

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Centres étrangers juin 1999 ∞

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

1. Une urne  $U_1$  contient deux jetons numérotés 1 et 2.  
Une urne  $U_2$  contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.  
On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne. (Les choix sont supposés équiprobables).
  - a. Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?
  - b. On a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne  $U_1$  ?
2. On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents. On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.
  - a. Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques.
  - b. Soit  $S$  la variable aléatoire, qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 jetons tirés. Déterminer la loi de probabilité de  $S$ .
  - c. Deux joueurs, Claude et Dominique, décident que si la somme des numéros tirés est impaire, Claude donne 10 euros à Dominique et que, dans le cas contraire, Claude reçoit  $\lambda$  euros de Dominique.  
On note  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Claude.  
Calculer l'espérance mathématique de  $X$  en fonction de  $\lambda$ , puis déterminer  $\lambda$  pour que le jeu soit équitable (c'est-à-dire pour que  $E(X)$  soit égale à 0).

Exercice 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de cet exercice est d'utiliser les solutions d'une équation à deux inconnues entières pour résoudre un problème dans l'espace.

1. a. Déterminer un couple  $(x_0 ; y_0)$  d'entiers relatifs solutions de l'équation :

$$48x + 35y = 1.$$

(On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres).

- b. Dédire de a. tous les couples d'entiers relatifs  $(x ; y)$  solutions de cette équation.
2. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on donne le vecteur  $\vec{u}$  de coordonnées  $(48 ; 35 ; 24)$  et le point A de coordonnées  $(-11 ; 35 ; -13)$ .
  - a. Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l'ensemble  $(\Pi)$  des points  $M$  de l'espace, de coordonnées  $(x ; y ; z)$  tels que  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ .
  - b. Soit  $(D)$  la droite intersection de  $(\Pi)$  avec le plan d'équation  $z = 16$ .  
Déterminer tous les points de  $(D)$  dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle  $[-100 ; 100]$ .  
En déduire les coordonnées du point de  $(D)$ , coordonnées entières, situé le plus près de l'origine.

**Exercice 2****5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , A, A', B, B' sont les points d'affixes respectives 1, -1, i, -i.

À tout point  $M$  d'affixe  $z$ , distinct des points O, A, A', B et B', on associe les points  $M_1$  et  $M_2$  d'affixes respectives  $z_1$  et  $z_2$ , tels que les triangles  $BMM_1$  et  $AMM_2$  soient rectangles et isocèles, avec

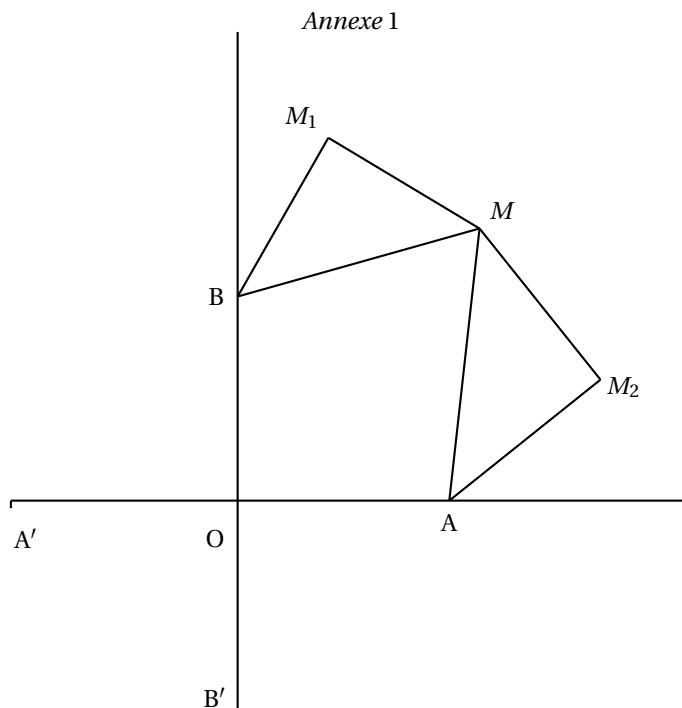
$$\left(\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1M}\right) = \left(\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2A}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Voir la figure sur l'annexe 1, qui sera complétée et rendue avec la copie

1. **a.** Justifier les égalités  $z - z_1 = i(i - z_1)$  et  $1 - z_2 = i(z - z_2)$ .
- b.** Vérifier que  $z_1$  et  $z_2$  peuvent s'écrire :

$$z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1) \text{ et } z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i).$$

2. On se propose dans cette question de déterminer les points  $M$  pour lesquels le triangle  $OM_1M_2$  est équilatéral.
  - a.** Montrer que :  $OM_1 = OM_2$  équivaut à  $|z+1| = |z+i|$ .  
En déduire l'ensemble  $(\Delta)$  des points  $M$  tels que  $OM_1 = OM_2$  et tracer  $(\Delta)$  sur la figure.
  - b.** Montrer que :  $OM_1 = M_1M_2$  équivaut  $|z+1|^2 = 2|z|^2$ .
  - c.** En déduire l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  du plan pour lesquels  $OM_1 = M_1M_2$ .  
On pourra montrer que  $|z+1|^2 = 2|z|^2$  équivaut à  $|z-1|^2 = 2$ .  
Tracer  $(\Gamma)$  sur la figure.
  - d.** En déduire les deux points  $M$  pour lesquels  $OM_1M_2$  est un triangle équilatéral et les placer sur la figure.

