∽ Baccalauréat S Sportifs de haut-niveau ∾ octobre 1998

EXERCICE 1 **4 points**

Un joueur dispose d'une urne contenant 3 boules rouges. 4 boules blanches et n boules vertes ($0 \leqslant n \leqslant 10$). Les boules sont indiscernables au toucher.

1. Le joueur tire au hasard une boule de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a. R : « la boule tiree est rouge » ;

b. B : « la boule tirée est blanche » ;

c. V : « la boule tirée est verte ».

2. Le joueur décide de jouer une partie. Celle-ci se déroule de la manière indiquée ci-dessous.

Le joueur tire une boule de l'urne

- si elle est rouge, il gagne 16 F :
- si elle est blanche, il perd 12 F ;
- si elle est verte, il remet la boule dans l'urne, puis tire une boule de l'urne ;
  - si celle boule est rouge, il gagne 8 F ;
  - si cette boule est blanche, il perd 2 F ;
  - si cette boule est verte, il ne perd rien ni ne gagne rien.

Les tirages sont équiprobables et deux tirages successifs sont indépendants.

Au début de la partie, le joueur possède 12 F. Soit X la variable aléatoire qui prend pour valeur la somme que le joueur possède à l'issue de la partie (un tirage ou deux tirages selon le cas).

a. Déterminer les valeurs prises par X.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Montrer que l'espérance mathématique de X est $12+16\dfrac{n}{(n+7)^2}$.

3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x+7)^2}$.

Étudier les variations de f.

4. En déduire la valeur de n pour laquelle l'espérance mathématique X est maximale. Calculer celle valeur maximale (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).

EXERCICE 2 **5 points**

On considère les intégrales $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4 x\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

1. **a.** Montrer que l'intégrale I peut s'écrire :

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \cos x\left(\cos x - \cos x \sin^2 x\right)\,\mathrm{d}x.$$

b. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\mathrm{J}.$$

c. Montrer de même que $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\mathrm{I}$.

2. **a.** Montrer que $\mathrm{I} + \mathrm{J} = \dfrac{3\pi}{4}$.

b. Montrer que $\mathrm{J} - \mathrm{I} = 0$

c. En déduire les intégrales I et J.

PROBLÈME **11 points**

Partie A : Étude d'une fonction

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \left(3\mathrm{e}^{x} - x - 4\right)\mathrm{e}^{3x}.$$

Il semblerait, d'après la représentation graphique de h tracée par ordinateur et donnée ci-après, que l'équation $h(x) = 0$ admette une seule solution dans $\mathbb{R}$. On se propose, dans cette partie, d'étudier la fonction h et d'examiner si le tracé fourni par l'ordinateur donne une information fiable.

1. Déterminer la limite de h en $-\infty$ (on pourra poser $X = 3x$).
2. Déterminer la limite de h en $+\infty$;
   (on observera que $3\mathrm{e}^{x} - x - 4 = \left(3 - \dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}} - \dfrac{4}{\mathrm{e}^{x}}\right)\mathrm{e}^{x}$).
3. On note h' la dérivée de h. Montrer que $h'(x) = \left(12\mathrm{e}^{x} - 3x - 13\right)\mathrm{e}^{3x}$.
4. Étude d'une fonction auxiliaire. Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
   $k(x) = 12\mathrm{e}^{x} - 3x - 13$.
   a. On note k' la fonction dérivée de la fonction k. Étudier le signe de k' sur $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer la limite de k en $+\infty$.
   c. Déterminer la limite de k en $-\infty$.
   d. Dresser le tableau de variations de la fonction k.
5. Étude des variations de la fonction h.
   a. Montrer qu'il existe un nombre réel négatif α et un seul tel que $k(\alpha) = 0$ et vérifier que $-4,3 < \alpha < -4,2$.
   On admet que l'on peut établir qu'il existe un nombre réel positif β et un seul tel que $k(\beta) = 0$ et que $0,1 < \beta < 0,2$.
   b. En déduire le signe de k sur $\mathbb{R}$ puis le sens de variations de la fonction h.
   c. Le plan est rapporté à un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm représente $0,1$ sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 10 sur l'axe des ordonnées). Représenter graphiquement la fonction h sur l'intervalle $[-5 ; -3,9]$.
6. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique b dans l'intervalle $]-\infty ; 0[$.
   Donner un encadrement de b à 10^{-1} près.

Partie B : Approximation de l'une des solutions de l'équation $h(x) = 0$

On admet qu'il existe un nombre réel a et un seul dans l'intervalle $\mathrm{I} = [0 ; 1]$ tel que $h(a) = 0$.

1. Justifier que, dans l'intervalle I, l'équation $h(x) = 0$ est équivalente à l'équation $3\mathrm{e}^{x} - x - 4 = 0$ puis à l'équation $x = \ln\left(\dfrac{x+4}{3}\right)$.
2. On considère la fonction φ définie sur l'intervalle I par $\varphi(x) = \ln\left(\dfrac{x+4}{3}\right)$.
   a. Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\varphi(x) \in \mathrm{I}$.
   b. Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\left|\varphi'(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   c. Calculer $\varphi(a)$.
3. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$.
   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - a|$.

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - a| \leqslant \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Préciser sa limite.

d. Déterminer un nombre entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de a à 10^{-4} près.
Donner une valeur approchée de u_p à 10^{-4}.