphique : 2 cm.)

1.
 - a. Résoudre l'équation

$$(E) : z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

- b. On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2 . Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 ; placer M et N sur la figure.
 - c. Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w} = -2\vec{u}$. Placer P et Q sur la figure.
Montrer que MNPQ est un carré.
 2. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
Placer ces points sur la figure.
Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment [MN].
 3. On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.
 - a. Montrer que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et $1 - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$.

- b. Exprimer les affixes Z de \overrightarrow{PR} et Z' de \overrightarrow{PS} en fonction de α .
- c. Montrer que $|Z| = |Z'|$ et que $\frac{Z}{Z'} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- d. Dédire des questions précédentes la nature du triangle PRS.

Exercice 2**5 points****Enseignement de spécialité**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure les points introduits dans le texte (unité graphique : 2 cm.)

1.
 - a. Résoudre l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.
 - b. On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2 . Déterminer le module et l'argument de z_1 et de z_2 ; placer M et N sur la figure.
 - c. Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\vec{w} = -2\vec{u}$. Placer P et Q sur la figure. Montrer que MNPQ est un carré.
2. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
Placer ces points sur la figure.
Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment [MN].
3. On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.
 - a. Montrer que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et $1 - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$.
 - b. Exprimer les affixes Z de \overrightarrow{PR} et Z' de \overrightarrow{PS} en fonction de α .
 - c. Montrer que $|Z| = |Z'|$ et $\frac{Z}{Z'} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
 - d. Dédire des questions précédentes la nature du triangle PRS.

Problème**11 points****Commun à tous les candidats****Partie A****★ Étude d'une fonction auxiliaire**

La fonction d est définie sur $] - 1 ; +\infty[$ par :

$$d(x) = e^{\frac{x}{x+1}}.$$

1. Calculer la fonction dérivée d' . En déduire les variations de d .
2. Déterminer les limites de d en -1 et en $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x > -1$, on a : $0 < d(x) < e$.

Partie B**★ Étude de la fonction f**

Dans cette partie on s'intéresse à la fonction f définie sur l'intervalle $] - 1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 - e^{\frac{x}{x+1}}.$$

On appelle (\mathcal{C}) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal, l'unité graphique étant 5 cm. On désigne par f' et f'' les dérivées première et seconde de f .

1. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x - e + 1$ est asymptote à la courbe (\mathcal{C}).
Préciser la position relative de (D) et (\mathcal{C}).
2. **a.** Pour $x \in]-1 ; +\infty[$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
Vérifier que $f''(x) = \frac{2x+1}{(x+1)^4} e^{\frac{x}{x+1}}$.
En déduire le sens de variations de f' .
b. Dresser le tableau de variations de f' .
(On admettra que $\lim_{x \rightarrow -1} f' = \lim_{x \rightarrow +\infty} f' = 1$.)
3. Démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet sur $] - 1 ; +\infty[$ deux solutions dont l'une est 0.
Dans la suite du problème, on notera α la solution non nulle. Donner une valeur approchée de α au centième près.
4. **a.** Étudier les variations de f .
b. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
c. Dresser le tableau de variations de f .

Partie C**★ Prolongement de la fonction f en -1**

On considère la fonction g définie sur $] - 1 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(-1) &= 0 \\ g(x) &= f(x) \text{ pour tout } x > -1. \end{cases}$$

On appelle (\mathcal{C}') la courbe représentative de la fonction g dans le repère de la **partie B**.

1. **a.** Montrer que l'on peut écrire

$$\frac{g(x) - g(-1)}{x - (-1)} = 1 - \frac{1}{x} \left(\frac{x}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}} \right).$$

- b.** Pour $x \in]-1 ; +\infty[$, déterminer la limite lorsque x tend vers -1 de $\frac{x}{x+1}$
puis de $\frac{x}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}}$.
c. En déduire que g est dérivable en -1 et préciser son nombre dérivé $g'(-1)$.
2. Construire (D) et (\mathcal{C}'). Préciser les tangentes à (\mathcal{C}') aux points d'abscisses $-1, \alpha, 0$.