**Problème****10 points****Commun à tous les candidats**

Le but du problème est l'étude d'une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et d'une primitive de  $f$ .

**Première partie****Étude d'une fonction auxiliaire  $g$** 

Soit  $g$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par :

$$g(x) = 2x^2 - (x^2 + 1)\ln(x^2 + 1).$$

1. Montrer que  $g$  est dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  et en détaillant les calculs effectués, montrer que

$$g'(x) = 2x - 2x\ln(x^2 + 1).$$

2. Faire l'étude du sens de variation de  $g$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
3. Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera  $\alpha$ , dans l'intervalle  $[\sqrt{e-1}, \sqrt{e^2-1}]$ , tel que  $g(\alpha) = 0$ ; donner l'approximation décimale  $10^{-2}$  près par défaut de  $\alpha$ .
4. En déduire le signe de  $g(x)$ , pour  $x$  appartenant l'intervalle  $[0; +\infty[$ .

**Deuxième partie****Étude de la fonction  $f$** 

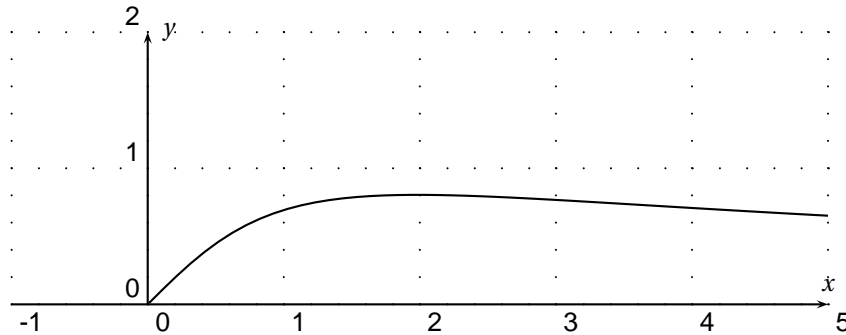
La fonction  $f$  est définie sur  $[0; +\infty[$  par :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \text{ lorsque } x \neq 0.$$

Sa courbe représentative ( $\mathcal{C}$ ), dans le plan rapporté à un repère d'origine  $O$ , est donnée en *annexe 2*, qui sera complétée et rendue avec la copie.

1. a. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ .  
En déduire que  $f$  est dérivable en 0 et donner la valeur de  $f'(0)$ .
- b. Vérifier que, pour  $x$  strictement positif,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+x^2)}$   
Faire l'étude du sens de variation de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .
2. a. Montrer que, pour  $x \geq 1$ ,  $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln(2x^2)}{x}$ .
- b. En déduire la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

## Annexe 1



## Troisième partie

Étude d'une primitive de  $f$ 

On note  $F$  la primitive de  $f$  sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ , qui s'annule pour  $x = 1$ .

On rappelle que  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$  : (on ne cherchera pas à calculer  $F(x)$ ).

1. a. Montrer que, pour  $x > 0$ ,  $f(x) \geq \frac{2 \ln x}{x}$ .
- b. Calculer  $\int_1^x \frac{2 \ln t}{t} dt$  pour  $x \geq 1$  et en déduire la limite de  $F$  en  $+\infty$ .
2. Dresser le tableau des variations de  $F$ .
3. Montrer que  $f(1) < F(2) < f(2)$  et en déduire un encadrement de  $F(2)$ . (On prendra  $f(2) \approx 0,8$ .)
4. On note I le point de coordonnées  $(1; 0)$ , A le point de  $(\mathcal{C})$  de coordonnées  $(1; \ln 2)$  et B le point de coordonnées  $(\ln 2; \ln 2)$ .
  - a. Vérifier que B appartient à la tangente  $(\mathcal{C})$  en O.
  - b. Placer les points I, A et B sur la figure de l'annexe 1 et tracer les segments  $[OA]$ ,  $[OB]$ ,  $[BA]$  et  $[AI]$ .
  - c. On admet que, pour les abscisses appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$ , la courbe  $(\mathcal{C})$  est située au-dessus de  $[OA]$  et au-dessous de  $[OB]$  et de  $[BA]$ .  
Déterminer un encadrement de  $F(0)$ , d'amplitude inférieure à  $2 \times 10^{-1}$ .
5. Tracer la représentation graphique  $(\Gamma)$  de  $F$  en exploitant au maximum les résultats précédents; on précisera notamment la tangente  $(\Gamma)$  au point d'abscisse 1 en la traçant et en donnant son coefficient directeur. (Unité graphique : 2 cm)