

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Antilles–Guyane juin 1999 ∞

EXERCICE 1

4 points

Commun à tous les candidats

Lors d'un examen, un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.) est utilisé. On s'intéresse à cinq questions de ce Q.C.M. supposées indépendantes. À chaque question sont associées quatre affirmations, numérotées 1, 2, 3 et 4, dont une seule est exacte.

Un candidat doit répondre à chaque question en donnant seulement le numéro de l'affirmation qu'il juge exacte ; sa réponse est correcte si l'affirmation qu'il a retenue est vraie, sinon sa réponse est incorrecte.

Dans cet exercice, les probabilités demandées seront données sous forme fractionnaire.

1. Un candidat répond à chaque question au hasard, c'est-à-dire qu'il considère que les quatre affirmations correspondantes sont équiprobables.
 - a. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
A : « Le candidat répond correctement à la première des cinq questions » ;
B : « Le candidat répond correctement à deux questions au moins sur les cinq ».
 - b. On attribue la note 4 à toute réponse correcte et la note - 1 à toute réponse incorrecte.
Calculer la probabilité de l'évènement C : « Le candidat obtient une note au moins égale à 10 pour l'ensemble des cinq questions ».
2. On suppose maintenant qu'un candidat connaît la réponse correcte à deux questions et qu'il répond au hasard aux trois autres questions. Quelle est alors la probabilité de l'évènement C décrit au 1 b ?

Exercice 2

5 points

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

On considère le point A d'affixe 1 et, pour tout θ appartenant à $[0 ; 2\pi[$, le point M d'affixe $z = e^{i\theta}$. On désigne par P le point d'affixe $1 + z$ et par Q le point d'affixe z^2 .

1. À partir du point M, donner une construction géométrique du point P et une construction géométrique du point Q. Les points O, A, M, P et Q seront placés sur une même figure.
2. Déterminer l'ensemble des points E pour θ appartenant à $[0 ; 2\pi[$.
Tracer cet ensemble sur la figure précédente.
3. Soit S le point d'affixe $1 + z + z^2$ où z désigne toujours l'affixe du point M. Construire S, en justifiant la construction.
4. Dans le cas où S est différent de O, tracer la droite (OS). Quelle conjecture apparaît, relativement au point M ?
Démontrer que le nombre $\frac{1 + z + z^2}{2}$ est réel, quel que soit θ appartenant à $[0 ; 2\pi[$.
Conclure sur la conjecture précédente.

Exercice 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) , on donne le point $A(12 ; 18)$.
On désigne par B un point de l'axe $(O ; \vec{i})$ et par C un point de l'axe $(O ; \vec{j})$ tels que
 $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2}$.
On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C .

- Démontrer que le couple $(x ; y)$ est solution de l'équation :

$$(E) \quad 2x + 3y = 78.$$

- On se propose de trouver tous les couples (B, C) de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.
 - Montrer que l'on est ramené à l'équation (E) , avec x et y appartenant à l'ensemble \mathbb{Z} des nombres entiers relatifs.
 - À partir de la définition de B et C , trouver une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de (E) avec x_0 et y_0 appartenant à \mathbb{Z} .
 - Démontrer qu'un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si, et seulement si, il est de la forme $(12 + 3k ; 18 - 2k)$, où k appartient à \mathbb{Z} .
 - Combien y a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que :

$$-6 \leq x \leq 21 \text{ et } -5 \leq y \leq 14 ?$$

Problème

11 points

Commun à tous les candidats

L'objet de ce problème est d'étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire et de calculer l'aire d'un domaine plan.

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] - 1 ; + \infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1).$$

- Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variations de la fonction f .
- Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α , appartient à $[-0,72 ; -0,71]$.
- Donner le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $-1 ; +\infty[$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $] - 1 ; 0[\cup] 0 ; + \infty[$ par :

$$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}.$$

- Étude de g aux bornes de son ensemble de définition
 - Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.
 - Calculer $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- Sens de variation de g
 - Calculer $g'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.

b. Montrer que $g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha = -0,715$.

3. Tableau de variations et représentation graphique de g

a. Dresser le tableau de variations de la fonction g .

b. Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

4. Calcul d'aire

Soit a un réel strictement supérieur à 0. On pose :

$$I(a) = \int_1^a g(x) dx.$$

a. Donner, suivant les valeurs de a , une interprétation géométrique du réel $I(a)$.

b. En remarquant que, pour x appartenant à $]0 ; +\infty[$:

$$\frac{1}{x(1+x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$$

calculer $I(a)$ à l'aide d'une intégration par parties.

c. Calculer $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a)$ et $\lim_{a \rightarrow 0} I(a)$.