

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat S Centres étrangers juin 1999 ∞

Exercice 1

5 points

Commun à tous les candidats

1. Une urne U_1 contient deux jetons numérotés 1 et 2.
Une urne U_2 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.
On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne. (Les choix sont supposés équiprobables).
 - a. Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?
 - b. On a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1 ?
2. On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents. On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.
 - a. Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques.
 - b. Soit S la variable aléatoire, qui, à chaque tirage, associe la somme des numéros des 2 jetons tirés. Déterminer la loi de probabilité de S .
 - c. Deux joueurs, Claude et Dominique, décident que si la somme des numéros tirés est impaire, Claude donne 10 euros à Dominique et que, dans le cas contraire, Claude reçoit λ euros de Dominique.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Claude.
Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de λ , puis déterminer λ pour que le jeu soit équitable (c'est-à-dire pour que $E(X)$ soit égale à 0).

Exercice 2

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le but de cet exercice est d'utiliser les solutions d'une équation à deux inconnues entières pour résoudre un problème dans l'espace.

1. a. Déterminer un couple $(x_0 ; y_0)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation :

$$48x + 35y = 1.$$

(On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres).

- b. Dédire de a. tous les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$ solutions de cette équation.
2. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on donne le vecteur \vec{u} de coordonnées $(48 ; 35 ; 24)$ et le point A de coordonnées $(-11 ; 35 ; -13)$.
 - a. Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l'ensemble (Π) des points M de l'espace, de coordonnées $(x ; y ; z)$ tels que $\vec{u} \cdot \vec{AM} = 0$.
 - b. Soit (D) la droite intersection de (Π) avec le plan d'équation $z = 16$.
Déterminer tous les points de (D) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle $[-100 ; 100]$.
En déduire les coordonnées du point de (D) , coordonnées entières, situé le plus près de l'origine.

Exercice 2**5 points****Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal (O, \vec{u}, \vec{v}) , A, A', B, B' sont les points d'affixes respectives 1, -1, i, -i.

À tout point M d'affixe z , distinct des points O, A, A', B et B', on associe les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 , tels que les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles et isocèles, avec

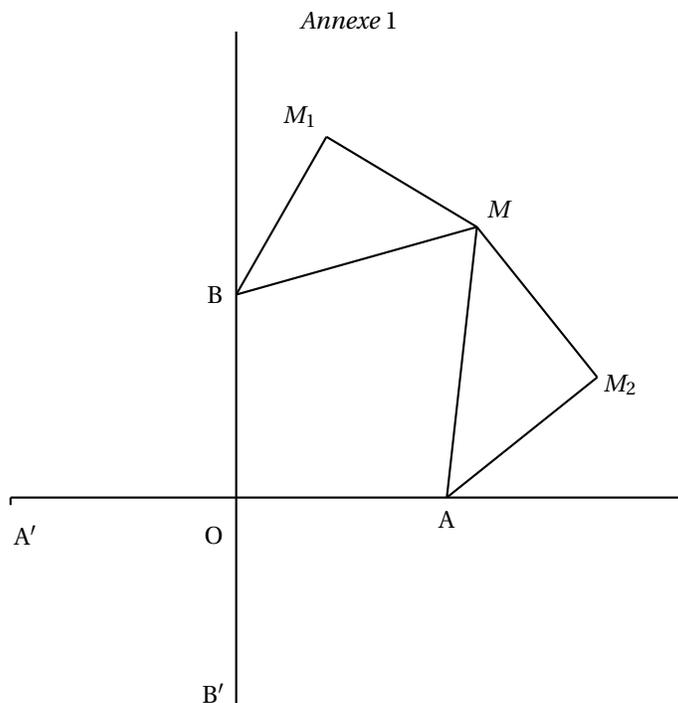
$$\left(\overrightarrow{M_1B}, \overrightarrow{M_1M}\right) = \left(\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2A}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Voir la figure sur l'annexe 1, qui sera complétée et rendue avec la copie

1. **a.** Justifier les égalités $z - z_1 = i(i - z_1)$ et $1 - z_2 = i(z - z_2)$.
- b.** Vérifier que z_1 et z_2 peuvent s'écrire :

$$z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1) \text{ et } z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i).$$

2. On se propose dans cette question de déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral.
 - a.** Montrer que : $OM_1 = OM_2$ équivaut à $|z+1| = |z+i|$.
En déduire l'ensemble (Δ) des points M tels que $OM_1 = OM_2$ et tracer (Δ) sur la figure.
 - b.** Montrer que : $OM_1 = M_1M_2$ équivaut $|z+1|^2 = 2|z|^2$.
 - c.** En déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan pour lesquels $OM_1 = M_1M_2$.
On pourra montrer que $|z+1|^2 = 2|z|^2$ équivaut à $|z-1|^2 = 2$.
Tracer (Γ) sur la figure.
 - d.** En déduire les deux points M pour lesquels OM_1M_2 est un triangle équilatéral et les placer sur la figure.

