

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S France septembre 1998 ∞

Exercice I

4 points

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Il n'est pas demandé de faire de figure.

Les questions 3 et 4 sont indépendantes des questions 1 et 2.

On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives :

$$A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad I \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Calculer le produit vectoriel $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
 - Déterminer une équation cartésienne du plan contenant les trois points A, B et C.
- Soit (Q) le plan d'équation :

$$x + y - 3z + 2 = 0$$

et (Q') le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Pourquoi (Q) et (Q') sont-ils sécants ?
 - Donner un point E et un vecteur directeur \vec{u} de la droite d'intersection (Δ) des plans (Q) et (Q').
- Écrire une équation cartésienne de la sphère S de centre I et de rayon 2.
 - On considère les points J et K de coordonnées respectives :

$$J \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad K \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer avec soin l'intersection de la sphère (S) et de la droite (JK).

Exercice II

5 points

- On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16.$$

- Calculer $P(4)$.
 - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $P(z) = 0$.
- Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) tel que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ cm.
Soient A, B, C les points d'affixes respectives :

$$a = 4 \quad b = 1 + i\sqrt{3} \quad c = 1 - i\sqrt{3}$$

- Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.
- Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3. Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + i$
 On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$
 et G l'image de K par la translation de vecteur \overrightarrow{OB} .
- Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?
 - Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.
4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme $COFH$.
- Montrer que le quadrilatère $COFH$ est un carré.
 - Calculer l'affixe du point H .
 - Le triangle AGH est-il équilatéral?

Problème**11 points****Partie A**

1. Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = 0.$$

2. Déterminer la solution φ de cette équation, définie sur \mathbb{R} et qui vérifie les conditions :

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi'(0) = -e$$

Partie B

1. On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = -xe^{2x+1}.$$

- Quel est, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$?
- Étudier le sens de variation de f .
- Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- Dresser le tableau de variations de f .
- On appelle (\mathcal{C}) la représentation graphique de f dans un repère ortho-normé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité graphique : 4 cm).
 Quelle est la tangente à (\mathcal{C}) au point O ?
 Écrire une équation de la tangente T à (\mathcal{C}) au point d'abscisse (-1) .
- On appelle (Γ) la représentation graphique dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) de la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = e^x.$$

Quelle est la tangente à (Γ) au point d'abscisse (-1) ?

2. On appelle h la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$h(x) = 1 + xe^x.$$

- Étudier le sens de variation de h .
 En déduire le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .

- b.** Étudier la position de (\mathcal{C}) par rapport à (Γ) .
 - c.** Tracer, sur le même graphique, les courbes T , (\mathcal{C}) et (Γ) .
- 3.** Soit m un réel quelconque et M le point de la courbe (Γ) d'abscisse m .
 - a.** Écrire une équation de la tangente D à (Γ) en M .
 - b.** La tangente D coupe les axes de coordonnées en A et B .
Calculer, en fonction de m , les coordonnées du milieu J du segment $[AB]$.
 - c.** Prouver que J appartient à (\mathcal{C}) .
 - d.** Tracer (D) et J pour $m = 0$.

Partie C

- 1.** Soit x un réel quelconque.
À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I(x) = \int_0^x t e^{2t} dt.$$

- 2.** Soit x un réel négatif.
Calculer l'aire $\mathcal{A}(x)$, exprimée en cm^2 , de l'ensemble des points N du plan dont les coordonnées (u, v) vérifient :

$$\begin{cases} x \leq u \leq 0 \\ 0 \leq v \leq f(x) \end{cases}$$

- 3.** Calculer $\mathcal{A}(-1)$.
- 4.** $\mathcal{A}(x)$ admet-elle une limite quand x tend vers moins l'infini ? Si oui laquelle ?