**Problème****10 points****Commun à tous les candidats**

Le but du problème est l'étude d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et d'une primitive de f .

Première partie**Étude d'une fonction auxiliaire g**

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^2 - (x^2 + 1)\ln(x^2 + 1).$$

1. Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et en détaillant les calculs effectués, montrer que

$$g'(x) = 2x - 2x\ln(x^2 + 1).$$

2. Faire l'étude du sens de variation de g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel, que l'on notera α , dans l'intervalle $[\sqrt{e-1}, \sqrt{e^2-1}]$, tel que $g(\alpha) = 0$; donner l'approximation décimale 10^{-2} près par défaut de α .
4. En déduire le signe de $g(x)$, pour x appartenant à l'intervalle $[0; +\infty[$.

Deuxième partie**Étude de la fonction f**

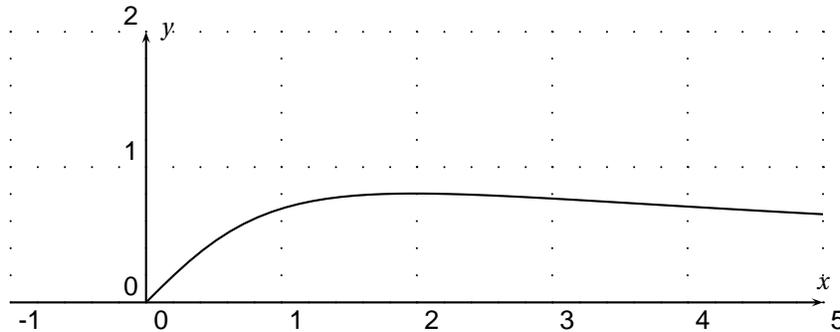
La fonction f est définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} \text{ lorsque } x \neq 0.$$

Sa courbe représentative (\mathcal{C}), dans le plan rapporté à un repère d'origine O , est donnée en *annexe 2*, qui sera complétée et rendue avec la copie.

1. a. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.
En déduire que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
- b. Vérifier que, pour x strictement positif, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+x^2)}$
Faire l'étude du sens de variation de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. a. Montrer que, pour $x \geq 1$, $0 \leq f(x) \leq \frac{\ln(2x^2)}{x}$.
- b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Annexe 1



Troisième partie

Étude d'une primitive de f

On note F la primitive de f sur l'intervalle $[0; +\infty[$, qui s'annule pour $x = 1$.

On rappelle que $F(x) = \int_1^x f(t) dt$: (on ne cherchera pas à calculer $F(x)$).

1. a. Montrer que, pour $x > 0$, $f(x) \geq \frac{2 \ln x}{x}$.
- b. Calculer $\int_1^x \frac{2 \ln t}{t} dt$ pour $x \geq 1$ et en déduire la limite de F en $+\infty$.
2. Dresser le tableau des variations de F .
3. Montrer que $f(1) < F(2) < f(2)$ et en déduire un encadrement de $F(2)$. (On prendra $f(2) \approx 0,8$.)
4. On note I le point de coordonnées $(1; 0)$, A le point de (\mathcal{C}) de coordonnées $(1; \ln 2)$ et B le point de coordonnées $(\ln 2; \ln 2)$.
 - a. Vérifier que B appartient à la tangente (\mathcal{C}) en O.
 - b. Placer les points I, A et B sur la figure de l'annexe 1 et tracer les segments $[OA]$, $[OB]$, $[BA]$ et $[AI]$.
 - c. On admet que, pour les abscisses appartenant à l'intervalle $[0; 1]$, la courbe (\mathcal{C}) est située au-dessus de $[OA]$ et au-dessous de $[OB]$ et de $[BA]$.
Déterminer un encadrement de $F(0)$, d'amplitude inférieure à 2×10^{-1} .
5. Tracer la représentation graphique (Γ) de F en exploitant au maximum les résultats précédents; on précisera notamment la tangente (Γ) au point d'abscisse 1 en la traçant et en donnant son coefficient directeur. (Unité graphique : 2 cm)